

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Актuarная математика
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

7 (осенний) - Зачет

8 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 45 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 90 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 180, всего зач. ед.: 4

Количество контрольных работ, заданий: 6

Программу составил: А.А. Белолипецкий, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 15.05.2020

## Аннотация

Прежде чем объяснить, чем занимается актуарная математика, разберемся в понятии «актуарий», что в переводе с латинского (actuarius) долгое время означало писарь, счетовод, хранитель актов присутственных мест, в Византии придворный врач. В настоящее время это слово обрело свой основной смысл: математик, изучающий страховые тарифы, риски, особенности демографической статистики.

Предметом данного курса является актуарная математика – одна из составляющих деятельности актуария. Для слушателей предполагается знание основ математического анализа, теории вероятностей и математической статистики. Актуарную математику можно рассматривать как прикладную часть теории случайных процессов, изучающую риски, возникающие при финансовых расчетах между страхователями и страховщиками. В настоящем курсе изложены математические основы расчета рисков и тарифов в страховом деле. Множество математических моделей страховых схем постоянно изменяется и обновляется. Поэтому в курсе изучаются несколько классических базовых моделей страхования жизни, знание которых необходимо для работы в страховом бизнесе.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

-знакомство студентов с основами прикладной теории случайных процессов, а именно, математики страхового дела. Это необходимо для дальнейшей сдачи экзамена на звание актуария, если таковое желание у слушателей возникнет. Специальность актуария считается в финансовом мире Запада второй после банкира.

### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области актуарной математики;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области актуарной математики;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области актуарной математики.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

## 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- ☐ фундаментальные понятия и законы теории вероятностей, случайных процессов, математической статистики;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов страхового дела;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла актуарной математики;
- ☐ основные свойства соответствующих математических моделей;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач актуарной математики.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач актуарной математики;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач актуарной математики, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области актуарной математики в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач актуарной математики;
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых разделов актуарной математики;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов актуарной математики;
- ☐ предметным языком актуарной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Теория полезности и страхование. Теорема об оптимальном страховании.	3			5
2	Модели краткосрочного страхования.	4			10
3	Модели долгосрочного страхования.	5			5
4	Теория полезности и страхование. Теорема об оптимальном страховании.	3			10
5	Аннуитеты.	6	3		10
6	Распределенные нетто- премии.	6	3		10
7	Нетто резервы.	6	3		10
8	Групповые страхования.	6	3		15
9	Специальные виды страхования. Основы теории разорения.	6	3		15
Итого часов		45	15		90
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		180 час., 4 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

## Семестр: 7 (Осенний)

### 1. Теория полезности и страхование. Теорема об оптимальном страховании.

Существование и способы задания функций полезности. Теорема о возможности заключения взаимовыгодного договора между страховщиком и страхователем. Теорема об оптимальном страховании с франшизой.

### 2. Модели краткосрочного страхования.

Модели краткосрочного страхования жизни.

Аппроксимация суммы случайных исков с помощью нормального распределения и распределения Пуассона.

Формулы для распределения вероятностей суммы целочисленных случайных исков.

### 3. Модели долгосрочного страхования.

Функции выживания. Остаточное и округленное остаточное время жизни. Их математические ожидания и дисперсии. Интенсивность смертности. Таблицы продолжительности жизни. Связь табличных величин с функцией выживания. Интерполяция непрерывных актуарных функций дискретными табличными величинами. Аналитические законы смертности. Простейшая модель долгосрочного страхования. Смешанное страхование жизни. Разовые нетто-премии. Отсроченное страхование. Виды страхования с переменной страховой выплатой. Страхование с выплатой в конце года смерти. Перестрахование. Рекуррентные уравнения и коммутационные функции.

### 4. Теория полезности и страхование. Теорема об оптимальном страховании.

Теория полезности

Страхование и полезность

Элементы страхования

Оптимальное страхование

## Семестр: 8 (Весенний)

### 5. Аннуитеты.

Введение в финансовую математику. Потоки платежей. Понятие аннуитета. Актуарная приведённая стоимость аннуитета. Непрерывные аннуитеты. Дискретные аннуитеты. Аннуитеты с кратными годовыми выплатами.

Аннуитеты с переменными выплатами.

### 6. Распределенные нетто- премии.

Нетто-премии с выплатами, распределёнными по годам. Модели с непрерывными выплатами премий.

Нетто-премии в моделях с ежегодными выплатами.

Нетто-премии при кратных ежегодных выплатах.

### 7. Нетто резервы.

Резервы нетто-премий в непрерывных моделях. Четыре вида формул для резервов нетто-премий в непрерывных моделях.

Резервы нетто-премий в дискретных и непрерывных моделях. Рекуррентные формулы для резервов нетто-премий в дискретных моделях. Распределение потерь по годам действия полиса. Теорема Хэттендорфа. Дифференциальное уравнение Тиле для резервов нетто-премий в непрерывных моделях.

#### 8. Групповые страхования.

Страхование жизни нескольких лиц. Состояние совместной жизни, состояние выживания последнего.

Общее симметрическое состояние. Теорема Шуэтта–Несбитта.

Примеры асимметричных аннуитетов и видов страхования.

#### 9. Специальные виды страхования. Основы теории разорения.

Специальные типы годовых выплат:

- а) пожизненный аннуитет с  $n$ -летними гарантированными выплатами;
- б) аннуитет с компенсирующей доплатой;
- в) страхование семейного дохода.

