

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Случайные процессы
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составили:

С.А. Гуз, канд. физ.-мат. наук, доцент

А.В. Гасников, д-р физ.-мат. наук, доцент

О.Г. Горбачев, канд. физ.-мат. наук, доцент

М.Г. Широбоков, канд. физ.-мат. наук

Е.О. Черноусова, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 15.05.2020

Аннотация

В курсе излагаются основы теории случайных процессов с позиций их практического применения. Курс рассматривается в качестве основы как для дальнейшего углубленного изучения теории случайных процессов, так и для разработки методов их практического применения в физических и экономических приложениях.

Вначале излагаются фундаментальные положения теории случайных процессов. Здесь же достаточно полно рассматриваются вопросы преобразований случайных процессов в терминах сходимости в среднем квадратичном, свойства их стационарности и эргодичности, методы спектрального представления случайных процессов.

Затем обсуждаются некоторые типы случайных процессов (пуассоновский и гауссовский процессы, процессы восстановления), часто используемые в приложениях. Приведены важные для практики модификации указанных типов случайных процессов.

В третьей части курса содержатся основные сведения о марковских процессах. Наряду с подробным изложением теории дискретных марковских цепей приводятся наиболее существенные сведения о марковских цепях с непрерывным аргументом и о непрерывных марковских процессах. Рассматриваются примеры моделирования этими процессами реальных процедур и явлений (массовое обслуживание, случайное блуждание частиц).

Предполагается хорошее знакомство студентов с теорией вероятностей.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение фундаментальных основ и приложений теории случайных процессов (СП).

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний, умений, навыков в области теории СП;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении их собственных теоретических и прикладных исследований в области СП.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- ☐ фундаментальные понятия случайных процессов;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла случайных процессов;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных процессов.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить решения задач теории случайных процессов, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области теории случайных процессов в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач теории случайных процессов (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов теории случайных процессов;
- ☐ предметным языком теории случайных процессов и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Определение случайного процесса. Семейство конечномерных распределений случайного процесса.	3	2		4
2	Моментные функции случайного процесса. Корреляционная функция случайного процесса. Преобразование случайного процесса.	2	3		4
3	Пуассоновский случайный процесс. Винеровский случайный процесс.	3	3		4
4	Стационарность случайного процесса. Эргодичность случайного процесса по математическому ожиданию в среднем квадратичном.	2	3		4
5	Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайного процесса в среднем квадратичном.	2	4		4
6	Спектральное представление стационарного случайного процесса.	3	2		5
7	Марковский случайный процесс.	2	2		5
8	Однородные дискретные марковские цепи.	7	5		5

9	Марковская цепь с непрерывным аргументом.	3	3		5
10	Непрерывный марковский процесс.	3	3		5
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Определение случайного процесса. Семейство конечномерных распределений случайного процесса.

Сечение случайного процесса (СП), реализация СП, цилиндрическое множество, вероятностное пространство для СП, стохастическая эквивалентность для СП, теорема Колмогорова.

2. Моментные функции случайного процесса. Корреляционная функция случайного процесса. Преобразование случайного процесса.

СП второго порядка, свойства корреляционной функции СП взаимная корреляционная функция СП и её свойства.

3. Пуассоновский случайный процесс. Винеровский случайный процесс.

Свойства пуассоновского СП, семейство конечномерных распределений пуассоновского СП, корреляционная функция пуассоновского СП, свойства реализации пуассоновского СП, процесс восстановления, сложный пуассоновский СП, процесс с переменной интенсивностью. Свойство винеровского СП, гауссовский СП, семейство конечномерных распределений и корреляционная функция винеровского СП. Расчет моментных характеристик гауссовского СП.

4. Стационарность случайного процесса. Эргодичность случайного процесса по математическому ожиданию в среднем квадратичном.

Строгая и слабая стационарность. Свойства корреляционной функции стационарного СП, понятие эргодичности. необходимое и достаточное условие эргодичности по математическому ожиданию в среднем квадратическом, достаточное условие эргодичности, теорема Слуцкого.

5. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайного процесса в среднем квадратичном.

