

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Прикладная математика: искусство и ремесло вычислений
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 75 всего, в том числе:

лекции: 45 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 120 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Э.Н. Гордеев, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 15.05.2023

## Аннотация

Программа состоит из 20 разделов, однако, скорость прохождения материала будет зависеть от скорости усвоения его студентами. В случае, если времени не хватит, несколькими разделами придется пожертвовать. Предполагается заметное количество домашних работ, включающих в себя необходимость численного решения, построения графиков и анализа полученных численно решений. Студенты должны быть проинформированы, что прохождение данного курса будет трудоемко. Цель курса заключается в том, чтобы подготовить слушателей к самостоятельной работе в различных научных лабораториях: уметь строить математические модели, использовать и аналитические, и компьютерные методы, а также их комбинации для анализа свойств решений таких моделей, уметь графически представлять и анализировать полученные результаты.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Подготовить слушателей к самостоятельной работе в различных научных лабораториях: уметь строить математические модели, использовать и аналитические, и компьютерные методы, а также их комбинации для анализа свойств решений таких моделей, уметь графически представлять и анализировать полученные результаты.

#### Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области аналитического и численного решения дифференциальных уравнений;
- приобретение слушателями навыков владения вычислительными методами;
- приобретение умений анализа дифференциальных уравнений;
- приобретение навыков построения математических моделей в форме дифференциальных уравнений.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1 Определяет приоритеты профессиональной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки
	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия теории дифференциальных уравнений;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач.

уметь:

- понять поставленную задачу и построить математические модели;
- использовать свои знания для решения дифференциальных уравнений;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждения;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач;
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования дифференциальных уравнений;
- предметным языком и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Конечно-разностные уравнения и итерационные процессы.	9	6		24
2	Нелинейные ОДУ для моделей естествознания.	9	6		24
3	Краевые задачи и задачи Штурма – Лиувилля для ОДУ.	9	6		24
4	Задачи с малым параметром. Сингулярные возмущения ОДУ.	9	6		24
5	Квазилинейные и нелинейные урчп. Характеристики. Градиентная катастрофа. Условия Гюгонио – Ренкина.	9	6		24
Итого часов		45	30		120
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

###### 1. Конечно-разностные уравнения и итерационные процессы.

Банковский процент, размножение при отсутствии лимитирующих факторов, последовательность Фибоначчи, комбинаторные приложения. Гамма-функция и уравнения с переменными коэффициентами. Размерность пространства решений. Постоянные коэффициенты: простые и кратные корни характеристического уравнения. Системы разностных уравнений. Модель Лесли. Марковские цепи и перераспределение вероятностей. Задача о часах. Методы Герона, Ньютона, Ньютона – Рафсона. Множество стационарных точек, периодические решения. Бассейны притяжения. Фракталы.

## 2. Нелинейные ОДУ для моделей естествознания.

Модели Лотки – Вольтерры, фон Бергаланфи, Ферхюльста (мягкий и жесткий планы вылова), Ланкастера, хим. кинетики, борьбы видов за общий ресурс. Дискретный аналог модели Ферхюльста. Бифуркации. Краевая задача для разностного уравнения. Игра с нулевой суммой.

## 3. Краевые задачи и задачи Штурма – Лиувилля для ОДУ.

Примеры задач. Приведение к самосопряженному виду. Свойства спектра. Теорема Фишера – Куранта. Теоремы Штурма. Теория возмущений линейных операторов и ее приложения. ОДУ с особенностями.

Уравнения типа Эйлера. Регулярные особые точки. Определяющее уравнение. Теория Фробениуса. Примеры специальных функций.

## 4. Задачи с малым параметром. Сингулярные возмущения ОДУ.

Методы стационарной фазы и перевала. Преобразование Фурье. Обобщенные функции. Линейные уравнения в частных производных: переноса, волновое, колебаний стержня. Формула Даламбера. Задача Коши для урчп. Теорема Коши – Ковалевской. Корректность задачи Коши. Уравнения не типа Коши – Ковалевской. Пример Адамара. Теорема Тихонова. Смешанная краевая задача и условия Шапиро – Лопатинского. Применение преобразования Фурье для получения интегральных формул для задачи Коши.

## 5. Квазилинейные и нелинейные урчп. Характеристики. Градиентная катастрофа. Условия Гюгонио – Ренкина.

Автомодельные решения. Уравнения КдФ и ФКПП. Первые интегралы. Интегральные уравнения Фредгольма. Некорректность и регуляризация. Случайные процессы и поля и их интерполяция. Применение в геофизике. Разностные схемы типа Рунге – Кутты для ОДУ. Разностные схемы для краевой задачи. Компактные схемы. Компактная аппроксимация уравнений Пуассона и Гельмгольца. Компактная схема для уравнения теплопроводности. Компактные схемы для уравнений колебаний струны и стержня. Компактная схема для уравнения Эйлера – Хопфа. Сглаживатели.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

- у преподавателей и слушателей компьютеры с возможностью проведения видеоконференций (вебинаров): графические планшеты, микрофоны, гарнитуры и т.д. – для дистанционного проведения занятий;
- учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система) – для проведения занятий в очном формате.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст]/М. В. Федорюк, -М., Наука, 1983
2. Асимптотика: интегралы и ряды [Текст]/М. В. Федорюк, -М., Наука, 1987

3. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : учеб. пособие для вузов / М. В. Федорюк .— 3-е изд. — М. : ЛИБРОКОМ, 2009 .— 448 с.
4. Метод перевала [Текст]/М. В. Федорюк, -М., Наука, 1977
5. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В И. Арнольд .— 4-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2012 .— 344 с.

