

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория разностных схем
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математического моделирования и прикладной математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

7 (осенний) - Зачет

8 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 105 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Программу составил: Б.В. Рогов, д-р физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры математического моделирования и прикладной математики
03.03.2020

Аннотация

Курс "Теория разностных схем" посвящен ознакомлению с некоторыми разностными схемами для краевых и начально-краевых задач математической физики. Вводится понятие разностной схемы, а также ее аппроксимации, устойчивости и сходимости. Рассматривается ряд задач, посвященных построению и реализации разностных схем.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

изучение основных понятий, математического аппарата и методов теории разностных схем – одного из фундаментальных разделов вычислительной математики.

Задачи дисциплины

- освоение студентами основными теоретическими понятиями вычислительной математики – аппроксимацией, устойчивостью, сходимостью, консервативностью, монотонностью и экономичностью конечно-разностных схем;
- приобретение фундаментальных знаний для корректной постановки вычислительных задач для основных уравнений математической физики;
- овладение студентами современными методами конструирования разностных схем с требуемыми свойствами;
- овладение студентами современными численными методами решения разностных схем;
- овладение студентами математическим аппаратом теории разностных схем для численного анализа дискретных уравнений математической физики, полученных конечно-разностными, вариационными и проекционными методами;
- приобретение практических знаний для оценки точности результатов расчётов, овладение методиками получения численных решений с гарантированной точностью.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ фундаментальные понятия вычислительной математики;
- ☐ современные методы построения дискретных моделей математической физики конечно-разностными методами, вариационными и проекционными методами;
- ☐ математический аппарат численного анализа дискретных уравнений математической физики.

уметь:

- ☐ построить для основных уравнений математической физики разностную схему с требуемыми свойствами;
- ☐ корректно поставить вычислительную задачу для основных уравнений математической физики;
- ☐ исследовать разностные схемы на аппроксимацию, устойчивость, сходимость, монотонность;
- ☐ эффективно решать на ЭВМ дискретные уравнения математической физики;
- ☐ производить численные оценки точности результатов расчётов;
- ☐ пользоваться своими знаниями для решения фундаментальных, прикладных и технологических задач.

владеть:

- ☐ навыками построения эффективных алгоритмов численного решения уравнений математической физики;
- ☐ способностью корректно поставить вычислительные задачи;
- ☐ методикой исследования основных свойств дискретных математических моделей;
- ☐ методикой проведения расчётов с гарантированной точностью;
- ☐ навыками самостоятельной работы.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Основные понятия теории разностных схем. Однородные разностные схемы. Методы построения разностных схем.	18	9		15
2	Разностные схемы для параболических уравнений.	6	3		15
3	Разностные схемы для эллиптических уравнений.	6	3		15
4	Компактные разностные схемы. Метод дифференциального приближения.	4	2		6
5	Методика расчётов с гарантированной точностью. Методы решения сеточных уравнений.	8	4		9
6	Общая теория устойчивости разностных схем.	8	4		15
7	Разностные схемы для гиперболических уравнений.	4	2		15
8	Экономичные разностные схемы.	6	3		15
Итого часов		60	30		105
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Основные понятия теории разностных схем. Однородные разностные схемы. Методы построения разностных схем.

Сетки и сеточные функции. Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов. Погрешность аппроксимации на сетке. Постановка разностной задачи. Повышение порядка аппроксимации разностной схемы. Аппроксимация краевых и начальных условий.

Разностные уравнения второго порядка. Краевая задача. Метод прогонки, устойчивость прогонки. Принцип максимума для разностного уравнения второго порядка.

Формулы "разностного дифференцирования" произведения и суммирования по частям. Разностные формулы Грина. Пространства сеточных функций, разностные операторы. Условие самосопряжённости разностного оператора второго порядка.

Отыскание собственных функций и собственных значений разностного оператора второго порядка на равномерной сетке. Разностные аналоги теорем вложения. Метод энергетических неравенств.

Понятие устойчивости разностной схемы. Понятие корректности, сходимости и точности разностных схем.

