

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Численные методы оптимизации
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составили:

А.В. Гасников, д-р физ.-мат. наук, доцент

Д.М. Двинских, phd (к.ф.-м.н.)

Ю.В. Дорн, канд. техн. наук

Д.М. Меркулов, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 15.05.2023

Аннотация

Курс посвящён численным алгоритмам решения различных классов задач оптимизации в конечномерных пространствах. Рассматриваются численные методы решения задач одномерной и безусловной оптимизации. Приводятся также численные методы решения задач условной оптимизации, включая, в частности, задачи линейной, квадратичной и выпуклой оптимизации. Обсуждаются композитная оптимизация, стохастическая оптимизация, распределённая и рандомизированная оптимизация, методы штрафных функций.

Особо выделяются приемы, с помощью которых порождается многообразие современных численных методов выпуклой оптимизации первого порядка (рестарты, регуляризация, переход к двойственной задаче, адаптивная настройка на гладкость задачи и т.д.).

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение методов решения различных оптимизационных задач в конечномерных пространствах.

Задачи дисциплины

- овладение студентами начальными сведениями по теории численных методов решения задач оптимизации;
- приобретение теоретических знаний по условиям оптимальности для задач безусловной и условной оптимизации, линейного и выпуклого программирования;
- ознакомление студентов с основными современными методами решения конечномерных оптимизационных задач;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических и экспериментальных исследований в области решения практических оптимизационных задач, в том числе с привлечением пакетов оптимизации.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- фундаментальные понятия и основные теоретические результаты в области теории и методов оптимизации в конечномерных пространствах;
- современные проблемы соответствующих разделов численных методов решения оптимизационных задач;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла «Численные методы оптимизации»;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных оптимизационных задач.

уметь:

- понять поставленную оптимизационную задачу и провести ее формализацию;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных оптимизационных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждения;
- самостоятельно находить алгоритмы решения оптимизационных задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представлять математические знания в области численных методов оптимизации в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками решения оптимизационных задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых разделов методов оптимизации;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов оптимизации;
- предметным языком теории и методов оптимизации, навыками грамотного описания решения соответствующих задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Понятие о численных методах оптимизации.	2	2		3
2	Невыпуклая оптимизация.	4	4		6
3	Двойственная задача.	2	2		5
4	Унимодальные функции одной переменной.	2	2		2
5	Способы выбора шага в методах.	3	3		3
6	Задачи оптимизации на множествах простой структуры.	2	2		4
7	Концепция (неточной) модели функции.	2	2		2
8	Метод Ньютона.	3	3		2
9	Стохастическая оптимизация.	2	2		5
10	Общая схема метода штрафных функций.	4	4		8
11	Численные методы оптимизации на службе статистики и машинного обучения.	4	4		5

Итого часов	30	30		45
Подготовка к экзамену	30 час.			
Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Понятие о численных методах оптимизации.

Метод градиентного спуска.

Сложность задач оптимизации.

Сильно выпуклые задачи, выпуклые (вырожденные) задачи, невыпуклые задачи.

Гладкие, негладкие задачи.

Регуляризация и рестарты.

О возможности вычислять градиент и автоматическом дифференцировании.

Приложение к задаче оптимального управления.

2. Невыпуклая оптимизация.

Условие Поляка-Лоясиевича (ПЛ) и глобальная сходимость градиентного спуска.

Пример: сведение решения системы нелинейных уравнений к задаче оптимизации с условием ПЛ.

Сходимость градиентного спуска к локальному экстремуму.

Принцип множителей Лагранжа и теорема о неявной функции.

Основные факты выпуклой оптимизации.

Принцип множителей Лагранжа и теорема об отделимости точки от выпуклого множества гиперплоскостью (без доказательства).

3. Двойственная задача.

Слабая и сильная двойственность для задач выпуклой оптимизации.

Теорема о минимаксе (Фон Неймана, Сион-Какутани) (без доказательства).

Седловые задачи.

Коническая двойственность.

Теоремы об альтернативах (Фаркаш) и их следствия (основная теорема финансовой математики об отсутствии арбитража; робастная оптимизация).

Понятие о прямо-двойственных методах на примере решения задачи минимизации выпуклого сепарабельного функционала с аффинными ограничениями с помощью перехода к двойственной задаче и ее решения методом градиентного спуска.

4. Унимодальные функции одной переменной.

