

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Проректор по учебной работе и
довузовской подготовке**

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Вычислительные методы алгебры
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра информатики и вычислительной математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составили:

Е.Е. Тыртышников, д-р физ.-мат. наук, профессор

С.А. Горейнов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Н.Л. Замарашкин, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры информатики и вычислительной математики 31.08.2023

Аннотация

В курсе студенты ознакомятся с обзором основных понятий и задач вычислительной алгебры, изучат методы решения алгебраических уравнений, матричные методы, методы минимальных невязок. Будут рассмотрены различные частные случаи: разреженные матрицы, блочно-малоранговые матрицы. Будет изложена теория спектральных задач линейной алгебры.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Освоение студентами фундаментальных знаний в области вычислительной алгебры, изучение современных методов и областей их практического применения.

Задачи дисциплины

- формирование базовых знаний в области новейших вычислительных методов для решения алгебраических задач;
- обучение студентов современным методам и ознакомление с их приложениями;
- формирование подходов к выполнению исследований студентами по математическому моделированию.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- методы численного решения алгебраических задач.

уметь:

- осуществлять математическую постановку физических задач;
- применять методы численного анализа к решению физических задач;
- исследовать полученные решения в сопоставлении с особенностями решаемой задачи.

владеть:

- базовыми знаниями в области численного анализа и методами их использования в профессиональной деятельности;
- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физических задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Обзор основных понятий и задач вычислительной алгебры	2			6
2	Методы решения алгебраических уравнений	6			6
3	Матричные методы	6			6
4	Пространства Крылова и методы минимальных невязок	2			6
5	Методы для разреженных матриц.	2			6
6	Методы для блочно-малоранговых матриц	4			6
7	Спектральные задачи линейной алгебры	4			6
8	Частичная проблема собственных значений	2			6
9	Методы решения полиномиальных уравнений	2			12
Итого часов		30			60
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Обзор основных понятий и задач вычислительной алгебры

Обзор основных понятий и задач вычислительной алгебры. Алгоритмическая разрешимость. Вычислительная сложность. Разделение переменных и ранг. Тензорный ранг многомерных матриц. Быстрые алгоритмы умножения матриц.

2. Методы решения алгебраических уравнений

Сингулярное разложение матриц и операторов. Разложение Таккера многомерных матриц. Тензорный поезд. Приближения малого ранга. Принцип максимального объема. Крестовые алгоритмы строчно-столбцовой аппроксимации матриц.

Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений общего вида. LU-разложение. QR-разложение и процессы ортогонализации. Анализ влияния малых возмущений и ошибок округления. Числа обусловленности.

Задачи наименьших квадратов. Псевдорешения. Неустойчивость нормального псевдорешения. Методы регуляризации.

3. Матричные методы

Циркулянтные матрицы и дискретное преобразование Фурье. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье. Периодическая и аperiodическая свертка. Теплицевы матрицы и их обобщения. Блочные и многоуровневые матрицы.

Разреженные решения систем линейных алгебраических уравнений и разреженные аппроксимации. Жадные алгоритмы. Вейвлет-преобразования.

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод простой итерации, его анализ и обобщения. М-матрицы и неотрицательные матрицы. Метод Качмажа

4. Пространства Крылова и методы минимальных невязок

Пространства Крылова и методы минимальных невязок. Метод сопряженных градиентов. Применение многочленов Чебышева для оценки скорости сходимости. Спектральные распределения и кластеры. Предобуславливатели. Циркулянтные предобуславливатели для теплицевых матриц.

5. Методы для разреженных матриц.

Методы для разреженных матриц. Ленточные и профильные матрицы. Перестановки строк и столбцов с целью минимизации заполнения. Неполное LU-разложение.

6. Методы для блочно-малоранговых матриц

Методы для блочно-малоранговых матриц. Алгебраический мультипольный метод.

Применения к решению интегральных уравнений. Методы для многоуровневых квазисепарабельных матриц.

7. Спектральные задачи линейной алгебры

Спектральные задачи линейной алгебры. Ортогональное приведение к почти трезугольной (хессенберговой) форме. QR-алгоритм решения полной проблемы собственных значений. Ускорение сходимости с помощью сдвигов. Неустойчивость собственных значений и вычисление псевдоспектра.