Разностные схемы как операторные уравнения. Устойчивость, аппроксимация и сходимость. Априорные оценки. Негативные нормы.

Понятие об однородных разностных схемах. Трёхточечные схемы. Условие второго порядка аппроксимации.

Консервативные разностные схемы. Пример схемы, расходящейся в классе разрывных коэффициентов. Интегро-интерполяционный метод.

Однородные консервативные разностные схемы. Сходимость и точность консервативных однородных схем на равномерных сетках.

Однородные разностные схемы на неравномерных сетках. Порядок точности на неравномерных сетках. Монотонные схемы.

Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод для задачи с сосредоточенным источником тепла. Методы Рунге и Галеркина. Метод сумматорных тождеств. Метод аппроксимации квадратичного функционала. Понятие о методе конечных элементов.

2. Разностные схемы для параболических уравнений.

Схемы для одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Постановка задачи. Семейство шеститочечных схем. Устойчивость по начальным данным и правой части. Сходимость и точность.

Асимптотическая устойчивость разностных схем для уравнения теплопроводности.

Однородные разностные схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Устойчивость и сходимость схем с весами.

3. Разностные схемы для эллиптических уравнений.

Разностная аппроксимация оператора Лапласа на регулярном и нерегулярном шаблоне "крест". Разностная задача Дирихле в прямоугольнике и в области сложной формы.

Каноническая форма разностного уравнения. Принцип максимума. Теоремы сравнения. Мажоранта. Оценка решения неоднородного уравнения.

Сходимость и точность разностной задачи Дирихле. Повышение порядка точности, схемы для уравнения Пуассона.

Семестр: 8 (Весенний)

4. Компактные разностные схемы. Метод дифференциального приближения.

Компактные разностные схемы для уравнения теплопроводности и уравнения переноса. Бикомпактные схемы.

Метод дифференциального приближения разностных схем на примере линейного уравнения переноса. Дисперсия и диссипация схем.

5. Методика расчётов с гарантированной точностью. Методы решения сеточных уравнений.

Методика расчётов с гарантированной точностью. Экстраполяция Ричардсона.

Итерационные методы. Двухслойные итерационные схемы. Итерационные методы простой итерации, Зейделя и верхней релаксации. Условие сходимости стационарных итерационных методов.

Явная итерационная схема с чебышевским набором параметров (ЧНП). Устойчивость схемы с ЧНП и упорядочивание набора итерационных параметров.

Неявный итерационный метод с ЧНП. Попеременно-треугольный метод (ПТМ).

Итерационные методы вариационного типа.

6. Общая теория устойчивости разностных схем.

Классы устойчивых двухслойных схем. Исходное семейство схем. Энергетическое тождество. Устойчивость по начальным данным в НА и НВ. Оценка нормы оператора перехода.

Метод разделения переменных. Устойчивость по правой части, \square -устойчивость. Случай переменного оператора A , кососимметричного оператора A .

Устойчивость по начальным данным трёхслойной разностной схемы. Примеры исследования устойчивости трёхслойных схем.

7. Разностные схемы для гиперболических уравнений.

Уравнение переноса. Явные схемы для задачи Коши. Повышение порядка аппроксимации. Схемы для начально-краевой задачи.

Разностные схемы для уравнения колебаний струны. Постановка задачи, аппроксимация, устойчивость. Метод энергетических неравенств.

8. Экономичные разностные схемы.

Экономичные разностные схемы. Экономичные факторизованные схемы: основные понятия и методы построения схем. Метод переменных направлений для уравнения теплопроводности (продольно поперечная схема).

Метод суммарной аппроксимации. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности в произвольной области.

Эволюционная и двойная факторизация на примере разностной схемы для уравнения теплопроводности.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций и практических занятий: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, звуковая система)

Обеспечение самостоятельной работы - базы данных по журналам Web of Science.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в теорию разностных схем [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. А. Самарский .— М : Наука, 1971 .— 552 с.
2. Теория разностных схем [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский .— 3-е изд., испр. — М. : Наука, 1989 .— 612 с.
3. Численные методы [Текст] : в 2 кн. : учебник для вузов / Н. Н. Калиткин, Е. А. Альшина .— М. : Академия, 2013 .— (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика) .— Кн. 1 : Численный анализ. - 2013. - 304 с.
4. Методы вычислительной математики [Текст] : учебное пособие для студ.вузов ; доп.М-вом высш.и сред.обр.СССР / Г. И. Марчук .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1980 .— 536 с.