Методы одномерной минимизации (метод дихотомии, метод золотого сечения, метод Фибоначчи).

Задача о распределении ресурсов.

Методы маломерной оптимизации: метод центров тяжести, метод эллипсоидов.

5. Способы выбора шага в методах.

Наискорейший спуск.

Правило Армихо и правило Голдстейна.

Адаптивный способ выбора шага.

Сопряженные направления.

Метод сопряженных градиентов для минимизации квадратичных функций.

Метод сопряженных градиентов для решения задач выпуклой оптимизации.

Метод тяжелого шарика Поляка.

Ускоренный градиентный метод (в разных вариантах: линейный каплинг, метод подобных треугольников).

Новый ускоренный градиентный метод (на базе метода линейного каплинга) с одномерными минимизациями.

6. Задачи оптимизации на множествах простой структуры.

Дивергенция Брэгмана.

Метод проекции (суб-)градиента, метод зеркального спуска.

Метод условного градиента (Франк-Вульфа).

Пример задачи минимизации разреженной квадратичной формы на единичном симплексе.

7. Концепция (неточной) модели функции.

Композитная оптимизация.

Универсальный градиентный спуск и его ускоренный вариант. Проксимальный градиентный спуск.

Ускоренный проксимальный метод (в варианте Монтейро-Свайтера). Каталист - общий способ ускорения различных неускоренных методов.

8. Метод Ньютона.

Метод Ньютона с кубической регуляризацией.

Тензорные методы.

Ускоренные тензорные методы.

9. Стохастическая оптимизация.

Минибатчинг и распараллеливание.

Рандомизированные методы на примере покомпонентных и безградиентных методов.

Задача минимизации суммы функций.

10. Общая схема метода штрафных функций.

Метод модифицированной функции Лагранжа.

Методы внутренней точки.

Понятие самосогласованного барьера.

Методы параметризации целевых функций.

Методы отслеживания центральной траектории.

11. Численные методы оптимизации на службе статистики и машинного обучения.

Принцип максимального правдоподобия и метод Поляка-Юдицкого, адаптивные методы стохастической оптимизации.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций и практических занятий: компьютер, проектор.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Курс методов оптимизации [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] .— 2-е изд. — М. : Физматлит, 2005, 2008 .— 367 с.
2. Численные методы оптимизации [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А.Ф.Измайлов, М.В.Солодов .— М. : Физматлит, 2003, 2005 .— 304 с.
3. Методы оптимизации [Текст]. Ч. 1 : Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации : учеб. пособие для вузов / В. Г. Жадан ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2014 .— 271 с.
4. Методы оптимизации [Текст]. Ч. 2 : Численные алгоритмы : учеб. пособие для вузов / Жадан, В. Г. ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2015 .— 320 с.

Дополнительная литература

1. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи [Текст] : учебник для вузов / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2005 .— 256 с.
2. Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Г. Бирюков ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2010 .— 225 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.mou.mipt.ru>
<http://life-prog.ru/optimization/php>
<http://www.optimization-on-line.org/>
<http://simplemax.net/>
<http://www.convexoptimization.com/>
<http://www.mou.mipt.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Необходимое программное обеспечение: программы MAPLE и MATLAB.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания,
- подготовку к практическим занятиям, экзаменам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Разработчики:

А.В. Гасников, д-р физ.-мат. наук, доцент

Д.М. Двинских, phd (к.ф.-м.н.)

Ю.В. Дорн, канд. техн. наук

Д.М. Меркулов, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Численные методы оптимизации» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия и основные теоретические результаты в области теории и методов оптимизации в конечномерных пространствах;
- современные проблемы соответствующих разделов численных методов решения оптимизационных задач;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла «Численные методы оптимизации»;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных оптимизационных задач.

уметь:

- понять поставленную оптимизационную задачу и провести ее формализацию;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных оптимизационных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждения;
- самостоятельно находить алгоритмы решения оптимизационных задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представлять математические знания в области численных методов оптимизации в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками решения оптимизационных задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых разделов методов оптимизации;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов оптимизации;
- предметным языком теории и методов оптимизации, навыками грамотного описания решения соответствующих задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Перечень вопросов представлен в приложенном документе.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень вопросов представлен в приложенном документе.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена, обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой.

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

В каждом семестре аттестация по дисциплине осуществляется в три этапа:

1. На первом этапе проводится семестровая письменная контрольная работа;
2. На втором этапе после контрольной работы студенты сдают два домашних задания;
3. На третьем этапе студенты проходят аттестацию в форме устного теоретического экзамена.