Страхование пенсионных выплат.

Модели коллективных рисков. Роль производящих функций моментов в анализе коллективных рисков.

Теория разорения. Модель Крамера–Лундберга. Коэффициент Лундберга и его связь с вероятностью разорения.

### **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Необходимое оборудование для лекций и практических занятий: компьютер и проектор.

### **6. Перечень рекомендуемой литературы**

#### Основная литература

1. Финансовая математика [Текст] : учебник для вузов по спец. "Финансы и кредит", "Бухгалтерский учет" / Е. М. Четыркин. — 8-е изд. — М. : Изд-во "Дело" АНХ, 2008. — 400 с. - Библиогр. в конце глав. - 5000 экз. - ISBN 978-5-7749-0504-1 (в пер.).

#### Дополнительная литература

1. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов по спец. "Прикладная математика и физика" / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2007. — 440 с.

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://www.mou.mipt.ru>

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Не предусмотрено

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий курс актуарной математики, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания,
- подготовку к зачету и экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

7 (осенний) - Зачет

8 (весенний) - Экзамен

**Разработчик:** А.А. Белолипецкий, д-р физ.-мат. наук, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Актuariальная математика» обучающийся должен:

### знать:

- ☐ фундаментальные понятия и законы теории вероятностей, случайных процессов, математической статистики;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов страхового дела;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла актуарной математики;
- ☐ основные свойства соответствующих математических моделей;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач актуарной математики.

### уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач актуарной математики;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач актуарной математики, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области актуарной математики в устной и письменной форме.

### владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач актуарной математики;
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых разделов актуарной математики;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов актуарной математики;
- ☐ предметным языком актуарной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.



#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень вопросов к зачету в 7 семестре:

1. Теория полезности и страхование.
2. Теорема об оптимальном страховании.
3. Модели краткосрочного страхования жизни.
4. Аппроксимация суммы случайных исков с помощью нормального распределения и распределения Пуассона.
5. Формулы для распределения вероятностей суммы целочисленных случайных исков.
6. Функции выживания. Остаточное и округленное остаточное время жизни. Их математические ожидания и дисперсии.
7. Интенсивность смертности. Таблицы продолжительности жизни.
8. Связь табличных величин с функцией выживания.
9. Интерполяция непрерывных актуарных функций дискретными табличными величинами.
10. Аналитические законы смертности.
11. Простейшая модель долгосрочного страхования. Смешанное страхование жизни. Разовые нетто-премии.
12. Отсроченное страхование.
13. Виды страхования с переменной страховой выплатой.
14. Страхование с выплатой в конце года смерти.
15. Перестрахование.

Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 8-ом семестре:

16. Рекуррентные уравнения и коммутационные функции.
17. Введение в финансовую математику. Потоки платежей. Понятие аннуитета.
18. Актуарная приведённая стоимость аннуитета.
19. Непрерывные аннуитеты.
20. Дискретные аннуитеты.
21. Аннуитеты с  $m$ -кратными годовыми выплатами.
22. Аннуитеты с переменными выплатами.
23. Нетто-премии с выплатами, распределёнными по годам. Модели с непрерывными выплатами премий.
24. Нетто-премии в моделях с ежегодными выплатами.
25. Нетто-премии при  $m$ -кратных ежегодных выплатах.
26. Резервы нетто-премий в непрерывных моделях.
27. Четыре вида формул для резервов нетто-премий в непрерывных моделях.
28. Резервы нетто-премий в дискретных и полунепрерывных моделях.
29. Рекуррентные формулы для резервов нетто-премий в дискретных моделях.
30. Распределение потерь по годам действия полиса. Теорема Хэттендорфа.
31. Вывод дифференциального уравнения Тиле для резервов нетто-премий в непрерывных моделях.
32. Страхование жизни нескольких лиц. Состояние совместной жизни, состояние выживания последнего.
33. Общее симметрическое состояние. Теорема Шуэтта–Несбитта.
34. Примеры асимметричных аннуитетов и видов страхования.
35. Специальные типы годовых выплат:
  - а) пожизненный аннуитет с  $n$ -летними гарантированными выплатами;
  - б) аннуитет с компенсирующей доплатой;
  - в) страхование семейного дохода.
36. Страхование пенсионных выплат.
37. Модели коллективных рисков. Роль производящих функций моментов в анализе коллективных рисков.

38. Теория разорения. Модель Крамера–Лундберга. Коэффициент Лундберга и его связь с вероятностью разорения.

Пример билетов:

1 билет

1. Рекуррентные уравнения и коммутационные функции.
2. Вывод дифференциального уравнения Тиле для резервов нетто-премий в непрерывных моделях.

2 билет

1. Аннуитеты с  $m$ -кратными годовыми выплатами.
2. Четыре вида формул для резервов нетто-премий в непрерывных моделях.

#### Критерии оценивания

отлично

10 оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

9 оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

8 оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений

хорошо

7 оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

6 оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

5 оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

удовлетворительно

4 оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

3 оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

неудовлетворительно

2 оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

#### 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Студент может получить зачёт по итогам работы в семестре либо в результате специального дополнительного опроса, проводимого в устной форме.

Во время сдачи экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.