Дополнительная литература

1. Введение в вычислительную математику [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. С. Рябенский .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2008 .— 288 с.
2. Разностные методы повышенной точности для задач аэрогидродинамики [Текст] : уч. пособие для вузов : утв. Учеб. советом / А. И. Толстых ; М-во высш. и сред. спец. образов. РСФСР, Моск. физико-техн. ин-т .— М. : МФТИ, 1985 .— 84 с.
3. Методы вычислений [Текст] : в 2 т. : учеб. пособие для вузов. Т. 2 / И. С. Березин, Н. П. Жидков .— М. : Физматгиз, 1960 .— 620 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

http://mipt.ru/study/net_libr/
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

http://mipt.ru/study/net_libr/
<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/>

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к экзамену и зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математического моделирования и прикладной математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

7 (осенний) - Зачет

8 (весенний) - Экзамен

Разработчик: Б.В. Рогов, д-р физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория разностных схем» обучающийся должен:

знать:

- ☐ фундаментальные понятия вычислительной математики;
- ☐ современные методы построения дискретных моделей математической физики конечно-разностными методами, вариационными и проекционными методами;
- ☐ математический аппарат численного анализа дискретных уравнений математической физики.

уметь:

- ☐ построить для основных уравнений математической физики разностную схему с требуемыми свойствами;
- ☐ корректно поставить вычислительную задачу для основных уравнений математической физики;
- ☐ исследовать разностные схемы на аппроксимацию, устойчивость, сходимости, монотонность;
- ☐ эффективно решать на ЭВМ дискретные уравнения математической физики;
- ☐ производить численные оценки точности результатов расчётов;
- ☐ пользоваться своими знаниями для решения фундаментальных, прикладных и технологических задач.

владеть:

- ☐ навыками построения эффективных алгоритмов численного решения уравнений математической физики;
- ☐ способностью корректно поставить вычислительные задачи;
- ☐ методикой исследования основных свойств дискретных математических моделей;
- ☐ методикой проведения расчётов с гарантированной точностью;
- ☐ навыками самостоятельной работы.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 8 семестре:

1. Разностные аналоги теорем вложения. Показать, что для сеточных функций из класса $\dot{\Omega}[0, l]$ справедливо неравенство $\|y\|_c \leq \frac{\sqrt{l}}{2} \|y_{\bar{x}}\|$.
2. Двухслойные схемы для решения одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Аппроксимация. Устойчивость по начальным данным и правой части.
3. Разностные аналоги формул Грина. Получить на ω_h равенство $(z, \Lambda y) = -(ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}})$,
где $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x$, а $z_0 = z_N = 0$.

4. Понятие консервативности разностной схемы на примере однородной схемы для задачи

$$(ku')' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0,$$

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 < x < \xi, \\ k_2, & \xi < x < 1, \end{cases} \quad k_1 \neq k_2.$$

Сходится ли к решению при $h \rightarrow 0$ схема ($x_i = ih$, $hN = 1$):

$$ky_{\bar{x}x} + k_x y_x = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_N = 0 \quad ?$$

5. Сформулируйте принцип максимума для разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле в многомерном случае

$$\Delta u = -f(x), \quad \Delta = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}, \quad p \geq 2$$

и изложите идею доказательства..