Контрольная работа

Предлагается четыре варианта контрольной работы, каждый из которых содержит четыре задачи.

Срок написания контрольной работы – в период с 5 по 12 декабря в осеннем семестре, с 5 по 12 мая в весеннем семестре.

Пример варианта контрольной работы в весеннем семестре

1. Сформулировать следующую задачу в виде задачи линейного программирования, построить для этой задачи двойственную, решить ее с помощью М-метода, восстановить решение исходной задачи.

$$\max(x + y)$$

$$2|x - 1| + |y - 2| \leq 2$$

2. Методом сопряженных градиентов решить задачу:

$$\min f(x), x \in \mathbb{R}^3, \quad \text{где } f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_2 + x_3$$

$$x_0 = (0, 1, 0).$$

3. Методом модифицированной функции Лагранжа решить задачу:

$$\min 3x^2 + 2xy + y^2,$$

$$\text{при условии } x + 2y \geq 1.$$

4. Методом штрафных функций решить задачу:

$$\min (x - y)^2 + (y - z)^2,$$

$$\text{при условии } x + 2y + z \leq 1,$$

$$x + z = 2.$$

Домашние задания

В каждом семестре студенты сдают по два домашних задания.

Срок сдачи заданий – до 25 декабря в осеннем семестре и до 25 мая в весеннем семестре.

ЗАДАНИЕ № 1

1. Используя геометрические интерпретации, решить следующие экстремальные задачи:

а) $\text{extr}(2x_1^2 - x_2^2)$ при условии $2|x_1|^\lambda + |x_2|^\lambda \leq 1, \lambda > 0$,

б) $\text{extr}(2|x_1|^\lambda + |x_2|^\lambda)$ при условии $2x_1^2 - x_2^2 \leq 1, \lambda > 0$,

в) $\text{extr}(2x_1^2 - x_2^2)$ при условии $2|x_1|^\lambda + |x_2|^\lambda = 1, \lambda > 0$,

г) $\text{extr}(2|x_1|^\lambda + |x_2|^\lambda)$ при условии $2x_1^2 - x_2^2 = 1, \lambda > 0$.

Указать, какие из решений этих задач являются локальными, глобальными, строгими, острыми.

2. Решить задачу:

$$\text{extr} \left[(1-x-2y) \cdot xy^2 + (1-y-2z) \cdot y \cdot z^2 \right].$$

3. Найти экстремумы в следующей задаче:

$$\text{extr} \left(x^2 - xy + 2y^2 \right), \quad \text{если } x^2 - 2y^2 = 4.$$

4. Решить задачу:

$$\text{extr } c^T x, \quad x \in G \subset R^n, \quad \text{если}$$

$$G = \left\{ x \in R^n : x^T A x + b^T x = 0 \right\}, \quad A \in R^{n \times n}.$$

$$\text{Рассмотреть случаи: } A > 0 \quad \text{и} \quad A \geq 0.$$

5. Пусть

$$G_1, \dots, G_m \quad - \text{произвольные множества в } R^n.$$

$$\text{Доказать, что } \text{Aff} \left(\sum_{i=1}^m G_i \right) = \sum_{i=1}^m \text{Aff} G_i,$$

$$\text{Cone} \left(\bigcup_{i=1}^m G_i \right) = \sum_{i=1}^m \text{Cone } G_i,$$

$$\text{Conv} \left(\sum_{i=1}^m G_i \right) = \sum_{i=1}^m \text{Conv } G_i.$$

6. Найти опорные гиперплоскости ко множеству G в точках экстремума для задачи:

$$\min \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2, \quad \text{если } x \in G \subset R^n, \quad \text{где}$$

$$G = \left\{ x \in R^n : (x-a)^T (x-a) + c^T x \leq 1 \right\}, \quad a, c \in R^n, \lambda_i > 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$a^T a > 1.$$

7.

1) Пусть $G \subset R^n$ – замкнутое множество, $\bar{x} \in G$. Найти множество

$Y \subset R^n : \forall a \in Y$ точка $\bar{x} = \pi_G(a)$. Рассмотреть случаи выпуклого и невыпуклого множеств G .

2) Пусть даны $\bar{x} \in R^n$ и выпуклый конус $K \subset R^n$. Пусть $Y = \bar{x} + K, a \in Y$. Найти множества

$G \subset R^n : \bar{x} \in G$ и $\forall a \in Y$ точка $\bar{x} = \pi_G(a)$.

