

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Численный анализ
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: Е.Е. Тыртышников, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике 16.05.2020

Аннотация

Численный анализ — это набор техник и подходов для приближённого решения математических задач. Очень редко задачи аппроксимации, интерполяции и дифференциальные уравнения решаются аналитически, но в большинстве случаев можно предложить надёжный численный анализ, позволяющий получить решение с заданной точностью. Курс призван дать представление о современном состоянии вычислительной математики и её приложений в анализе данных. Студенты научатся не только получать теоретические оценки сходимости и надёжности, но улучшать и строить свои методы для решения более конкретных задач на практике.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Освоение студентами фундаментальных знаний в области приближенного решения краевых задач и математического моделирования, изучение современных методов дискретизации дифференциальных уравнений и областей их практического применения.

Задачи дисциплины

- формирование базовых знаний в области дискретизации дифференциальных уравнений и математического моделирования как дисциплин, обеспечивающей технологические основы современных инновационных сфер деятельности;
- обучение студентов двум классам современных методов дискретизации и ознакомление с их приложениями;
- формирование подходов к выполнению исследований студентами по математическому моделированию в рамках выпускных работ на степень магистра.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре)	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- методы численного интегрирования;
- методы численного решения нелинейных дифференциальных уравнений;
- методы численного решения интегральных уравнений;
- методы оценки сходимости решений.

уметь:

- ☐ осуществлять математическую постановку физических задач;
- ☐ применять методы численного анализа к решению физических задач;
- ☐ исследовать полученные решения в сопоставлении с особенностями решаемой задачи;
- ☐ делать качественные выводы при переходе к предельным условиям в изучаемых проблемах;
- ☐ пользоваться справочной литературой научного и прикладного характера для быстрого поиска необходимых математических данных и понятий.

владеть:

- ☐ базовыми знаниями в области численного анализа и методами их использования в профессиональной деятельности;
- ☐ навыками освоения большого объема информации;
- ☐ культурой постановки и моделирования физических задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Интегральные уравнения. Функциональные пространства и свойства интегральных операторов. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Метод Галеркина. Интегральные уравнения и структурированные матрицы.	6			5
2	Квадратичные функционалы и линейные системы. Минимизация на подпространствах и проекционные методы. А-норма и А-ортогональность. Метод сопряженных градиентов. Метод Арнольди и метод Ланцоша. Сходимость метода сопряженных градиентов.	6			
3	Проблема собственных значений. Степенной метод. Приближение функций. Полиномиальная интерполяция. Сходимость интерполяционного процесса. Алгебраические и тригонометрические полиномы.	6			5
4	Сплаины. Вариационное свойство естественных сплайнов. Минимизация нормы. Равномерные приближения. Метод наименьших квадратов. Ортогональные полиномы.	6			
5	Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Нелинейные уравнения. Метод простой итерации. Методы минимизации.	6			5
Итого часов		30			15
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		45 час., 1 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Интегральные уравнения. Функциональные пространства и свойства интегральных операторов. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Метод Галеркина. Интегральные уравнения и структурированные матрицы.

Интегральные уравнения. Функциональные пространства и свойства интегральных операторов. Эллиптичность. Уравнение с логарифмическим ядром. Теорема Шо-Ведланда. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Метод Галеркина. Роль строгой эллиптичности. Компактные возмущения.

Интегральные уравнения и структурированные матрицы. Циркулянтные предобусловливатели. Методы быстрого приближенного умножения.

2. Квадратичные функционалы и линейные системы. Минимизация на подпространствах и проекционные методы. А-норма и А-ортогональность. Метод сопряженных градиентов. Метод Арнольди и метод Ланцоша. Сходимость метода сопряженных градиентов.

Квадратичные функционалы и линейные системы. Минимизация на подпространствах и проекционные методы. Подпространства Крылова. Оптимальность подпространств Крылова. Метод минимальных невязок.

А-норма и А-ортогональность. Метод сопряженных градиентов. Метод Арнольди и метод Ланцоша. Псевдоскалярное произведение и метод биортогонализации. Квазимиимизация.