6. Сформулируйте понятие и укажите необходимые и достаточные условия p -устойчивости для двухслойной схемы

$$By_t + Ay = 0.$$

7. Уравнение переноса. Явные схемы для задачи Коши. Повышение порядка аппроксимации. Схемы для начально-краевой задачи.
8. Получите оценку $\|y\|_c \leq M \|\varphi\|_c$ для задачи

$$y_{\bar{x}x} = -\varphi, \quad y_0 = y_N = 0.$$

9. Приведите достаточные условия устойчивости двухслойных схем в линейных нормированных пространствах. Связь устойчивости по начальным данным и по правой части.
10. Постройте экономичную разностную схему для следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + f(x_1, x_2)$$

в прямоугольнике $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ для $0 < t \leq T$ с условиями $u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2)$, $u|_{\Gamma} = 0$. Укажите способ нахождения решения по такой схеме.

11. Оцените погрешность аппроксимации и исследуйте устойчивость схемы

$$(E - \sigma\tau\Lambda_1)(E - \sigma\tau\Lambda_2)y_t = \Lambda y - (2\sigma - 1)\tau\Lambda_1\Lambda_2 y,$$

где $\Lambda_1 y = y_{\bar{x}_1 x_1}$, $\Lambda_2 y = y_{\bar{x}_2 x_2}$, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, σ - число,

применяемой для решения уравнения теплопроводности в прямоугольнике

$0 < x_\alpha < l_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ с условиями $u|_\Gamma = \mu(x)$, $u(x, 0) = u_0(x)$.

12. Сформулируйте необходимые и достаточные условия устойчивости двухслойной схемы $B y_t + A y = \varphi$ по начальным данным в гильбертовом пространстве (A и B – перестановочны).
13. Сформулируйте принцип максимума для системы трёхточечных разностных уравнений $\Lambda[y_i] \equiv A_i y_{i-1} - C y_i + B y_{i+1} = -F_i$, $i = \overline{1, N-1}$, $y_0 = \mu_1$, $y_N = \mu_2$. Как с его помощью доказать теорему сравнения.
14. Достаточные условия устойчивости двухслойных схем по правой части в гильбертовом пространстве.
15. Разностные схемы для эллиптических уравнений в области сложной формы.

Шаблон и аппроксимация для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + f(x_1, x_2) = 0,$$

$$(0 < c_1 \leq k(x_1, x_2) \leq c_2).$$

16. Итерационная схема как метод установления. Явная схема простой итерации, методы Зейделя и верхней релаксации.
17. Двухслойная итерационная схема с чебышевским набором параметров, её скорость сходимости.
18. Неявная схема простой итерации. Выбор оптимального значения итерационного параметра для самосопряжённого оператора A . Условие сходимости стационарной итерационной схемы $B y_t + A y = \varphi$, где B , A , τ не зависят от номера итерации.
19. Для схемы

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \sigma A y^{n+1} + (1 - \sigma) A y^n = \varphi^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 - \text{задано}, \quad A > 0, \quad A \neq A^*$$

указать достаточные условия устойчивости. Как выбирать параметр σ ?

20. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности в произвольной области. Погрешность аппроксимации, устойчивость и точность этой схемы.
21. Укажите оптимальное значение параметра τ для итерационной схемы

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + A y_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 - \text{задано},$$

при заданных $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$, если

$$\delta_1 E \leq A \leq \Delta_1 E, \quad \delta_2 E \leq B \leq \Delta_2 E, \quad \delta_1, \delta_2 > 0.$$

22. Укажите условия устойчивости схемы $B y_t + A y = \varphi$ с переменными операторами $B(t)$ и $A(t)$. Как выглядит оценка решения, если $B(t) \geq \varepsilon E + 0.5\tau A(t)$ для всех $t \in \omega_\tau$, $0 < \varepsilon < 1$?
23. Каноническая форма записи двухслойной разностной схемы и условия её устойчивости.
24. Каноническая форма записи трёхслойной разностной схемы и условия её устойчивости по начальным данным.

25. Итерационные схемы вариационного типа (методы минимальных невязок и поправок, метод скорейшего спуска и метод сопряжённых градиентов), их области применимости и скорости сходимости.

26. Сформулируйте достаточные условия устойчивости по начальным данным для трёхслойных схем.