3) Пусть $G_1, G_2 \subset R^n$ - замкнутые множества и $\bar{x} = G_1 \cap G_2$ - единственная точка. Каким условиям удовлетворяют множества G_1 и G_2 , если:

а) $\bar{x} = \pi_{G_1}(a) \forall a \in G_2$.

б) $\bar{x} = \pi_{G_1}(a) = \pi_{G_2}(b) \forall a \in G_2, \forall b \in G_1$.

8. 1) Показать, что конусом, сопряженным к конусу

$$G = \{z \in R^n : a_i^T z \leq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad a_i^T z = 0, \quad i = \overline{m+1, \ell}\},$$

является конус

$$G^* = \left\{ P \in R^n : P = -\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i + \sum_{i=m+1}^{\ell} \lambda_i a_i; \quad \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m} \right\}.$$

2) Найти G^*, G^{**}, G^{***} для

$$G = \{x \in R^2 : \|x_1\| - 2 + \|x_2\| - 3 \leq 1\}.$$

9. Определить расстояние между множествами $G_1 \subset R^n$ и $G_2 \subset R^n$, а также уравнения двух разделяющих гиперплоскостей, одна из которых является опорной ко множеству G_1 , другая – ко множеству G_2 в точках, для которых расстояние минимально

$$G_1 = \{x \in R^n : x^T x \leq 1\}, \quad G_2 = \{x \in R^n : (x-a)^T (x-a) \leq 1\},$$

$$\|a\| > 2.$$

Соответствующую задачу оптимизации решить методом множителей Лагранжа.

10.

а) Пусть даны матрицы $A \in R^{n \times n}$, $U \in R^{n \times m}$, $V \in R^{n \times m}$, $1 \leq m \leq n$,

$$\det A \neq 0, \quad \det(E_m + V^T A^{-1} U) \neq 0.$$

Доказать, что

$$(A + U \cdot V^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} U (E_m + V^T A^{-1} U)^{-1} V^T A^{-1}.$$

Рассмотреть частные случаи:

1) $A = E_n$; 2) $m = 1$; 3) $A = E_n$, $m = 1$.

Здесь E_m и E_n – единичные матрицы порядка m и n соответственно.

Для всех случаев найти $(A + \lambda UV^T)^{-1}$, где число $\lambda \neq 0$.

б) Пусть даны матрицы $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{n \times n}$,

$$\det A \neq 0, \quad \det(E_n + BA^{-1}) \neq 0.$$

Доказать, что

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(E_n + BA^{-1})^{-1}BA^{-1} = A^{-1} - (A + B)^{-1}BA^{-1}.$$

Рассмотреть частный случай, когда $A = E_n$.

ЗАДАНИЕ № 2

1. Найти опорную функцию для множеств:

$$G_1 = \left\{ x \in R^n : \frac{1}{2} x^T A x + a^T x + b \leq 0 \right\}, \quad A = A^T > 0,$$

$$G_2 = \left\{ x \in R^2 : x_2 < 0; \quad x_1 \cdot x_2 \leq 1 \right\}.$$

2. Найти $\partial f_G(X)$ функции $f(x) = \max(|x_1 + x_2 - x_3|, |x_1 - x_2 + 2x_3|)$ на множестве

$$G = \left\{ x \in R^3 : x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 \leq 4; \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

3. Показать, что экстремальная задача регулярна: $\min f(x)$,

$$a_i^T x \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$a_i^T x = b_i, \quad i = \overline{m+1, \ell}, \quad x \in R^n.$$

4. Решить экстремальную задачу:

$$\text{extr} |x_1 - x_2 - 2x_3|, \quad x \in R^3,$$

если

$$2 \leq x_i \leq 7, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Показать, что в точках решения выполнено необходимое и достаточное условие экстремума.

5. Решить задачу

$$\text{extr} (2x_2 - x_1^2), \quad x \in G, \quad \text{где}$$

$$G = \left\{ x \in R^2 : \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} \leq 4 \right\},$$

для чего найти точки x^* , где $\nabla f(x^*) \in T^*(x^*)$ и $-\nabla f(x^*) \in T^*(x^*)$, и выяснить, какие из них являются точками локального и глобального, строгого и острого экстремума.

