

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Матрицы и вычисления
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: Н.Л. Замарашкин, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике 11.03.2020

Аннотация

Методы вычислительной линейной алгебры и матричные вычисления являются базовым компонентом при решении различных задач статистического анализа, обработки изображений, предсказательного моделирования. Владение основными алгоритмами матричных вычислений необходимо в любой сфере математического моделирования.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Получение знаний о методах применения матриц в задачах вычислительной физики и практическая подготовка студентов к дальнейшей самостоятельной работе в области математического моделирования физических задач и современных технологий.

Задачи дисциплины

- ознакомление слушателей с задачами, принципами, методами и моделями матричных вычислений;
- приобретение слушателями теоретических знаний, и практических умений и навыков в области матричных вычислений;
- оказание консультаций и помощи слушателям в проведении собственных исследований в области матричных вычислений.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- свойства матриц различных типов;
- свойства операций над матрицами;
- вычислительные аспекты операций над матрицами;
- методы разложения матриц;
- итерационные методы вычисления матриц;
- аксиомы машинной арифметики;
- проблемы сертификации алгоритмов;
- понятия о последовательных и параллельных вычислениях;
- параллельные алгоритмы вычисления обратной матрицы;
- подход В.В.Воеводина к решению проблемы портатбельности программного обеспечения.

уметь:

- ☐ применять численные методы к вычислению матриц различного типа;
- ☐ вычислять характеристический полином матрицы;
- ☐ абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций;
- ☐ оценивать погрешности аппроксимации и точности приближенных решений;
- ☐ делать правильные выводы из сопоставления результатов аналитической теории и численного эксперимента;
- ☐ производить численные оценки по порядку величины;
- ☐ делать качественные выводы при переходе к предельным условиям в изучаемых проблемах;
- ☐ пользоваться справочной литературой научного и прикладного характера для быстрого поиска необходимых математических и физических данных и понятий.

владеть:

- базовыми знаниями в области матричных вычислений и принципами их использования в профессиональной деятельности;
- навыками самостоятельного решения основных задач матричных вычислений;
- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физико-математических задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Линейная зависимость величин. Системы линейных уравнений. Вычислительный аспект умножения матриц: классическое правило умножения, алгоритм Винограда, алгоритм Штрассена.	10			4
2	Малые возмущения. Число обусловленности матрицы. Сходящиеся матрицы и ряды. Возмущение собственных значений. Спектральные расстояния.	10			5
3	Матрицы как обобщение понятия числа. Группа, кольцо, поле. Специальные классы матриц. Матрица как оператор. Ядро и образ матрицы. Характеристический полином матрицы и методы его вычисления.	10			6
Итого часов		30			15
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		45 час., 1 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Линейная зависимость величин. Системы линейных уравнений. Вычислительный аспект умножения матриц: классическое правило умножения, алгоритм Винограда, алгоритм Штрассена.

Линейная зависимость величин. Системы линейных уравнений. Матрицы как инструмент для анализа линейной зависимости. Операции над матрицами. Ассоциативность и некоммутативность умножения матриц. Вычислительный аспект умножения матриц: классическое правило умножения, алгоритм Винограда, алгоритм Штрассена. Блочные матрицы. Качество алгоритмов и модели компьютеров. Последовательные и параллельные вычисления.

2. Малые возмущения. Число обусловленности матрицы. Сходящиеся матрицы и ряды. Возмущение собственных значений. Спектральные расстояния.

Малые возмущения. Число обусловленности матрицы. Сходящиеся матрицы и ряды. Простейший итерационный метод. Обратные матрицы и ряды. Обусловленность линейной системы. Согласованность матрицы и правой части. Возмущение собственных значений. Непрерывность корней полинома. Круги Гершгорина. Малые возмущения собственных значений и векторов. Обусловленность простого собственного значения. Спектральные расстояния. Теорема Виландта-Хоффмана. Двоякостochastic матрицы и теорема Биркгоффа. Перестановочные диагонали и теорема Холла.

3. Матрицы как обобщение понятия числа. Группа, кольцо, поле. Специальные классы матриц. Матрица как оператор. Ядро и образ матрицы. Характеристический полином матрицы и методы его вычисления.

Матрицы как обобщение понятия числа. Группа, кольцо, поле. Специальные классы матриц. Матрицы перестановки. Схема сдвигания для ассоциативной операции. Рекуррентное сдвигание. Матрица как оператор. Ядро и образ матрицы. Диагонализация матрицы. Собственное значение и собственный вектор. Инвариантные подпространства. Теорема Жордана. Характеристический полином матрицы и методы его вычисления. Параллельные алгоритмы вычисления обратной матрицы.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, звуковая система).

Необходимое программное обеспечение: ОС линукс.