27. Найти собственные функции и собственные значения разностной задачи

$$y_{\bar{x}x} + \lambda y = 0, \quad x = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad hN = l, \quad y_0 = y_N = 0.$$

28. Приведите достаточные условия консервативности трёхточечной разностной схемы для задачи

$$(ku')' - qu = -f, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad k \geq c_1 > 0, \quad q \geq 0,$$

$$k \in C^3[0, 1], \quad q \in C^2[0, 1].$$

29. . Исследуйте устойчивость следующих трёхслойных схем

$$y_t + Ay = 0 \quad \text{и} \quad y_t + \kappa \tau^2 y_{\bar{t}\bar{t}} + Ay = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

с условиями $A = A^* > 0$, $y(x, 0) = u_0(x)$, $y(0) = y(1) = 0$. В качестве примера рассмотрите схемы Рундсона и Дюфорта-Франкела.

30. Установите сходимость и оцените порядок аппроксимации и точности разностной схемы

$$y_{\bar{x}\bar{x}} = -\varphi, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2$$

на неравномерной сетке $\bar{\omega}_h[0, 1]$ для задачи

$$u'' = -\varphi, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2$$

на отрезке $0 \leq x \leq 1$.

31. Сформулируйте теорему сравнения решений систем трёхточечных разностных уравнений, подчиняющихся принципу максимума.

32. Построить консервативную однородную разностную схему для задачи

$$(ku')' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1,$$

$$k(x) = \begin{cases} 4, & 0 < x < 0.5, \\ 5, & 0.5 < x < 1. \end{cases}$$

Вычислить коэффициенты \bar{a}_i для наилучшей схемы.

33. Оцените решение разностной задачи

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad y_0 = y_N = 0$$

через правую часть в двух случаях

$$1) |A_i| > 0, |B_i| > 0, \bar{D}_i = |C_i| - |A_i| - |B_i| > 0;$$

$$2) |A_i| > 0, B_i = A_{i+1}, |C_i| \geq |A_i| + |B_i|.$$

34. Методом энергетических неравенств установить оценку для решения разностной консервативной однородной схемы, аппроксимирующей задачу

$$(ku')' - qu = -f, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad k \geq c_1 > 0, \quad q \geq 0$$

на сетке $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N, h = 1/N\}$.

35. Определить погрешность аппроксимации на неравномерной сетке дифференциального оператора второй производной, используя для этого две нормы:

1) сеточный аналог нормы в пространстве L_2 ;

2) негативную норму.

36. Для разностного уравнения

$$\Lambda[y_i] \equiv A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i$$

сформулировать принцип максимума и показать, что если $\Lambda[y_i] \leq 0$ для $i = 1, N-1$ и

$y_0 \geq 0, y_N \geq 0$, то $y_i \geq 0$ для всех i .

37. Получить оценку $\|y\|_c \leq 0.5 \|f\|_{(-1)}$ для решения задачи $y_{xx} + f(x) = 0$ на

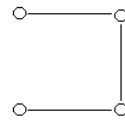
отрезке $[0, 1]$ с граничными условиями $y_0 = y_N = 0$ на неравномерной сетке $\hat{\omega}_h$ с помощью негативной нормы

$$\|f\|_{(-1)} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=i}^{N-1} h_k f_k \right)^2 \right]^{1/2}.$$

38. Для разностного оператора

$$\Lambda u = A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1}$$

найти необходимые и достаточные условия самосопряжённости $\Lambda = \Lambda^*$.



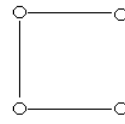
39. Для уравнения $u_t + cu_x = f, c > 0$ составить схему на шаблоне и исследовать аппроксимацию и устойчивость.

40. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + cu = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad c \geq 0,$$

$$u(0) = a, \quad u(1) = b,$$

интегро-интерполяционным методом на трехточечном шаблоне с постоянным шагом построить схему четвертого порядка аппроксимации.



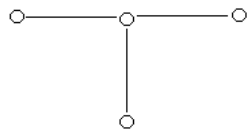
41. Для уравнения $u_t + cu_x = f, c > 0$ составить схему на шаблоне и исследовать аппроксимацию и устойчивость.