6. Решить задачу БМ:

$$\min \left(\frac{1}{2} x^T A x + \alpha |c^T x - b| \right), \quad A > 0,$$

$$x \in R^n, \quad \alpha > 0, \quad b \neq 0.$$

7. Решить задачу

$$\text{extr} 2x_2 \cdot x_3 + x_1, \quad \text{если}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 0; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4.$$

8. Решить методом множителей Лагранжа задачу:

$$\min x_2, \quad \text{если}$$

$$x_2 \geq 0; \quad -x_2^3 + x_1 \leq 0; \quad -x_2^3 - x_1 \leq 0, \quad x_2 \leq 1.$$

9. Построить задачу, двойственную к следующей:

$$\min \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \right), \quad \lambda_i > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in G,$$

$$G = \left\{ x \in R^n : a^T x \leq b, \quad c^T x = d \right\}.$$

10. Найти функции, сопряженные к функциям:

а) $f(x) = c^T x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2, \quad x \in R^n, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1 \dots n.$

б) $f(x) = \sqrt{1 + x^T x}, \quad x \in R^n.$

11. Для задачи $\min (-x^2 + y^2)$, где $3x^2 + y^2 \leq 3, \quad -x + 2y \leq 0$, найти седловую точку, решая задачу «в лоб», а именно:

- а) считая множители Лагранжа параметрами, найти $x^*(\lambda_1, \lambda_2), \quad y^*(\lambda_1, \lambda_2)$ из решения задачи $\min L(x, y, \lambda_1, \lambda_2); \quad x, y \in R^2;$

- б) найти λ_1^*, λ_2^* из решения задачи

$$\max L(x^*(\lambda_1, \lambda_2), y^*(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1, \lambda_2) \text{ и } x^*(\lambda_1^*, \lambda_2^*), y^*(\lambda_1^*, \lambda_2^*), \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0;$$

в) сравнить решения $x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*$ с решением, полученным из условия оптимальности ККТ.

12. В выпуклой задаче

$$\min \left[|x-2| + (y-2)^2 \right], \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G, \\ G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 : 2x + y \geq 8 \right\}$$

а) найти множество стационарных точек:

$$S = \left\{ x, y, \lambda : 0 \in \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x, y}, \lambda(2x + y - 8) = 0, \right\}, \quad \lambda \geq 0.$$

б) решить двойственную задачу: $\max \xi(\lambda)$, где $\lambda \geq 0$

$$\xi(\lambda) = \inf L(x, y, \lambda) \quad \text{по } x, y \in R^2.$$

в) найти седловую точку (x^*, y^*, λ^*) функции Лагранжа.

ЗАДАНИЕ № 3

1. Найти стационарные точки и точки экстремума функции

$$f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 - 2x_1^2 - 4x_2^2.$$

Сделать по одному шагу методом наискорейшего спуска (НС) из начальных точек

$$x_0 = (0,8; 0,8), \quad x_0 = (-0,8; -0,8).$$

Оценить значение коэффициента скорости сходимости в методе НС для итерационных процессов, для которых

$$x_0 \in G = \left\{ x \in R^2 : |x_i - x_i^*| \leq 0,2, \quad i = \overline{1,2} \right\},$$

x^* – точки локальных минимумов, к которым сходится метод НС из указанных точек x_0 . Найти предельное значение коэффициента скорости сходимости.

2. Для решения задачи $\min (x^2 - 2x)$ при условии $-1 \leq x \leq 5$ с ε -точностью методами дихотомии, золотого сечения и Фибоначчи найти число вычислений функции для $\varepsilon = 10^{-7}$ и $\varepsilon = 10^{-10}$.

3. Какую скорость сходимости к точке минимума имеет метод Ньютона при минимизации функций $f(x), x \in R^n$, если

а) $f(x) = \frac{1}{2p} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{2p}, \lambda_i > 0, p=1, 2, \dots;$

б) $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + \frac{1}{2p} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{2p},$

где $A = A^T > 0; \quad p=1, 2, \dots?$

4. Пусть векторы $a_i \in R^n, \quad i = \overline{1, n}$ – линейно независимы, $A = A^T$. Построим систему векторов $h_i \in R^n$:

$$h_1 = a_1;$$

$$h_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_k^T A h_i}{h_i^T A h_i} h_i, \quad k = \overline{2, n},$$

при этом система $a_i \in R^n$, $i = \overline{1, n}$, такова, что $h_i^T A h_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$.