Непрерывность СП по вероятности в среднем квадратическом, с вероятностью единица. Необходимые и достаточные условия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости (по Риману и Стильтесу) СП в среднем квадратическом.

6. Спектральное представление стационарного случайного процесса.

Комплекснозначный СП, его корреляционная функция. Процесс с однозначными приращениями. Спектральное представление стационарного СП. Теорема Бохнера-Хинчина о спектральном представлении корреляционной функции СП. Спектральная функция и спектральная плотность СП и их свойства. СП типа «белый шум».

7. Марковский случайный процесс.

Определение и свойства, классификация. Переходные вероятности. Корреляционная функция гауссовского СП, обладающего марковским свойством.

8. Однородные дискретные марковские цепи.

Стохастическая матрица. Уравнения Колмогорова-Чепмена, использование производящих функций для расчета статистических свойств однородных дискретных марковских цепей. Классификация состояний таких цепей и их свойства. Теорема «солидарности». Асимптотическое поведение однородной дискретной марковской цепи. Предельное и стационарное распределение вероятностей её состояний. Теорема об эргодичности.

9. Марковская цепь с непрерывным аргументом.

Инфинитезимальная матрица. Прямое и обратное уравнение Колмогорова-Феллера.

10. Непрерывный марковский процесс.

Обобщённое уравнение Маркова. Коэффициенты сноса и диффузии. Прямое и обратное уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка. Броуновское движение (винеровский процесс).

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и экраном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вероятность [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов / А. Н. Ширяев . — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МЦНМО, 2004 . — Т. 1 : Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. - 2004. - 520 с.
2. Теория случайных процессов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] . — М. : Физматлит, 2005 . — 402 с.
3. Основы теории случайных процессов [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Натан, О. Г. Горбачев, С. А. Гуз . — М. : МЗ-Пресс, 2003, 2004 . — 168с.

Дополнительная литература

1. Вероятность, процессы, статистика. Задачи с решениями [Текст] : учеб. пособие для вузов / Г. П. Климов, А. Д. Кузьмин . — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1985 . — 232 с.
2. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Текст] : [учеб. пособия для вузов] / Б. М. Миллер, А. Р. Панков; под ред. А. И. Кибзуна . — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002 . — 320 с.
3. Курс теории вероятностей [Текст] : учебник для вузов : доп. М-вом образования Рос. Федерации / Б. В. Гнеденко ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова . — 8-е изд., испр. и доп. — М. : Едиториал УРСС, 2005 . — 448 с.
4. Задачи по теории вероятностей : основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы [Текст] : учеб. пособие для ун-тов / А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков . — М. : Наука, 1986 . — 328 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.mou.mipt.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не предусмотрено.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс "Случайные процессы", должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания;
- подготовку к практическим занятиям, экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

Литература для самостоятельной работы:

1. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1996. – 320 с
2. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. – М.: Мир. 1969. – 400 с.
3. Натан А.А. Случайный вектор. Учебно-методическое пособие. – М.: МФТИ, 2003. – 29 с.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Разработчики:

С.А. Гуз, канд. физ.-мат. наук, доцент
А.В. Гасников, д-р физ.-мат. наук, доцент
О.Г. Горбачев, канд. физ.-мат. наук, доцент
М.Г. Широбоков, канд. физ.-мат. наук
Е.О. Черноусова, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Случайные процессы» обучающийся должен:

знать:

- ☐ фундаментальные понятия случайных процессов;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла случайных процессов;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных процессов.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить решения задач теории случайных процессов, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области теории случайных процессов в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач теории случайных процессов (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов теории случайных процессов;
- ☐ предметным языком теории случайных процессов и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Курсовые задания

Задания по курсу формируются из задач учебно-методического пособия

Случайные процессы / А.А. Натан, О.Г. Горбачев, С.А. Гуз, Е.В. Бурнаев, А.В.

Гасников. – М.: МФТИ, 2006.

Перечень теоретических контрольных вопросов для сдачи экзамена /задания.

