

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Методы выпуклой оптимизации в решении выпуклых и невыпуклых задач
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Р. Хильдебранд, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 05.03.2021

Аннотация

Цель курса – обучить студентов современным методам выпуклой оптимизации и их применению в решении задач выпуклой и невыпуклой оптимизации. Особый упор будет сделан на коническую оптимизацию, начиная с линейного программирования и переходя к более сложным задачам конично-квадратичного и полуопределённого программирования, а также к задачам над несимметрическими конусами. В тесной связке с самими методами идут вопросы моделирования, т.е. представления конкретных задач в стандартном виде конической программы. Если же это невозможно, применяются разные техники построения выпуклых аппроксимаций (релаксаций), которых можно привести к виду конической программы. Будут рассмотрены также некоторые стандартные методы невыпуклой оптимизации, опирающиеся на решение последовательности выпуклых задач, в частности, методов типа ограничений и ветвлений.

Курс будет сопровождаться практическими занятиями, на которых студенты сами смогут имплементировать алгоритмы для решения разных выпуклых и невыпуклых задач на конкретном языке.

Курс начнётся с представления теоретической базы: векторные и аффинные пространства, топология, нормы, двойственность, выпуклые множества и конусы и операции над ними, опорные плоскости, теоремы отделимости, фасады и экстремальные точки и лучи, а также общий вид задач оптимизации, выпуклость и сложность задач оптимизации, классы задач.

Будут представлены простые методы решения выпуклых задач, которые могут быть использованы как элементарные блоки в более сложных алгоритмах: методы одномерного поиска, метод эллипсоидов, аналитические формулы для решения простых квадратичных задач.

Всесторонне будет освещаться теория, методы и приложения линейного программирования (ЛП): полиэдры и полиэдральные конусы, политопы, двойственность, теорема об альтернативе, сложность представления полиэдра, задача ЛП в стандартном виде; симплекс-метод и его варианты, методы внутренней точки, методы решения задач линейной комплементарности; прикладные задачи, сводящиеся к задаче ЛП, линейные релаксации невыпуклых задач, методы решения смешанно-целочисленных ЛП.

Коническое программирование: конусы Лоренца и конично-квадратичные задачи, матричные конусы и полуопределённое программирование, самосогласованные барьеры, методы внутренней точки для программ над симметричными и несимметричными конусами, представимость одного конуса через другой.

Робастная оптимизация: робастный аналог конической программы, его сведение к обычной конической программе, полуопределённые релаксации робастных аналогов.

Приложения конического программирования: описанный эллипсоид минимального объёма, вписанный эллипсоид максимального объёма, оптимизация топологии фермы, построение функций Ляпунова, построение регулятора для линейных динамических систем.

Релаксации: аппроксимации сложных невыпуклых задач выпуклыми, рандомизированная процедура Гёманса-Виллиамсона, теоремы Нестерова и Немировского о качестве релаксаций задачи максимизации квадратичной формы на кубе, релаксации комбинаторных задач.

Полиномиальная оптимизация: положительные полиномы и суммы квадратов, внутренние и внешние моментные релаксации.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- ознакомление студентов с задачами и методами решения в конической оптимизации, а также с приложениями в выпуклой и невыпуклой оптимизации, моделированием, теорией и построением выпуклых релаксаций для решения невыпуклых задач.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области конической оптимизации,
- приобретение слушателями навыков владения аппаратом выпуклого анализа, в частности, теории двойственности и её применения,
- приобретение навыков имплементации методов, а также навыков использования оптимизационных пакетов,
- приобретение умения распознавать сложность задач, в частности, представимость в виде конической задачи стандартного вида,
- приобретение навыков моделирования и построения релаксаций для разных классов выпуклых и невыпуклых задач, соответственно.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, и методы выпуклой оптимизации;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач выпуклой и невыпуклой оптимизации;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач;
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов выпуклой оптимизации;
- ☐ предметным языком и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Базовая теория. Классы задач оптимизации. Простые методы.	10	6		6
2	Линейное программирование. Коническое программирование.	5	6		6
3	Робастная оптимизация.	5	6		6
4	Приложения конического программирования. Релаксации невыпуклых задач	5	6		6
5	Полиномиальная оптимизация.	5	6		6
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Базовая теория. Классы задач оптимизации. Простые методы.

Векторные и аффинные пространства, топология, нормы, скалярные произведения, двойственность, аффинная оболочка, относительная внутренность. Выпуклые множества и конусы и операции над ними, выпуклая оболочка, расстояние до выпуклого множества. Опорные плоскости, теоремы отделимости, фасады и экстремальные точки и лучи. Поляра. Формализация задач оптимизации. Типы ограничений, функций цены. Классификация задач оптимизации. Сложность задачи оптимизации. Пакеты программного обеспечения для решения задач.

Решение простейшей задачи квадратичной оптимизации. Минимизация линейного функционала на эллипсоиде. Методы решения задач в размерности. Метод эллипсоидов.

2. Линейное программирование. Коническое программирование.