Доказать, что векторы $h_i \in R^n$, $i = \overline{1, n}$, сопряжены относительно матрицы A , а также справедливо соотношение

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{h_i h_i^T}{h_i^T A h_i}. \quad (*)$$

Используя формулу (*), решить систему линейных уравнений (**) предварительно ее симметризовав, для

$$a_i = e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)^T, \quad i = \overline{1, 3}: \\ \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4, \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned} \quad (**)$$

6. Определить скорость сходимости метода Ньютона и метода наискорейшего спуска и окрестность, из которой эти методы сходятся к оптимальному решению следующей задачи:

$$\min -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^T x}, \quad x \in R^n.$$

Замечание. При решении задачи замену переменных $r = \|x\|$ не использовать.

7. Найти минимум функции методом Ньютона и методом сопряженных градиентов, где

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_1 + x_2 - x_3, \quad x \in R^3,$$

$$x_0 = (0, 0, 1).$$

Найти $\min 3(x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 2)^2 + (x_3 - 1)^2$, $x \in R^3$, при условиях: $2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$; $2x_1 - x_2 + x_3 = 3$ методом множителей Лагранжа. Построить для данной задачи двойственную и решить ее. Сравнить решения этих задач.

9. Для задачи $\min f(x)$, $x \in G$, f — непрерывно дифференцируемая функция. Сформулировать необходимые условия экстремума, если

- 1) $G = \{x \in R^n : a \leq x \leq b\}$;
 - 2) $G = \{x \in R^n : Ax = b, b \in R^m, m < n, \text{rang } A = m\}$;
 - 3) $G = \{x \in R^n : x^T A x \leq 1, A = A^T\}$.
- Рассмотреть случаи $A \geq 0$ и $A > 0$;
- 4) $G = \{x \in R^n : x \geq 0\}$.

Сформулировать для указанных задач достаточные условия экстремума первого порядка, второго порядка, достаточные условия острого экстремума. Сформулировать для задачи математического программирования необходимые и достаточные условия оптимальности первого и второго порядков.

10. Пусть функции f и φ_i , $i = \overline{1, m+l}: R^n \rightarrow R$, непрерывно дифференцируемы на R^n . Рассмотрим экстремальные задачи:

А) Найти: $\min f(x), x \in G \subset R^n$.

Б) Найти: $\min f(x), (x, y) \in Y \subset R^{n+m}$,

где $G = \{x \in R^n : \varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, \varphi_i(x) = 0, i = \overline{m+1, l}\}$,

$Y = \{x \in R^n, y \in R^m : \varphi_i(x) + y_i^2 = 0, i = \overline{1, m}, \varphi_i(x) = 0, i = \overline{m+1, l}\}$.

- 1) Доказать, что точка $x^* \in G$ является локальным решением задачи А тогда и только тогда, когда существует точка $(x^*, y^*) \in Y$, где $x^* \in G$, являющаяся локальным решением задачи Б.
- 2) Доказать, что для всех точек $x^* \in G$ задачи А существует $y^* \in R^m$ такой, что $(x^*, y^*) \in Y$ является стационарной точкой задачи Б.
- 3) Верно ли, что для стационарной точки $(x^*, y^*) \in Y$ задачи Б точка $x^* \in G$ является стационарной точкой задачи А?

ЗАДАНИЕ № 4

1. Для задачи ЛП

$$\begin{aligned} \max \quad & (x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4), \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ & x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}, \end{aligned}$$

построить двойственную задачу, решить её, после чего решить прямую задачу.

2. Найти решение задачи

$$\begin{aligned} \max \quad & (x_1 + \lambda x_2), \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3, \quad x_2 + p \leq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

зависящее от параметров p и λ .

3. Следующую задачу линейного программирования решить табличным симплекс-методом [1]:

$$\begin{aligned} \max \quad & (4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4), \\ & 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq A, \\ & 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 20B, \quad x_i \geq 0, \\ & i = \overline{1, 4}, \quad A \in [15, 30], \quad B \in [3, 10]. \end{aligned}$$

Найти решение соответствующей двойственной задачи.

Указание. Конкретные значения параметров A и B получить у своего преподавателя.

4. Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Методом внешних штрафных функций решить задачу 1:

$$\min \frac{1}{2} x^T A x, \text{ при условии } 2x_1 + 4x_2 = 6, \quad x \in R^2. \text{ Методом внутренних штрафных функций}$$

решить задачу 2: $\min \frac{1}{2} x^T A x$ при условии $3x_1 + 6x_2 \geq 8, \quad x \in R^2$.

