

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Стохастические дифференциальные уравнения
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составил: А.В. Булинский, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 15.05.2020

## Аннотация

Прежде всего, студентам предлагается спектр задач, приводящих к необходимости решать стохастические дифференциальные уравнения - стохастические аналоги

обыкновенных дифференциальных уравнений: стохастические модели, возникающие в физике, технике, биологии и финансовой математике.

Вводится необходимый вспомогательный математический аппарат. Условное математическое ожидание и его свойства (линейность, "телескопичность", неравенство Йенсена и др.). Фильтрованные вероятностные пространства. Моменты остановки, их свойства, примеры. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы с дискретным и непрерывным временем. Фундаментальные неравенства. Теоремы о сходимости. Локальные мартингалы и семимартингалы. Разложение Дуба–Мейера. Непрерывные и квадратично интегрируемые мартингалы.

Далее обсуждается броуновское движение (винеровский процесс), его различные конструкции и поведение траекторий: недифференцируемость с вероятностью единица, локальные максимумы, точки роста, а также варианты марковского и строго марковского свойства броуновского движения (семейства), процессы Бесселя, фрактальное броуновское движение.

Подробно рассматривается стохастическое исчисление: построение интеграла Ито, свойства интеграла, интеграл Стратоновича, - и стохастические дифференциальные уравнения. В частности, сильные и слабые решения, проблемы существования и единственности решений, марковское свойство сильного решения стохастического дифференциального уравнения, теорема Энгельберта–Шмидта.

Отдельно обсуждаются детали применения стохастических дифференциальных уравнений: проблемы фильтрации, задача об оптимальной остановке, стохастическое управление, диффузионная модель цены акций, оптимальные инвестиции и потребление.

В заключение рассматривается проблематика стохастических дифференциальных уравнений в частных производных и некоторые методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Формирование у студентов знаний и навыков работы с понятиями, концепциями стохастических дифференциальных уравнений (СтохДУ) и их приложений.

### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний в области СтохДУ и методов их решения;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических и прикладных исследований в области СтохДУ.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

<p>решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты</p>	<p>ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели</p>
	<p>ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты</p>

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории СтохДУ;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов математики – СтохДУ;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла СтохДУ;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов – СтохДУ;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы решения типовых прикладных задач СтохДУ.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач СтохДУ;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач СтохДУ, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области СтохДУ в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач СтохДУ (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих использования математических подходов теории и методов решения СтохДУ;
- ☐ предметным языком теории СтохДУ и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Источники. СтохДУ. Вспомогательный математический аппарат. Броуновское движение (винеровский процесс). Стохастическое исчисление.	10			5
2	Стохастические дифференциальные уравнения. Применения стохастических дифференциальных уравнений.	10			5
3	Дальнейшие исследования СтохДУ.	10			5

Итого часов	30			15
Подготовка к экзамену	0 час.			
Общая трудоёмкость	45 час., 1 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Источники. СтохДУ. Вспомогательный математический аппарат. Броуновское движение (винеровский процесс). Стохастическое исчисление.

Некоторые задачи, приводящие к стохастическим аналогам обыкновенных дифференциальных уравнений (стохастические модели, возникающие в физике, технике, биологии и финансовой математике).

Условное математическое ожидание и его свойства (линейность, "телескопичность", неравенство Иенсена и др.). Фильтрованные вероятностные пространства. Моменты остановки, их свойства, примеры. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы с дискретным и непрерывным временем. Фундаментальные неравенства. Теоремы о сходимости. Локальные мартингалы и семимартингалы. Разложение Дуба–Мейера. Непрерывные и квадратично интегрируемые мартингалы.

Его различные конструкции. Поведение траекторий: недифференцируемость с вероятностью единица, локальные максимумы, точки роста. Броуновское семейство. Варианты марковского и строго марковского свойства броуновского движения (семейства). Применения к решению граничных задач (проблема Дирихле). Формула Фейнмана–Каца. Локальное время броуновского движения, аддитивные функционалы. Векторное броуновское движение. Процессы Бесселя. Фрактальное броуновское движение.

Построение интеграла Ито, свойства интеграла (в том числе мартингальность интеграла Ито с переменным верхним пределом). Интеграл Стратоновича. Связь между двумя видами стохастического интеграла. Интегрирование по семимартингалу. Формула Ито замены переменных и ее дальнейшие обобщения. Примеры.

2. Стохастические дифференциальные уравнения. Применения стохастических дифференциальных уравнений.

Сильные и слабые решения. Проблемы существования и единственности решений (в сильном и слабом виде). Результаты Скорохода, Ятамада и Ватанабе. Решение уравнения Ланжевена. Процесс Орнштейна–Уленбека. Марковское свойство сильного решения стохастического дифференциального уравнения. Теорема Энгельберта–Шмидта. Преобразование Камерона–Мартин–Гирсанова как метод построения слабых решений. Мартингальная проблема Струка–Варадана, связь со стохастическими дифференциальными уравнениями. Различные подходы к изучению диффузионных процессов.

Проблемы фильтрации (фильтр Калмана–Бьюси). Задача об оптимальной остановке. Стохастическое управление. Диффузионная модель цены акций: от модели Башелье к модели Самюэльсона. Опционы, справедливая цена. Формула Блэка–Шоулса. Оптимальные инвестиции и потребление.

3. Дальнейшие исследования СтохДУ.

Понятие о квантовых стохастических дифференциальных уравнениях и марковской эволюции открытых квантовых систем. Проблематика стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. Некоторые методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций: компьютер и проектор.

Обеспечение самостоятельной работы: Электронные ресурсы, включая доступ к сайтам

<http://www.mou.mipt.ru>

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Теория случайных процессов [Текст] / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев .— М. : Физматлит, 2003 .— 400 с.