Сходимость метода сопряженных градиентов. Классическая оценка сходимости и ее уточнения. "Сверхлинейная" сходимость и "исчезающие" собственные значения. Числа Ритца и векторы Ритца. Теорема Вандерслюиса-Вандерворста. Предобусловливание в неэрмитовом и эрмитовом случае. Спектральная эквивалентность и кластеры.

3. Проблема собственных значений. Степенной метод. Приближение функций. Полиномиальная интерполяция. Сходимость интерполяционного процесса. Алгебраические и тригонометрические полиномы.

Проблема собственных значений. Степенной метод. Итерации подпространств. QR-алгоритм. QR-алгоритм со сдвигами. Глобальная сходимость. Квадратичная и кубическая сходимость. Организация вычислений. Как найти сингулярное разложение.

Приближение функций. Полиномиальная интерполяция. Интерполяционный полином Лагранжа. Погрешность лагранжевой интерполяции. Разделенные разности. Формула Ньютона. Разделенные разности с кратными узлами. Обобщенные интерполяционные условия. Таблица разделенных разностей.

Сходимость интерполяционного процесса. Алгебраические и тригонометрические полиномы. Проекторы, связанные с рядами Фурье. Интерполяционные проекторы для чебышевских сеток.

4. Сплайны. Вариационное свойство естественных сплайнов. Минимизация нормы. Равномерные приближения. Метод наименьших квадратов. Ортогональные полиномы.

Сплайны. Вариационное свойство естественных сплайнов. Как строить естественные сплайны. Аппроксимационные свойства естественных сплайнов. В-сплайны. Квазилокальность и ленточные матрицы.

Минимизация нормы. Равномерные приближения. Полиномы Чебышева. Ряд Тейлора и его дискретный аналог.

Метод наименьших квадратов. Ортогональные полиномы. Трехчленные рекуррентные соотношения. Корни ортогональных полиномов. Трехчленные соотношения и трехдиагональные матрицы. Соотношения разделения между корнями. Ортогональные полиномы и разложение Холецкого.

5. Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Нелинейные уравнения. Метод простой итерации. Методы минимизации.

Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Алгебраическая точность. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Формулы Гаусса. Составные квадратурные формулы. Правило Рунге для оценки погрешностей. Как интегрировать "плохие" функции.

Нелинейные уравнения. Метод простой итерации. Сходимость и расходимость метода простой итерации. Оптимизация метода простой итерации. Метод Ньютона и эрмитова интерполяция. Многомерный вариант метода Ньютона. Прямая и обратная интерполяция. Сравнение метода секущих и метода касательных.

Методы минимизации. Метод Ньютона. Релаксация. Дробление шага. Существование и единственность точки минимума. Градиентный метод с дроблением шага. Метод скорейшего спуска. Быстрое вычисление градиента. Понятие об овражном методе, методе сопряженных направлений, квазиньютоновских методах, релаксационном методе "глобализации" сходимости.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, звуковая система).

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

- 1.Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. - М.: Физматлит, 2007, 480 с.
- 2.Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. -- М.: Издательский центр «Академия», 2007, 320 с.

Дополнительная литература

1. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков, Численные методы. Наука, 1987.
2. G.H.Golub, Ch. Van Loan, Matrix Computations, The Hopkins University Press, 1989.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Программное обеспечение и информационные технологии не требуются.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, алгоритмы.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике
курс:	3
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	Е.Е. Тыртышников, д-р физ.-мат. наук, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре)	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Численный анализ» обучающийся должен:

знать:

- методы численного интегрирования;
- методы численного решения нелинейных дифференциальных уравнений;
- методы численного решения интегральных уравнений;
- методы оценки сходимости решений.

уметь:

- ☐ осуществлять математическую постановку физических задач;
- ☐ применять методы численного анализа к решению физических задач;
- ☐ исследовать полученные решения в сопоставлении с особенностями решаемой задачи;
- ☐ делать качественные выводы при переходе к предельным условиям в изучаемых проблемах;
- ☐ пользоваться справочной литературой научного и прикладного характера для быстрого поиска необходимых математических данных и понятий.

