

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Математические модели механики сплошных сред
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительной физики
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

7 (осенний) - Дифференцированный зачет

8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Всего часов: 180, всего зач. ед.: 4

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: М.Д. Брагин, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры вычислительной физики 27.03.2022

## Аннотация

Курс посвящен изучению уравнения Эйлера, интеграла Бернулли для несжимаемой жидкости и для адиабатических течений, форме трубок тока, интеграла Коши-Лагранжа, плоских безвихревых установившихся течений идеальной несжимаемой жидкости, комплексного потенциала обтекания цилиндра и других ключевых фундаментальных понятий современной гидродинамики. Целью дисциплины является освоение современных методов математического моделирования механики сплошных сред. К задачам дисциплины относятся изучение базовых принципов современных подходов математического моделирования к задачам механики сплошных сред, включая задачи гидродинамики, газовой динамики и твердого деформируемого тела и освоение методов решения прикладных задач с использованием математического аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и тензорного анализа. Студенты после окончания курса будут знать принципы построения математических моделей МСС, основные математические постановки задач гидродинамики, газодинамики и теории упругости. Они будут уметь выводить основные уравнения задач гидродинамики, газодинамики и теории упругости, использовать базовые принципы математического моделирования в МСС при решении задач и владеть математическим аппаратом включая обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, тензорный анализ.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Освоение современных методов математического моделирования механики сплошных сред.

#### Задачи дисциплины

Изучение базовых принципов современных подходов математического моделирования к задачам механики сплошных сред, включая задачи гидродинамики, газовой динамики и твердого деформируемого тела. Освоение методов решения прикладных задач с использованием математического аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и тензорного анализа.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Принципы построения математических моделей МСС.

Основные математические постановки задач гидродинамики, газодинамики и теории упругости.

уметь:

Выводить основные уравнения задач гидродинамики, газодинамики и теории упругости, использовать базовые принципы математического моделирования в МСС при решении задач.

владеть:

Математическим аппаратом включая обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, тензорный анализ.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Уравнения Эйлера.	2	2		2
2	Интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости. Интеграл Бернулли для адиабатических течений.	2	2		2
3	Форма трубок тока. Интеграл Коши-Лагранжа.	2	2		2
4	Плоские безвихревые установившиеся течения идеальной несжимаемой жидкости.	2	2		2
5	Комплексный потенциал обтекания цилиндра.	2	2		2
6	Метод конформных отображений.	2	2		2
7	Формула Чаплыгина-Блазиуса.	2	2		2
8	Вихревые движения идеальной жидкости.	2	2		2
9	Определение вектора скорости по заданному полю вихря и дивергенции.	2	2		2
10	Замкнутая система уравнений для ньютоновской жидкости.	2	2		2
11	Диссипативная функция.	2	2		2
12	Точные решения системы вязкой жидкости.	2	2		2
13	Течение вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса.	2	2		2
14	Уравнения теории упругости.	2	2		2
15	Уравнения термоупругости.	2	2		2
16	Теория деформаций. Тензор деформации Коши Грина. Тензор деформации Альманси.	4	4		4
17	Динамические величины и динамические уравнения механики сплошной среды. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера и Лагранжа.	6	6		5
18	Теорема количества движения.	2	2		4
19	Теорема об изменении момента количества движения.	4	4		4
20	Теорема живых сил.	2	2		4
21	Теорема импульсов и моментов количества движения в интегральной форме. Тензор плотности потока импульса.	4	4		4
22	Первое начало термодинамики.	4	4		3
23	Второе начало термодинамики.	4	4		2

Итого часов	60	60		60
Подготовка к экзамену	0 час.			
Общая трудоёмкость	180 час., 4 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

##### 1. Уравнения Эйлера.

Основные понятия и применение.

##### 2. Интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости. Интеграл Бернулли для адиабатических течений.

Вывод инвариантов Бернулли для несжимаемой жидкости и адиабатических течений.

##### 3. Форма трубок тока. Интеграл Коши-Лагранжа.

Вывод, основные понятия и применение.

##### 4. Плоские безвихревые установившиеся течения идеальной несжимаемой жидкости.

Основные понятия о плоских безвихревых установившихся течениях.

##### 5. Комплексный потенциал обтекания цилиндра.

Использование метода комплексных потенциалов для задачи обтекания цилиндра.

##### 6. Метод конформных отображений.

Понятие о методе конформных отображений и его использование для описания гидродинамических течений.

##### 7. Формула Чаплыгина-Блазиуса.

Вывод формулы Чаплыгина-Блаузиуса и ее анализ.

##### 8. Вихревые движения идеальной жидкости.

Анализ и примеры вихревых течений идеальной жидкости.

##### 9. Определение вектора скорости по заданному полю вихря и дивергенции.

Вывод математической зависимости и ее анализ.

##### 10. Замкнутая система уравнений для ньютоновской жидкости.

Вывод системы уравнений для ньютоновской жидкости, исследование ее свойств.

##### 11. Диссипативная функция.

Понятие об описании диссипативных процессов.

12. Точные решения системы вязкой жидкости.

Примеры математических постановок задач, допускающих точные решения и их анализ.

13. Течение вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса.

Анализ характерных отличий течения вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса.

14. Уравнения теории упругости.

Основные понятия и уравнения теории упругости.

15. Уравнения термоупругости.