### **Дополнительная литература**

1. Задачи по теории вероятностей : основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы [Текст] : учеб. пособие для ун-тов / А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков .— М. : Наука, 1986 .— 328 с.
2. Стохастические дифференциальные уравнения : Введение в теорию и приложения [Текст] / Б. Оксендаль ; пер. с 5-го испр. англ. изд. Н. И. Королевой, А. И. Матасова ; под ред. В. Б. Колмановского - М.Мир,2003

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://www.mou.mipt.ru>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Возможно освоение курса в дистанционном режиме, для этого необходимо использовать технологии дистанционного образования, например Zoom, Google Hangouts.

<http://www.mou.mipt.ru>

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий курс "Стохастические дифференциальные уравнения", должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях и в качестве курсового задания,
- подготовку к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

Литература для самостоятельной работы:

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики, т.1,2. – М.: Фазис, 1998.
2. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов, т.1,2. – М: Физ-матгиз, 1994.
3. Kallenberg O. Foundations of Modern Probability.– New York: Springer, 1997.
4. Karatzas L, Shreve S.E. Brownian Motion and Stochastic Calculus.– New York: Springer, 1997.
5. Parthasarathy K.R. An Introduction to Quantum Stochastic Calculus.– Basel: Birkhauser, 1992.
6. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. – М.: Мир, ООО «Издательство АСТ», 2003.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** А.В. Булинский, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Стохастические дифференциальные уравнения» обучающийся должен:

### знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории СтохДУ;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов математики – СтохДУ;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла СтохДУ;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов – СтохДУ;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы решения типовых прикладных задач СтохДУ.

### уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач СтохДУ;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач СтохДУ, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области СтохДУ в устной и письменной форме.

### владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач СтохДУ (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих использования математических подходов теории и методов решения СтохДУ;
- ☐ предметным языком теории СтохДУ и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю



С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

- 1) Задачи, приводящие к стохастическим аналогам обыкновенных дифференциальных уравнений.
- 2) Стохастические модели, возникающие в физике, технике, биологии и финансовой математике.
- 3) Понятия случайной величины и случайного процесса. Математическое ожидание.
- 4) Условное математическое ожидание и его свойства: линейность, "телескопичность", неравенство Иенсена и др.
- 5) Фильтрованные вероятностные пространства.
- 6) Моменты остановки, их свойства, примеры.
- 7) Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы с дискретным и непрерывным временем.
- 8) Фундаментальные неравенства.
- 9) Теоремы о сходимости.
- 10) Локальные мартингалы и семимартингалы.
- 11) Разложение Дуба–Мейера.
- 12) Непрерывные и квадратично интегрируемые мартингалы.
- 13) Броуновское движение (винеровский процесс), его различные конструкции.
- 14) Поведение траекторий: недифференцируемость с вероятностью единица, локальные максимумы, точки роста. Броуновское семейство.
- 15) Варианты марковского и строго марковского свойства броуновского движения (семейства).
- 16) Применения к решению граничных задач (проблема Дирихле).
- 17) Формула Фейнмана–Каца. Локальное время броуновского движения, аддитивные функционалы.
- 18) Векторное броуновское движение.
- 19) Процессы Бесселя.
- 20) Фрактальное броуновское движение.
- 21) Стохастическое исчисление.
- 22) Построение интеграла Ито, свойства интеграла (в том числе мартингальность интеграла Ито с переменным верхним пределом).
- 23) Интеграл Стратоновича.
- 24) Связь между двумя видами стохастического интеграла.
- 25) Интегрирование по семимартингалу.
- 26) Формула Ито замены переменных и ее дальнейшие обобщения. Примеры.
- 27) Стохастические дифференциальные уравнения Ито и Стратоновича.
- 28) Сильные и слабые решения.
- 29) Проблемы существования и единственности решений (в сильном и слабом виде).
- 30) Доказательство теоремы существования и единственности сильного решения СДУ Ито.
- 31) Результаты Скорохода, Ятамада и Ватанабе.
- 32) Решение уравнения Ланжевена.
- 33) Процесс Орнштейна–Уленбека.
- 34) Марковское свойство сильного решения стохастического дифференциального уравнения.
- 35) Теорема Энгельберта–Шмидта.
- 36) Преобразование Камерона–Мартина–Гирсанова как метод построения слабых решений.
- 37) Мартингальная проблема Струка–Варадана, связь со стохастическими дифференциальными уравнениями.
- 38) Различные подходы к изучению диффузионных процессов.
- 39) Примеры применения стохастических дифференциальных уравнений.
- 40) Проблемы фильтрации (фильтр Калмана–Бьюси).
- 41) Задача об оптимальной остановке.

- 42) Стохастическое управление.
- 43) Диффузионная модель цены акций: от модели Башелье к модели Самюэльсона.
- 44) Опционы, справедливая цена. Формула Блэка–Шоулса.
- 45) Оптимальные инвестиции и потребление.
- 46) Некоторые методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений.
- 47) Проблематика стохастических дифференциальных уравнений в частных производных.

Для самостоятельного изучения вопросы на выбор из данного перечня:

9 - 15, 16 – 19, 25, 29, 31, 35 - 38, 40 - 47.

#### Критерии оценивания

##### Оценка

отлично 10: оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

отлично 9: оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

отлично 8: оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений

хорошо 7: оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

хорошо 6: оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

хорошо 5: оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

удовлетворительно 4: оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

удовлетворительно 3: оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

неудовлетворительно 2: оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач

неудовлетворительно 1: оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

#### 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также калькулятором (при необходимости).

Дифференцированный зачет проводится путем организации специального опроса, проводимого в устной форме. Успешная сдача заданий является необходимым условием сдачи дифференцированного зачета.