#### Дополнительная литература

1. Численные методы [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков .— 2-е изд. — М. ; СПб. : Физматлит, 2001, 2002 .— 632 с.
2. Динамические системы и модели биологии [Текст]/А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов, -М., Физматлит, 2010

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://www.mou.mipt.ru>

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

<http://cvxr.com/cvx/>

- [ems.mipt.ru](http://ems.mipt.ru);
- Программы для графического планшета;
- Системы организации вебинаров.

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий курс "Прикладная математика: искусство и ремесло вычислений", должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные понятия, аксиомы, методы доказательств, подходы и методы разработки мат. моделей, а также способы численного поиска решений.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- программирование;
- численное решение полученных дифференциальных уравнений;
- подготовку к итоговой аттестации.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

**Разработчик:** Э.Н. Гордеев, д-р физ.-мат. наук, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1 Определяет приоритеты профессиональной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки
	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Прикладная математика: искусство и ремесло вычислений» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия теории дифференциальных уравнений;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач.

### уметь:

- понять поставленную задачу и построить математические модели;
- использовать свои знания для решения дифференциальных уравнений;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждения;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач;
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования дифференциальных уравнений;
- предметным языком и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Банковский процент, размножение при отсутствии лимитирующих факторов, последовательность Фибоначчи, комбинаторные приложения.
2. Размерность пространства решений.
3. Системы разностных уравнений.
4. Марковские цепи и перераспределение вероятностей.
5. Методы Герона, Ньютона, Ньютона – Рафсона.
6. Бассейны притяжения.

7. Краевая задача для разностного уравнения.
8. Нелинейные ОДУ для моделей естествознания.
9. Дискретный аналог модели Ферхюльста.
10. Краевые задачи и задачи Штурма – Лиувилля для ОДУ.
11. Приведение к самосопряженному виду.
12. Теорема Фишера – Куранта.
13. Теория возмущений линейных операторов и ее приложения.
14. Уравнения типа Эйлера.
15. Определяющее уравнение.
16. Примеры специальных функций.
17. Методы стационарной фазы и перевала.
18. Обобщенные функции.
19. Формула Даламбера.
20. Теорема Коши – Ковалевской.
21. Уравнения не типа Коши – Ковалевской.
22. Теорема Тихонова.
23. Применение преобразования Фурье для получения интегральных формул для задачи Коши.
24. Характеристики.
25. Условия Гюгонио – Ренкина.
26. Уравнения КдФ и ФКПП.
27. Интегральные уравнения Фредгольма.
28. Случайные процессы и поля и их интерполяция.
29. Разностные схемы типа Рунге – Кутты для ОДУ.
30. Компактные схемы.
31. Компактная схема для уравнения теплопроводности.
32. Компактная схема для уравнения Эйлера – Хопфа. Сглаживатели.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Конечно-разностные уравнения и итерационные процессы.
2. Гамма-функция и уравнения с переменными коэффициентами.
3. Постоянные коэффициенты: простые и кратные корни характеристического уравнения.
4. Модель Лесли.
5. Задача о часах.
6. Множество стационарных точек, периодические решения.
7. Фракталы.
8. Игра с нулевой суммой.
9. Модели Лотки – Вольтерры, фон Берталанфи, Ферхюльста (мягкий и жесткий планы вылова), Ланкастера, хим. кинетики, борьбы видов за общий ресурс.
10. Бифуркации.
11. Примеры задач.
12. Свойства спектра.
13. Теоремы Штурма.
14. ОДУ с особенностями.
15. Регулярные особые точки.
16. Теория Фробениуса.
17. Задачи с малым параметром. Сингулярные возмущения ОДУ.
18. Преобразование Фурье.
19. Линейные уравнения в частных производных: переноса, волновое, колебаний стержня.
20. Задача Коши для урчп.
21. Корректность задачи Коши.
22. Пример Адамара.
23. Смешанная краевая задача и условия Шапиро – Лопатинского.



24. Квазилинейные и нелинейные уравнения в частных производных.
25. Градиентная катастрофа.
26. Автомодельные решения.
27. Первые интегралы.
28. Некорректность и регуляризация.
29. Применение в геофизике.
30. Разностные схемы для краевой задачи.
31. Компактная аппроксимация уравнений Пуассона и Гельмгольца.
32. Компактные схемы для уравнений колебаний струны и стержня.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

#### БРС по курсу «Прикладная математика: искусство и ремесло вычислений»

В течение семестра предполагается постоянное выполнение студентами домашних заданий, проведение двух контрольных работ и получение студентом двух оценок:

- Оценка за контрольные работы, О1, как среднее арифметическое всех оценок за контрольные;
- Оценка за выполнение домашних заданий, О2, ставится преподавателем по результатам работы в семестре по правилам, определяемым преподавателем.

В конце семестра проводится итоговый опрос по знанию студентами основных теоретических положений курса и владению умениями численно решать задачи. Оценка по результатам итогового опроса – О3.

Все оценки O1, O2, O3 ставятся по десятибалльной шкале.

Финальная оценка студента за семестр, OF, определяется по формуле:

$$OF = 0,2 \times O1 + 0,3 \times O2 + 0,5 \times O3.$$

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Экзамен проводится путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.