

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Введение в методы оптимального управления
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 3

Программу составили:

Л.А. Бекларян, д-р физ.-мат. наук, профессор

А.Ю. Флерова, канд. физ.-мат. наук, доцент

А.А. Жукова, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 15.04.2022

## Аннотация

В курсе рассматриваются ключевые понятия математической теории оптимального управления. Дается каноническая постановка задачи оптимального управления, а также различные постановки, сводящиеся к канонической постановке. Приводятся примеры из классической механики и управления производственной системы с ограниченными ресурсами. Рассматривается принцип Лагранжа, как универсальный метод поиска оптимального процесса, а также вывода необходимых условий оптимальности. Приводятся два эквивалентных формализма для вывода необходимых условий оптимальности: Лагранжев формализм и Гамильтонов формализм. В рамках такого формализма на основе локальных и игольчатых вариаций, а также пакетов локальных и игольчатых вариаций устанавливаются необходимые условия оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Понтрягина. Дается геометрический смысл принципа максимума Понтрягина. Устанавливается достаточность принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с квадратичным функционалом и линейной дифференциальной связью. Отдельно рассматривается задача вариационного исчисления, для которой проводится расшифровка необходимых условий первого порядка, а также устанавливаются следствия из таких условий: условия Вейерштрасса, Лежандра; уравнение Якоби и сопряженные точки. Полученные формулировки, а также следствия из них позволяют за счет их естественного усиления сформулировать также и достаточные условия как для слабого локального минимума, так и для сильного локального минимума. Наряду с изучением индивидуальной точки сильного минимума также рассматривается его погружение в семейство точек сильного минимума для индуцированного семейства задач оптимального управления. Такой формализм известен как метод динамического программирования. В рамках такого формализма получено уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, которое характеризует оптимальные решения отмеченного индуцированного семейства задач оптимального управления. Излагаются вопросы о структуре дифференциальной связи: множество достижимости; управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость. Установлены теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений, правая часть которых удовлетворяет условиям Каратеодори. Проводится расширение класса управлений вплоть до скользящих режимов, для которых установлена теорема существования оптимального управления. Приводится краткое введение к вопросу изучения класса задач оптимального управления, для которых необходимые условия первого порядка вырожденные: особые управления.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Изучение основ теории и методов оптимального управления (Мет ОУ).

### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний в области оптимального управления;
- приобретение навыков по исследованию экстремальных режимов в задаче оптимального управления;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных исследований по прикладным моделям;
- приобретение навыков по постановке и исследованию прикладных задач.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

<p>решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты</p>	<p>ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели</p>
	<p>ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты</p>

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, методы, теории оптимального управления;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов теории оптимального управления;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла Мет ОУ;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач оптимального управления.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач оптимального управления;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач ОУ, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области оптимального управления в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач ОУ (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов оптимального управления;
- ☐ предметным языком теории оптимального управления и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Задача вариационного исчисления, основная задача оптимального управления. Принцип максимума Л.С. Понтрягина.	5	10		15
2	Доказательство принципа максимума Л.С. Понтрягина для основной задачи оптимального управления.	4	8		15

3	Задача вариационного исчисления.	6	12		15
Итого часов		15	30		45
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

## 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Задача вариационного исчисления, основная задача оптимального управления. Принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Задача Лагранжа и задача вариационного исчисления. Задача Майера – Больца, задача на быстроедействие. Фазовое пространство и пространство управлений. Понятия слабого и сильного минимума. Сведение задачи со смешанным видом функционала к задаче с терминальным функционалом. Задача с фиксированным временем и сведение к ней задачи с нефиксированным временем.

Необходимые условия оптимальности. Лагранжев и Гамильтонов формализмы. Сопряженная переменная. Функция Понтрягина, лагранжиан. Сопряженное уравнение, условие трансверсальности. Принцип максимума Понтрягина. Принцип Лагранжа. Множители Лагранжа и условия дополняющей нежесткости. Гамильтонов формализм.

2. Доказательство принципа максимума Л.С. Понтрягина для основной задачи оптимального управления.

Понятие вариации. Задача Лагранжа и локальные вариации. Основная задача оптимального управления и игольчатые вариации. Пакеты локальных и игольчатых вариаций. Задача с квадратичным функционалом. Множество достижимости, экстремальные управления.

3. Задача вариационного исчисления.

Первые интегралы уравнения Эйлера. Условия Вейерштрасса, Лежандра и Якоби. Уравнение Якоби. Условия Вейерштрасса–Эрдмана. Линейные системы с квадратичным функционалом. Принцип максимума как необходимое и достаточное условие оптимальности. Задача на быстроедействие. Теорема о конечном числе точек переключений.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и экраном.

## 6.Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Методы оптимального управления [Текст] : учеб. пособие для вузов / Л. А. Бекларян, А. Ю. Флёртова ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2011 .— 128 с.

### Дополнительная литература

1. Методы оптимизации [Текст]. Ч. 1 : Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации : учеб. пособие для вузов / В. Г. Жадан ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2014 .— 271 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Не предусмотрено.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий курс "Введение в методы оптимального управления", должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания,
- подготовку к практическим занятиям, дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

Литература для самостоятельной работы:

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе З.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. – Минск: Наука и техника, 1974.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Наука, 1973.
4. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978.
5. Ли Э.Б., Маркус П. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972.
6. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. – М.: Факториал, 2006.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчики:**

Л.А. Бекларян, д-р физ.-мат. наук, профессор  
А.Ю. Флерова, канд. физ.-мат. наук, доцент  
А.А. Жукова, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в методы оптимального управления» обучающийся должен:

### знать:

- ☐ фундаментальные понятия, методы, теории оптимального управления;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов теории оптимального управления;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла Мет ОУ;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач оптимального управления.

### уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач оптимального управления;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач ОУ, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области оптимального управления в устной и письменной форме.

### владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач ОУ (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов оптимального управления;
- ☐ предметным языком теории оптимального управления и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Основная задача оптимального управления. Упрощенная задача оптимального управления. Понятие слабого и сильного минимума.
2. Задача Лагранжа и задача вариационного исчисления.
3. Задача со смешанным видом функционала. Задача Майера и задача Больца. Задача на быстроедействие.
4. Задача оптимального управления с незакрепленным временем.
5. Функции Лагранжа и Понtryгина. Принцип максимума Понtryгина для задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера и условие трансверсальности.
6. Функции Лагранжа и Понtryгина. Принцип максимума Понtryгина для задачи Лагранжа. Уравнение Эйлера, условие минимума лагранжиана по управлению и условие трансверсальности.
7. Функции Лагранжа и Понtryгина. Принцип максимума Понtryгина для задачи Больца. Уравнение Эйлера, условие минимума лагранжиана по управлению и условие трансверсальности.
8. Функции Лагранжа и Понtryгина. Принцип максимума Понtryгина для упрощенной задачи оптимального управления. Уравнение Эйлера, условие минимума лагранжиана по управлению и условие трансверсальности.
9. Функции Лагранжа и Понtryгина. Принцип максимума Понtryгина для общей задачи оптимального управления. Уравнение Эйлера, условие минимума лагранжиана по управлению и условие трансверсальности.
10. Каноническая форма записи принципа максимума Понtryгина.
11. Доказательство принципа максимума Л.С. Понtryгина для задачи вариационного исчисления. Понятие локальной вариации.
12. Доказательство принципа максимума Л.С. Понtryгина для задачи Лагранжа. Понятие семейства локальных вариаций.
13. Доказательство принципа максимума Л.С. Понtryгина для упрощенной задачи оптимального управления. Понятие игольчатой вариации.
14. Задача вариационного исчисления. Первые интегралы уравнения Эйлера. Необходимые условия сильного минимума. Условия Веерштрасса и Лежандра. Условия Веерштрасса–Эрдмана.
15. Задача вариационного исчисления. Необходимые условия слабого минимума. Условие Лежандра.
16. Задача вариационного исчисления. Необходимые условия слабого минимума. Условие Якоби. Уравнение Якоби.
17. Линейные системы с квадратичным функционалом. Принцип максимума как необходимое и достаточное условие оптимальности.
18. Задача на быстроедействие. Теорема о конечном числе точек переключений.
19. Методы динамического программирования. Функция Беллмана. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана.
20. Связь уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана с принципом максимума (необходимые условия оптимальности).
21. Проблема синтеза оптимального управления. Достаточные условия существования функции Беллмана (достаточные условия оптимальности).
22. Множество достижимости для линейных систем. Экстремальное управление. Критерий экстремальности управления.
23. Управляемость для линейных систем. Полная управляемость линейных систем. Теорема Калмана о полной управляемости автономных систем.
24. Управляемость для линейных систем. Теорема Калмана о полной управляемости автономных систем относительно подпространства.



25. Точечная управляемость для линейных систем. Критерий точечной управляемости. Теорема Калмана о точечной управляемости.
26. Проблема наблюдаемости. Связь между наблюдаемостью и управляемостью. Критерий полной наблюдаемости стационарной системы.
27. Проблема идентификации. Критерий идентифицируемости. Критерий полной идентифицируемости стационарной системы.
28. Проблема существования оптимального управления. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения с правой частью измеримой по  $t$  (условия Каратеодори).
29. Принцип отдыха на полпути. Лемма Филиппова.
30. Понятие скользящего режима. Слабая сходимости скользящих режимов.
31. Теорема существования оптимального управления. Пример задачи вариационного исчисления.
32. Задача вариационного исчисления с выпуклым лагранжианом. Существование решения уравнения Гамильтона-Якоби как достаточное условие сильного локального минимума.
33. Задача вариационного исчисления. Интегральный инвариант Пуанкаре-Гильберта. Понятие лежандрова множества и его связь с разрешимостью уравнения Гамильтона-Якоби.
34. Задача вариационного исчисления. Теорема Якоби о достаточных условиях слабого локального минимума.
35. Задача вариационного исчисления. Теорема Веерштрасса о достаточных условиях сильного локального минимума.
36. Достаточные условия оптимальности В.Ф. Кротова для задачи оптимального управления.
37. Особые управления. Определение особых управлений с помощью скобок Пуассона.
38. Особые управления. Условия Келли и Коппа-Мойера.
39. Численные методы, основанные на редукции к задачам нелинейного программирования. Метод нагруженного функционала.
40. Численные методы решения краевых задач.

#### Пример экзаменационного билета

1. Задача оптимального управления с незакрепленным временем.
2. Проблема наблюдаемости. Связь между наблюдаемостью и управляемостью. Критерий полной наблюдаемости стационарной системы.
3. Решить задачу оптимального управления:

#### Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.