Обеспечение самостоятельной работы: электронная библиотека ИВМ РАН.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вычислительные основы линейной алгебры [Текст] / В. В. Воеводин - М. Наука, 1977
2. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами [Текст] / В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, -М., Наука, 1987

Дополнительная литература

1. Машинные методы математических вычислений [Текст] / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер ; пер. с англ. Х. Д. Икрамова, -М. , Мир , 1980

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Информационные ресурсы: доступные через Internet электронные конспекты лекций, учебные пособия и сборники задач, разработанные для данного курса.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Необходимое программное обеспечение: ОС линукс.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, алгоритмы.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике
курс:	<u>4</u>
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	Н.Л. Замарашкин, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Матрицы и вычисления» обучающийся должен:

знать:

- свойства матриц различных типов;
- свойства операций над матрицами;
- вычислительные аспекты операций над матрицами;
- методы разложения матриц;
- итерационные методы вычисления матриц;
- аксиомы машинной арифметики;
- проблемы сертификации алгоритмов;
- понятия о последовательных и параллельных вычислениях;
- параллельные алгоритмы вычисления обратной матрицы;
- подход В.В.Воеводина к решению проблемы портативности программного обеспечения.

уметь:

- ☐ применять численные методы к вычислению матриц различного типа;
- ☐ вычислять характеристический полином матрицы;
- ☐ абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций;
- ☐ оценивать погрешности аппроксимации и точности приближенных решений;
- ☐ делать правильные выводы из сопоставления результатов аналитической теории и численного эксперимента;
- ☐ производить численные оценки по порядку величины;
- ☐ делать качественные выводы при переходе к предельным условиям в изучаемых проблемах;
- ☐ пользоваться справочной литературой научного и прикладного характера для быстрого поиска необходимых математических и физических данных и понятий.

владеть:

- базовыми знаниями в области матричных вычислений и принципами их использования в профессиональной деятельности;
- навыками самостоятельного решения основных задач матричных вычислений;
- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физико-математических задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов для сдачи дифференцированного зачета:

1. Линейная зависимость величин. Системы линейных уравнений. Матрицы как инструмент для анализа линейной зависимости. Операции над матрицами. Ассоциативность и некоммутативность умножения матриц.
2. Вычислительный аспект умножения матриц: классическое правило умножения, алгоритм Винограда, алгоритм Штрассена. Блочные матрицы. Качество алгоритмов и модели компьютеров. Последовательные и параллельные вычисления.
3. Матрицы как обобщение понятия числа. Группа, кольцо, поле. Специальные классы матриц. Матрицы перестановки. Схема сдваивания для ассоциативной операции. Рекуррентное сдваивание.
4. Матрица как оператор. Ядро и образ матрицы. Диагонализация матрицы. Собственное значение и собственный вектор. Инвариантные подпространства. Теорема Жордана.
5. Характеристический полином матрицы и методы его вычисления. Параллельные алгоритмы вычисления обратной матрицы.
6. Циркулянтные и теплицевы матрицы. Групповое свойство невырожденных циркулянтных матриц. Спектральная теорема для циркулянтных матриц. Матрица Фурье. Быстрое преобразование Фурье. Быстрые алгоритмы периодической и аperiodической свертки.
7. Метрическое пространство. Вложенные шары. Нормированное пространство. Векторные и матричные нормы. Эквивалентные нормы. Операторные нормы.
8. Скалярное произведение. Ортогональность. Длина вектора. Изометричные матрицы. Сохранение длин и унитарные матрицы. Теорема Шура.
9. Нормальные матрицы. Знакоопределенные матрицы. Сингулярное разложение матрицы. Унитарно инвариантные нормы. Аппроксимации меньшего ранга.
10. Малые возмущения. Число обусловленности матрицы. Сходящиеся матрицы и ряды. Простейший итерационный метод. Обратные матрицы и ряды. Обусловленность линейной системы. Согласованность матрицы и правой части.
11. Возмущение собственных значений. Непрерывность корней полинома. Круги Гершгорина. Малые возмущения собственных значений и векторов. Обусловленность простого собственного значения.
12. Спектральные расстояния. Теорема Виландта-Хоффмана. Двоякостochastic матрицы и теорема Биркгоффа. Перестановочные диагонали и теорема Холла.
13. Машинные числа. Аксиомы машинной арифметики. Ошибки округления для скалярного произведения. Прямой и обратный анализ. Проблемы сертификации алгоритмов. "Идеальные" и "машинные" тесты. Решение треугольных систем.
14. Прямые методы для линейных систем. Теория LU-разложения. Ошибки округления для LU-разложения. Рост элементов и выбор ведущего элемента. Метод Холецкого. Треугольные разложения и решение систем. Как уточнить решение.
15. QR-разложение матрицы. Матрицы отражения. Исклучение элементов с помощью отражений. Матрицы вращения. Исклучение элементов с помощью вращений. Машинные реализации отражений и вращений. Метод ортогонализации. Потеря ортогональности. Как бороться с потерей ортогональности. Модифицированный алгоритм Грама-Шмидта.
16. Неотрицательные матрицы. Матрицы и графы. Разложимость. Теорема Перрона-Фробениуса. Методы для разреженных матриц. Задача о сепараторе.
17. Подход В.В.Воеводина к решению проблемы портатбельности программного обеспечения. Программа и математический алгоритм. Граф алгоритма. Граф вычислительной системы. Проблемы построения и анализа графов. Проблемы отображения алгоритмов на вычислительные системы.

Примерный перечень билетов:

Билет №1

1. Ядро и образ матрицы. Диагонализация матрицы.
2. Матрицы отражения. Исклучение элементов с помощью отражений.

Билет №2

1. Машинные реализации отражений и вращений. Метод ортогонализации.
2. Нормальные матрицы. Знакоопределенные матрицы. Сингулярное разложение матрицы.

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Дифференцированный зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, или путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.