42. Дана дифференциальная задача

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + cu = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

При каких c для решения этой задачи применим метод Рунге? Построить схему.



43. Для уравнения $u_t + cu_x = f, c > 0$ составить схему на шаблоне и исследовать аппроксимацию и устойчивость.

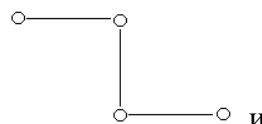
44. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) = 1, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad a(x) = \begin{cases} 3/2, & 0 \leq x < \pi/4, \\ 2, & \pi/4 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

построить разностную схему методом Рунге, взяв кусочно-линейные функции в качестве базисных.

45. Для уравнения $u_t + cu_x = f$, $c > 0$ составить схему на шаблоне исследовать аппроксимацию и устойчивость.



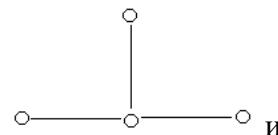
46. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) + b(x)u = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad a(x) > 0, \quad b(x) > 0,$$

на равномерной сетке построить разностную схему методом аппроксимации функционала.

47. Для уравнения $u_t + cu_x = f$, $c > 0$ составить схему на шаблоне исследовать аппроксимацию и устойчивость.



48. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) = 1, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad a(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi/5, \\ 1/3, & \pi/5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

построить разностную схему методом Галеркина, взяв кусочно-линейные функции в качестве базисных.

49. Исследовать порядок аппроксимации и устойчивость разностной схемы

$$\frac{\hat{y}_i - \check{y}_i}{2\tau} = \frac{y_{i+1} - (\hat{y}_i + \check{y}_i) + y_{i-1}}{h^2}, \quad x \in (0, 1),$$

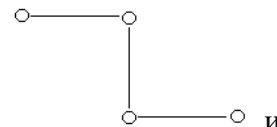
$$y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(1, t) = \mu_2(t), \quad y(x, 0) = u_0(x).$$

50. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + a \frac{du}{dx} + cu = 1, \quad x \in [0, 1], \quad c \geq 0,$$

$$u(0) = u(1) = 1,$$

построить разностную схему методом Галеркина, взяв кусочно-линейные функции в качестве базисных.



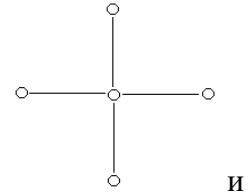
51. Для уравнения $u_t = \alpha u_{xx} + f$ составить схему на шаблоне исследовать аппроксимацию и устойчивость.

52. Для дифференциальной задачи

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du}{dx} \right) + b(x)u + c(x)u = f(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad a(x) > 0, \quad c(x) > 0,$$

на равномерной сетке построить разностную схему методом сумматорного тождества.



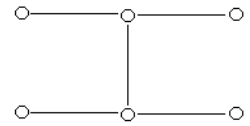
53. Для уравнения $u_t = \alpha u_{xx} + f$ составить схему на шаблоне исследовать аппроксимацию и устойчивость.

54. Для задачи

$$u'' - 5u = 6, \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) - 3u(1) = 1,$$

построить схему второго порядка аппроксимации на двухточечном шаблоне и предложить устойчивый метод для решения разностных уравнений.



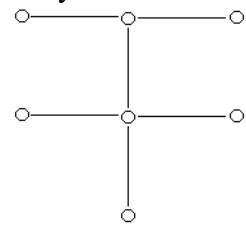
55. Для уравнения $u_t = \alpha u_{xx} + b u_x + f$ составить схему на шаблоне исследовать аппроксимацию и устойчивость.

56. Для задачи

$$u'' - 5u = 6, \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 1,$$

построить схему четвертого порядка аппроксимации на двухточечном шаблоне.



57. Для уравнения $u_t = c^2 u_{xx} + f$ составить схему на шаблоне исследовать аппроксимацию и устойчивость.