5. Решить методом точных внешних штрафных функций задачу: найти

$$\begin{aligned} \min \quad & (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3), \quad \text{где } x \in R^3 \text{ и} \\ & \text{а) } (x_1 - a_1)^2 + 2(x_2 - a_2)^2 + 3(x_3 - a_3)^2 \leq b, \quad b > 0. \\ & \text{б) значение параметров } a_i, c_i, b, \quad i = \overline{1, 3}, \\ & \text{взять у своего преподавателя.} \end{aligned}$$

6. Методом условного градиента решить задачу: найти

$\max (2x_1^2 - x_2^2)$ при условиях $x_1 + 2x_2 \leq 8$; $x_1 - 2x_2 \leq 4$; $-x_1 + 2x_2 \leq 4$; $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$. Начальная точка $x_0 = (1, 0)$. Длина шага a вдоль направления h определяется из условия одномерной максимизации.

7. Методом проекции градиента (схема № 2) решить задачу $\max (2x_1^2 - x_2^2)$ при условиях: $x_1 - |x_2 - 4| \geq 0$; $x_2 - 3x_1 \geq 0$, Начальная точка $x_0 = (0, 5)$.

8. Методом возможных направлений решить следующую задачу: $\min(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 3)^2$ при условиях: $x_1 + 2x_2 \leq 4$, $x_1^2 - x_2 \leq 0$, $x_1 \geq 0$. Начальная точка $x_0 = (0, 1)$.

9. Методом модифицированных функций Лагранжа решить задачи.

1) $\min \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$, $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, если $Ax = b$, $b \in R^n$, $m < n$,

$\text{rang} A = m$, $Aa \neq b$.

2) $\min \left[(x_1 + a_1)^2 + 2(x_2 + a_2)^2 + 3(x_3 + a_3)^2 \right]$, где $x \in R^3$ и $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \geq b$, значения параметров a_i, c_i, b , $i = \overline{1, 3}$, взять у своего преподавателя.

Найти предельное значение множителя Лагранжа λ_k . Оценить коэффициенты скорости сходимости последовательностей $x_k, \lambda_k, k = 1, 2, \dots$

Указание. При необходимости воспользоваться формулами из задачи № 11, задание № 1.

10. Методом параметризации целевой функции решить задачу $\min(x_1 - 2x_2 + x_3)$ при условии $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$, $x_i \geq 0$, $i = \overline{1, 3}$.

11. Найти барьерно-проективным методом расстояние от начала координат до выпуклой оболочки точек $z_i \in R^2$, $i = \overline{1, 3}$: $z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Указание. Свести задачу к задаче условной минимизации на симплексе.

Экзамен

Экзамен проводится в соответствии с расписанием.

Перечень контрольных вопросов для экзамена в 6-ом семестре.

1. Понятие итерационного метода решения оптимизационных задач, алгоритмическое отображение метода. Одношаговые и многошаговые схемы, порядок метода.

2. Дать определения сходимости к решению с разной скоростью (линейной, сверхлинейной и квадратичной). Какие существуют критерии остановки вычислительного процесса?

3. Что понимается под унимодальной функцией на отрезке? В какой точке унимодальная функция достигает своего минимума на отрезке?

4. Дать описание методов поиска минимума унимодальной функции на отрезке: метода дихотомии, метода золотого сечения и метода Фибоначчи. Для какого из этих методов отрезок локализации решения оказывается наименьшим после выполнения заданного количества вычислений значений функции?

5. В чем заключаются методы спуска для задачи безусловной минимизации? Привести условие, гарантирующее, что данное направление является направлением

спуска для дифференцируемой функции. Привести описание общей схемы методов спуска.

6. Привести разные правила выбора шага в методах спуска: правило одномерной минимизации, правило Армихо, правило Голдстейна, правило постоянного шага.

7. Указать общую схему метода градиентного спуска. Привести теорему о сходимости метода к стационарной точке при выборе шага по правилу Армихо. Какой скоростью сходимости обладает метод градиентного спуска?

8. Что такое метод наискорейшего спуска? Каковы свойства и сходимость метода для сильно выпуклой функции? Чему равен шаг в этом методе при минимизации квадратичной функции?