1. Сечение случайного процесса (СП), реализация СП, цилиндрическое множество, вероятностное пространство для СП, стохастическая эквивалентность для СП, теорема Колмогорова.
2. СП второго порядка, свойства корреляционной функции СП взаимная корреляционная функция СП и её свойства.
3. Свойства пуассоновского СП, семейство конечномерных распределений пуассоновского СП, корреляционная функция пуассоновского СП, свойства реализации пуассоновского СП, процесс восстановления, сложный пуассоновский СП, процесс с переменной интенсивностью.
4. Свойство винеровского СП, гауссовский СП, семейство конечномерных распределений и корреляционная функция винеровского СП. Расчет моментных характеристик гауссовского СП.
5. Строгая и слабая стационарность. Свойства корреляционной функции стационарного СП, понятие эргодичности. необходимое и достаточное условие эргодичности по математическому ожиданию в среднем квадратическом, достаточное условие эргодичности, теорема Слуцкого.
6. Непрерывность СП по вероятности в среднем квадратическом, с вероятностью единица. Необходимые и достаточные условия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости (по Риману и Стильесу) СП в среднем квадратическом.
7. Комплекснозначный СП, его корреляционная функция. Процесс с ортозначными приращениями. Спектральное представление стационарного СП. Теорема Бохнера-Хинчина о спектральном представлении корреляционной функции СП. Спектральная функция и спектральная плотность СП и их свойства. СП типа «белый шум».
8. Определение и свойства, классификация. Переходные вероятности. Корреляционная функция гауссовского СП, обладающего марковским свойством.
9. Стохастическая матрица. Уравнения Колмогорова-Чепмена, использование производящих функций для расчета статистических свойств однородных дискретных марковских цепей. Классификация состояний таких цепей и их свойства. Теорема «солидарности». Асимптотическое поведение однородной дискретной марковской цепи. Предельное и стационарное распределение вероятностей её состояний. Теорема об эргодичности.
10. Инфинитезимальная матрица. Прямое и обратное уравнение Колмогорова-Феллера.
11. Обобщённое уравнение Маркова. Коэффициенты сноса и диффузии. Прямое и обратное уравнение Колмогорова-Фоккера-Планка. Броуновское движение (винеровский процесс).

Пример семестровой контрольной работы:

1. Пусть $X(t) = U \sin t$, где $t \in [0, \infty)$, а случайная величина U принимает значения -1 и 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Найти

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, \pi/4]} X(t) > \frac{1}{2} \right\}.$$

2. Предположим, что временные интервалы между последовательными приходами в магазин покупателей - независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ . Пусть τ_n - момент появления n -го покупателя. Найдите распределение τ_n . Если покупатели приходят с интенсивностью три человека в минуту, то какова вероятность того, что число покупателей, пришедших за первые две минуты, равно трём?

3. Пусть X_n - стационарная в широком смысле последовательность со средним a и корреляционной функцией $R(n)$. При каком условии на $R(n)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = a$?

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся по итогам обучения

Промежуточная аттестация по дисциплине «Случайные процессы» осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

Типовые вопросы и темы совпадают с приведенными в п.3.

Пример экзаменационного билета:

1. Винеровский случайный процесс.
2. № 53:

Дискретная марковская цепь имеет следующую матрицу вероятностей перехода за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Найти матрицу вероятностей перехода за n шагов и предел при $n \rightarrow \infty$.

Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение <u>уверенно</u> применять их на практике при решении конкретных задач, <u>свободное</u> и правильное обоснование принятых решений
	9	оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, <u>свободное</u> и правильное обоснование принятых решений
	8	оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
хорошо	7	оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он <u>твёрдо</u> знает материал, <u>грамотно</u> и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
	6	оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, <u>грамотно</u> и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
	5	оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
удовлетворительно	4	оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
	3	оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный

		<i>характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет <u>фрагментарно</u> основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;</i>
неудовлетворительно	2	<i>оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач</i>
	1	

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также калькулятором (при необходимости).

Экзамен проводится в устной форме. Успешная сдача заданий является необходимым условием допуска к экзамену. В противном случае, прежде чем приступить к сдаче экзамена студент получает дополнительные задачи по темам несданного задания.