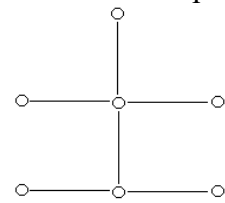
58. Построить однородную разностную схему для задачи

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - qu = -f, \quad x \in (0,1),$$

$$q = \frac{3}{2}, \quad f = 5, \quad u(0) = 6, \quad u'(1) = 1,$$

$$\frac{du}{dx}(\xi - 0) = 4 \frac{du}{dx}(\xi + 0), \quad \xi = \frac{1}{3}.$$

Указать порядок сходимости (с обоснованием) схемы в сеточных нормах L_2 и C .

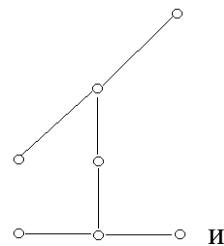


59. Для уравнения $u_t = c^2 u_{xx} + f$ составить схему на шаблоне исследовать аппроксимацию и устойчивость.

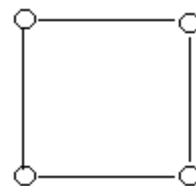
60. Привести к каноническому виду схему

$$2\gamma y_i^{j+1} = \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)(y_{i-1}^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}) + \frac{1}{2}(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j), \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}.$$

и исследовать её устойчивость.



61. Для уравнения $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f$ составить схему на шаблоне исследовать аппроксимацию и устойчивость.
62. Привести к каноническому виду схему
- $$10y_i^{j+1} = 3(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + 2(y_i^j + y_i^{j-1}),$$
- $$0 < i < N, \quad y_0 = y_N = 0, \quad \tau/h^2 = 1/4$$
- и исследовать её устойчивость.

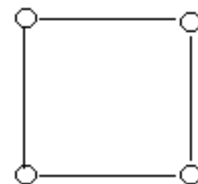


63. Для уравнения $u_t = \kappa u_{xx} + f$ составить схему на шаблоне четвёртого порядка аппроксимации по пространственной переменной x и первого - по временной переменной t . Указать условия устойчивости схемы.
64. Получить условия асимптотической устойчивости схемы

$$\frac{1}{\tau}(\hat{y}_i - y_i) = \frac{\kappa}{h^2} [\sigma(\hat{y}_{i-1} - 2\hat{y}_i + \hat{y}_{i+1}) + (1 - \sigma)(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})], \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$\kappa = \text{const} > 0, \quad \sigma = \text{const}.$$

для решения уравнения теплопроводности.



65. Для уравнения $u_t + cu_x = f$, $c = \text{const}$ составить схему на шаблоне второго порядка аппроксимации по пространственной переменной x и первого - по временной переменной t . Исследовать устойчивость схемы и её монотонность (по Фридрихсу).
66. Исследуйте устойчивость явной разностной схемы Рундсона

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2\tau} + (\Lambda y^n)_i = \varphi_i^n, \quad \Lambda y_i = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}),$$

$$i = \overline{1, N-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

На основе регуляризации этой разностной схемы за счет возмущения диагональной части сеточного оператора Λ постройте безусловно устойчивую явную разностную схему (схему Дюфорты и Франкеля) и исследуйте её сходимость.

67. Для задачи Коши для линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

построить разностные схемы и исследовать их на сходимость, используя шаблоны:

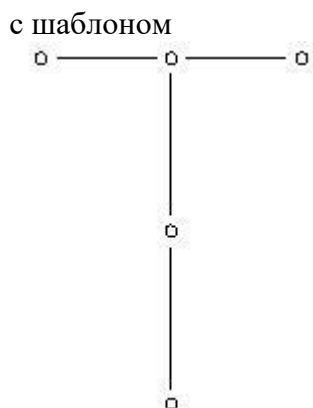


Получить условия монотонности сходящихся схем по Фридрихсу.

68. Исследовать на устойчивость и аппроксимацию трехслойную схему

$$\frac{1,5(u_i^{n+1} - u_i^n)}{\tau} + \frac{0,5(u_i^n - u_i^{n-1})}{h} = \Lambda u_i^{n+1},$$

$$\Lambda u_i = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}).$$



Является ли схема монотонной (по Фридрихсу) ?

4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при

		решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых

		практических задач.
--	--	---------------------

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой.

Экзамен проводится путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.