8. Частичная проблема собственных значений

Частичная проблема собственных значений. Метод итерации подпространства. Метод Ланцоша для эрмитовых матриц. Метод bidiagonalization для общих матриц.

9. Методы решения полиномиальных уравнений

Методы решения полиномиальных уравнений. Базисы Гребнера. Алгоритм Бухбергера.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Численные методы [Текст] : в 2 кн. : учебник для вузов / Н. Н. Калиткин, Е. А. Альшина .— М. : Академия, 2013 .— (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика) .— Кн. 1 : Численный анализ. - 2013. - 304 с.

Дополнительная литература

1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : МФТИ, 2011 .— 544 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Информационные ресурсы: доступные через Internet электронные конспекты лекций, учебные пособия и сборники задач, разработанные для данного курса.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, алгоритмы.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра информатики и вычислительной математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчики:

Е.Е. Тыртышников, д-р физ.-мат. наук, профессор
С.А. Горейнов, канд. физ.-мат. наук, доцент
Н.Л. Замарашкин, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Вычислительные методы алгебры» обучающийся должен:

знать:

- методы численного решения алгебраических задач.

уметь:

- осуществлять математическую постановку физических задач;
- применять методы численного анализа к решению физических задач;
- исследовать полученные решения в сопоставлении с особенностями решаемой задачи.

владеть:

- базовыми знаниями в области численного анализа и методами их использования в профессиональной деятельности;
- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физических задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры типовых вопросов для текущего контроля:

1. Пространства Крылова и методы минимальных невязок.
2. Метод сопряженных градиентов. Применение многочленов Чебышева для оценки скорости сходимости.
3. Спектральные распределения и кластеры. Предобусловливатели. Циркулянтные предобусловливатели для теплицевых матриц.
4. Методы для разреженных матриц. Ленточные и профильные матрицы. Перестановки строк и столбцов с целью минимизации заполнения. Неполное LU-разложение.
5. Методы для блочно-малоранговых матриц. Алгебраический мультипольный метод. Применения к решению интегральных уравнений.
6. Методы для многоуровневых квазисепарабельных матриц.
7. Спектральные задачи линейной алгебры. Ортогональное приведение к почти треугольной (хессенберговой) форме.
8. QR-алгоритм решения полной проблемы собственных значений. Ускорение сходимости с помощью сдвигов. Неустойчивость собственных значений и вычисление псевдоспектра.
9. Частичная проблема собственных значений. Метод итерации подпространства. Метод Ланцоша для эрмитовых матриц. Метод bidiagonalization для общих матриц.
10. Методы решения полиномиальных уравнений. Базисы Гребнера. Алгоритм Бухбергера.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Обзор основных понятий и задач вычислительной алгебры. Алгоритмическая разрешимость. Вычислительная сложность. Разделение переменных и ранг. Тензорный ранг многомерных матриц.
2. Быстрые алгоритмы умножения матриц.
3. Сингулярное разложение матриц и операторов.
4. Разложение Таккера многомерных матриц. Тензорный поезд.
5. Приближения малого ранга. Принцип максимального объема. Крестовые алгоритмы строчно-столбцовой аппроксимации матриц.
6. 3. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений общего вида.
7. LU-разложение. QR-разложение и процессы ортогонализации. Анализ влияния малых возмущений и ошибок округления. Числа обусловленности.
8. Задачи наименьших квадратов. Псевдорешения. Неустойчивость нормального псевдорешения. Методы регуляризации.
9. Циркулянтные матрицы и дискретное преобразование Фурье. Алгоритмы быстрого преобразования Фурье.
10. Периодическая и аperiodическая свертка. Теплицевы матрицы и их обобщения. Блочные и многоуровневые матрицы.
11. Разреженные решения систем линейных алгебраических уравнений и разреженные аппроксимации.
12. Жадные алгоритмы. Вейвлет-преобразования.
13. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод простой итерации, его анализ и обобщения. М-матрицы и неотрицательные матрицы.
14. Метод Качмажа

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой.

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на дифференцированного зачета не должен превышать одного астрономического часа.