9. Указать общую схему метода Ньютона для минимизации сильно выпуклой дважды дифференцируемой функции. При каких условиях этот метод будет иметь сверхлинейную и квадратичную скорости сходимости? Сколько итераций потребуется методу Ньютона, чтобы найти точку минимума выпуклой квадратичной функции? Расширение области сходимости метода Ньютона за счет использования переменного шага.

10. Что такое сопряженные направления относительно некоторой матрицы? Свойства этих направлений. Дать описание общей схемы методов сопряженных направлений.

11. Описать схему метода сопряженных градиентов для минимизации выпуклой квадратичной функции (метод Хестенса-Штифеля). Каким образом выбираются шаги в этом методе? Что можно сказать о градиентах функции в точках, вырабатываемых итерационным процессом? За сколько итераций находится точка минимума?

12. Описать схему метода сопряженных градиентов для минимизации общей неквадратичной функции (метод Флетчера-Ривса). Сформулировать теорему о сходимости метода для сильно выпуклой функции.

13. Что такое крайняя точка множества (угловая точка полиэдрального множества)?

В чем заключается алгебраический критерий угловой точки? Существует ли в задаче линейного программирования решение, которое является угловой точкой допустимого множества?

14. Вид угловой точки допустимого множества задачи линейного программирования в канонической форме. Понятие базиса угловой точки, базисные и небазисные переменные.

15. Привести описание симплекс-метода для решения задачи линейного программирования (в канонической форме). В чем заключается его суть? Что такое оценки замещения в симплекс-методе? Привести достаточные условия минимума (максимума) через оценки замещения.

16. Проведение вычислений симплекс-методом с помощью его табличной формы. Что такое ведущий элемент?

17. Поиск начальной угловой точки и ее базиса с помощью двухфазного симплекс-метода. В чем заключается М-задача, соответствующая исходной задаче линейного программирования?

18. Что такое допустимое множество простой структуры? Привести примеры таких множеств.

19. Дать описание метода проекции градиента для задачи минимизации дифференцируемой функции на множестве простой структуры. Сформулировать условия сходимости этого метода. Какими способами можно выбирать шаг в методе?

20. Дать описание метода условного градиента для задачи минимизации дифференцируемой функции на множестве простой структуры. Сформулировать условия сходимости этого метода. Какими способами можно выбирать шаг в методе?

21. Дать общее описание метода возможных направлений. Привести варианты вспомогательных задач для этого методе.

22. Описать общую идею построения штрафных функций. Дать описание метода внешних штрафных функций. Что такое внешний штраф и коэффициент штрафа? Как можно построить внешний штраф с помощью внешних свертывающих функций? Привести примеры внешних свертывающих функций.

23. Дать описание метода внешних штрафных функций для решения задач математического программирования. Сформулировать теорему сходимости метода. Привести оценки оптимальных значений вспомогательных задач при наличии седловой точки у функции Лагранжа.

24. Что такое точная внешняя штрафная функция? Привести пример такой функции. Дать оценку снизу коэффициента штрафа с помощью множителей Лагранжа.

25. Привести описание метода внутренних штрафных функций (метода барьерных функций). Что такое внутренний штраф (барьер) и внутренняя свертывающая функция? Привести примеры внутренних свертывающих функций и внутренних штрафов, построенных с их помощью. Сформулировать теорему о сходимости метода.

26. Привести описание метода параметризации целевой функции (метода внешних центров, метода Моррисона). Два способа пересчета оценок снизу оптимального

значения в задаче. Сформулировать теорему о сходимости метода. Указать оценки для оптимальных значений во вспомогательных задачах минимизации.

27. Зачем требуется строить модифицированные функции Лагранжа? Как можно построить модифицированную функцию Лагранжа для задачи с ограничениями типа равенства? Каким способом на ее основе можно построить модифицированную функцию Лагранжа для задач с ограничениями типа неравенства?

28. Привести описание метода модифицированных функций Лагранжа для задачи математического программирования. Сформулировать теорему о сходимости метода. Какими преимуществами обладает метод модифицированных функций Лагранжа по сравнению с методом внешних штрафных функций?

29. В чем заключается постановка задачи многокритериальной оптимизации? Каким образом определяются множество оптимальных по Парето и слабо оптимальных по Парето (оптимальных по Слейтеру) решений? Что понимается под оболочкой Эджворта-Парето в многокритериальной оптимизации?

Пример экзаменационного билета в весеннем семестре:

Билет 1.

1. Унимодальные функции одной переменной. Метод дихотомии, его свойства и сходимость.
2. Задача