Полиэдры и полиэдральные конусы, политопы, симплекс, ортант. Сильная двойственность, теорема об альтернативе. Сложность представления полиэдра, поднятия, теорема Яннакакиса. Задача ЛП в стандартном виде, двойственная задача. Симплекс-метод, двойственный симплекс-метод и другие методы активных ограничений. Методы внутренней точки, центральный путь, прямо-двойственные методы. Методы решения задач линейной комплементарности и выпуклых квадратичных задач с линейными ограничениями. Прикладные задачи, сводящиеся к задаче ЛП, равномерное приближение на сетке, оптимальное распределение ресурсов, задача о максимальном потоке, восстановление разреженного сигнала. Линейные релаксации невыпуклых задач, методы решения смешанно-целочисленных ЛП, метод ветвлений и ограничений.

Стандартный вид конической программы. Конуса Лоренца и конично-квадратичные задачи, матричные конусы и полуопределённое программирование, симметричные конуса. Самосоогласованные барьеры, универсальные конструкции барьеров. Двойственность Лежандра. Методы внутренней точки для программ над симметричными и несимметричными конусами, методы редукции потенциала, методы с недопустимым стартом. Представимость одного конуса через другой, поднятия, представимость функций и ограничений, S-лемма.

3. Робастная оптимизация.

Робастный аналог конической программы, его сведение к обычной конической программе, конусы положительных отображений. Конично-квадратичные представления робастных линейных программ. Полуопределённые релаксации робастных конично-квадратичных и полуопределённых программ, матричный эллипсоид и матричный куб.

4. Приложения конического программирования. Релаксации невыпуклых задач

Описанный эллипсоид минимального объёма, вписанный эллипсоид максимального объёма, оптимизация топологии фермы, построение функций Ляпунова, построение регулятора для линейных динамических систем. Аппроксимации сложных невыпуклых задач выпуклыми. Задача о максимальном разрезе, рандомизированная процедура Гёманса-Виллиамсона, теоремы Нестерова и Немировского о качестве релаксаций задачи максимизации квадратичной формы на кубе. Релаксации комбинаторных задач. Релаксации представляющих задачу о максимальной клике коположительных программ.

5. Полиномиальная оптимизация.

Конусы положительных полиномов и сумм квадратов. Специальные случаи, в которых релаксация суммами квадратов точна. Политоп Ньютона. Релаксации полиномиальных задач, основанные на суммах квадратов. Внутренние и внешние моментные релаксации.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Выпуклая оптимизация / Е. А. Воронцова, Р. Ф. Хильдебранд, А. В. Гасников, Ф. С. Стонякин, Москва, МФТИ, 2021
2. Введение в выпуклую оптимизацию [Текст], [монография]/Ю. Е. Нестеров, -М., МЦНМО, 2010

Дополнительная литература

1. Введение в оптимизацию [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. Т. Поляк .— М. : Наука, 1983 .— 384 с.
2. Методы оптимизации [Текст]. Ч. 3 : Дополнительные главы / Жадан, В. Г. ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ,2017
3. Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Г. Бирюков ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2010 .— 225 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://cvxr.com/cvx/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

- ems.mipt.ru;
- Программы для графического планшета;
- Системы организации вебинаров.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс "Методы выпуклой оптимизации в решении выпуклых и невыпуклых задач", должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к итоговой аттестации.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: Р. Хильдебранд, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Методы выпуклой оптимизации в решении выпуклых и невыпуклых задач» обучающийся должен:

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, и методы выпуклой оптимизации;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач выпуклой и невыпуклой оптимизации;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач;
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов выпуклой оптимизации;
- ☐ предметным языком и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе выполнения студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Векторные и аффинные пространства, топология, нормы, скалярные произведения, двойственность, аффинная оболочка, относительная внутренность.
2. Выпуклые множества и конусы и операции над ними, выпуклая оболочка, расстояние до выпуклого множества.
3. Опорные плоскости, теоремы отделимости, фасады и экстремальные точки и лучи. Поляра.
4. Сложность задачи оптимизации. Пакеты программного обеспечения для решения задач.
5. Методы решения задач в размерности. Метод эллипсоидов.
6. Сложность представления полиэдра, поднятия, теорема Яннакакиса.
7. Линейные релаксации невыпуклых задач, методы решения смешанно-целочисленных ЛП, метод ветвлений и ограничений.
8. Двойственность Лежандра.
9. Аппроксимации сложных невыпуклых задач выпуклыми.
10. Задача о максимальном разрезе, рандомизированная процедура Гёманса-Виллиамсона, теоремы Нестерова и Немировского о качестве релаксаций задачи максимизации квадратичной формы на кубе.
11. Конусы положительных полиномов и сумм квадратов.

Билет 1

1. Двойственность Лежандра.
2. Опорные плоскости, теоремы отделимости, фасады и экстремальные точки и лучи. Поляра.

Билет 2

1. Конусы положительных полиномов и сумм квадратов.
2. Методы решения задач в размерности. Метод эллипсоидов.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Дифференцированный зачет проводится путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.