владеть:

- ☐ базовыми знаниями в области численного анализа и методами их использования в профессиональной деятельности;
- ☐ навыками освоения большого объёма информации;
- ☐ культурой постановки и моделирования физических задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Проблема собственных значений. Степенной метод. Итерации подпространств. QR-алгоритм. QR-алгоритм со сдвигами. Глобальная сходимость. Квадратичная и кубическая сходимость. Организация вычислений. Как найти сингулярное разложение.
2. Приближение функций. Полиномиальная интерполяция. Интерполяционный полином Лагранжа. Погрешность лагранжевой интерполяции. Разделенные разности. Формула Ньютона. Разделенные разности с кратными узлами. Обобщенные интерполяционные условия. Таблица разделенных разностей.
3. Сходимость интерполяционного процесса. Алгебраические и тригонометрические полиномы. Проекторы, связанные с рядами Фурье. Интерполяционные проекторы для чебышевских сеток.

4. Сплаины. Вариационное свойство естественных сплайнов. Как строить естественные сплайны. Аппроксимационные свойства естественных сплайнов. В-сплайны. Квазилокальность и ленточные матрицы.
5. Минимизация нормы. Равномерные приближения. Полиномы Чебышева. Ряд Тейлора и его дискретный аналог.
6. Метод наименьших квадратов. Ортогональные полиномы. Трехчленные рекуррентные соотношения. Корни ортогональных полиномов. Трехчленные соотношения и трехдиагональные матрицы. Соотношения разделения между корнями. Ортогональные полиномы и разложение Холецкого.
7. Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Алгебраическая точность. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Формулы Гаусса. Составные квадратурные формулы. Правило Рунге для оценки погрешностей. Как интегрировать "плохие" функции.
8. Нелинейные уравнения. Метод простой итерации. Сходимость и расходимость метода простой итерации. Оптимизация метода простой итерации. Метод Ньютона и эрмитова интерполяция. Многомерный вариант метода Ньютона. Прямая и обратная интерполяция. Сравнение метода секущих и метода касательных.
9. Методы минимизации. Метод Ньютона. Релаксация. Дробление шага. Существование и единственность точки минимума. Градиентный метод с дроблением шага. Метод скорейшего спуска. Быстрое вычисление градиента. Понятие об овражном методе, методе сопряженных направлений, квазиньютоновских методах, релаксационном методе "глобализации" сходимости.
10. Квадратичные функционалы и линейные системы. Минимизация на подпространствах и проекционные методы. Подпространства Крылова. Оптимальность подпространств Крылова. Метод минимальных невязок.
11. А-норма и А-ортогональность. Метод сопряженных градиентов. Метод Арнольди и метод Ланцоша. Псевдоскалярное произведение и метод биортогонализации. Квазимиимизация.
12. Сходимость метода сопряженных градиентов. Классическая оценка сходимости и ее уточнения. "Сверхлинейная" сходимость и "исчезающие" собственные значения. Числа Ритца и векторы Ритца. Теорема Вандерслюиса-Вандерворста. Предобуславливание в неэрмитовом и эрмитовом случае. Спектральная эквивалентность и кластеры.
13. Интегральные уравнения. Функциональных пространства и свойства интегральных операторов. Эллиптичность. Уравнение с логарифмическим ядром. Теорема Шо-Ведланда.
14. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Метод Галеркина. Роль строгой эллиптичности. Компактные возмущения.
15. Интегральные уравнения и структурированные матрицы. Циркулянтные предобуславливатели. Методы быстрого приближенного умножения.

Примерный перечень билетов:

Билет №1.

1. Сходимость интерполяционного процесса. Алгебраические и тригонометрические полиномы. Проекторы, связанные с рядами Фурье. Интерполяционные проекторы для чебышевских сеток.
2. Минимизация нормы. Равномерные приближения. Полиномы Чебышева. Ряд Тейлора и его дискретный аналог.

Билет №2.

1. Сплаины. Вариационное свойство естественных сплайнов. Как строить естественные сплайны. Аппроксимационные свойства естественных сплайнов. В-сплайны. Квазилокальность и ленточные матрицы.
2. Метод наименьших квадратов. Ортогональные полиномы. Трехчленные рекуррентные соотношения. Корни ортогональных полиномов. Трехчленные соотношения и трехдиагональные матрицы. Соотношения разделения между корнями. Ортогональные полиномы и разложение Холецкого.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Дифференцированный зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, или путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.