Основные понятия и уравнения теории термоупругости.

Семестр: 8 (Весенний)

16. Теория деформаций. Тензор деформации Коши Грина. Тензор деформации Альманси.

Физический смысл компонент тензора деформации. Тензор скоростей деформации, физический смысл его компонент.

Уравнение совместности деформаций Сен-Венана. Распределение скоростей в жидкой частице. Теорема Гельмгольца.

17. Динамические величины и динамические уравнения механики сплошной среды. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера и Лагранжа.

Массовые и поверхностные силы. Напряжение на площадке. Принцип напряжения Коши. Зависимость вектора напряжения от ориентации площадки. Тензор напряжений. Физические составляющие тензора напряжений. Тензорная поверхность тензора напряжений, главные оси и главные компоненты тензора напряжений, их механический смысл. Максимальные касательные напряжения.

18. Теорема количества движения.

Уравнения движения сплошной среды в напряжениях для конечных объемов сплошной среды и в дифференциальной форме.

19. Теорема об изменении момента количества движения.

Симметрия тензора напряжений в случае отсутствия внутренних моментов количества движения и внутренних массовых и поверхностных пар.

20. Теорема живых сил.

Работа внутренних поверхностных сил. Закон сохранения механической энергии.

21. Теорема импульсов и моментов количества движения в интегральной форме. Тензор плотности потока импульса.

Определение общей силы реакции момента и "отдаваемой" потоком энергии. Сила реакции жидкости, текущей в трубе. Парадокс Даламбера. Задача о косом натекании плоской струи несжимаемой жидкости на стенку. Уравнения движения в переменных Лагранжа.

22. Первое начало термодинамики.

Закон сохранения энергии. Уравнение энергии и уравнение притока тепла для сплошной среды для конечных объемов и в дифференциальной форме.

## 23. Второе начало термодинамики.

Обратимые и необратимые процессы. Применение второго начала термодинамики к необратимым процессам в произвольных средах, содержащее понятие энтропии. Тождество Гиббса. Уравнение баланса энтропии для конечного индивидуального объема сплошной среды. Дифференциальное уравнение второго закона термодинамики. Производство энтропии за счет вязкости и теплопроводности. Неотрицательность коэффициентов вязкости и теплопроводности.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Теоретическая физика [Текст] : в 10 т. Т. 6 : Гидродинамика : учеб. пособие для вузов : рек. М-вом образования Рос. Федерации / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц ; под ред. Л. П. Питаевского .— 5-е изд., стереотип. — 3-е изд., перераб. — М. : Физматлит, 1986, 1988, 2003, 2006 .— 736 с.

### Дополнительная литература

1. Теоретическая физика [Текст] : в 10 т. Т. 7 : Теория упругости : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц .— 4-е изд., испр. и доп. — М. : Наука, 1987 .— 248 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

crec.mipt.ru

lib.mipt.ru

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не предусмотрено

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Рекомендуется с использованием основной и дополнительной литературы освоение следующих тем.

Дополнительные указания приведены в рекомендуемой методической литературе.

Микроскопическое (динамическое), кинетическое (статистическое) и макроскопическое (гидродинамическое и феноменологическое) описание физических систем, состоящих из очень большого числа частиц.

Основные гипотезы МСС: гипотеза сплошности, физически бесконечно малый объем, евклидовость пространства, абсолютное время, механика Ньютона, классическая термодинамика, электродинамика материальных сплошных сред. Предмет МСС. Основные разделы МСС: гидродинамика, газодинамика, физико-химическая газодинамика, магнитная гидродинамика, радиационная газодинамика, термоупругость, теория пластичности и ползучести металлов. Реология. Методы МСС. Роль математического анализа. Асимптотические методы. Роль численных методов, численного моделирования с применением ЭВМ в современных исследованиях по МСС. Связь с экспериментом. Вычислительная гидродинамика, вычислительная теория упругости, вычислительная физика и т.д.

Краткая история возникновения тензорного исчисления. Необходимость применения тензорного аппарата в механике и физике. Задачи тензорного исчисления.

I.1. Системы координат. Касательный (основной) и взаимный базисы. Понятие тензора и правило преобразования его компонент

Системы криволинейных координат в евклидовом пространстве. Локальный (основной) касательный базис в трехмерном евклидовом пространстве. Взаимный (сопряженный, би-ортогональный) базис. Объем параллелепипеда, построенного на векторах основного и взаимного базисов. Два способа вычисления взаимного базиса. Сохранение ориентации при переходе к взаимному базису и обратно. Разложение основного базиса по взаимному и обратно. Базисные матрицы касательного и взаимного базисов, взаимно обратные матрицы. Дискриминант базиса. Формулы для объемов параллелепипедов, построенных на векторах базисов. Взаимный базис образует тройку некомпланарных векторов. Разложение бесконечно малого вектора по основному (касательному) и взаимному базису. Неголономность координат бесконечно малого вектора во взаимном базисе. Представление произвольного вектора в основном и взаимном базисах. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. Ортогональные и параллельные проекции вектора. Физические компоненты вектора. Связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора. Операция поднятия и опускания индексов у компонент вектора. Скалярное произведение двух векторов. Длина вектора. Угол между двумя векторами. Символы Леви-Чивита. Векторное произведение базисных векторов. Формулы обращения. Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение. Площади элементарных координатных площадок в трехмерном евклидовом пространстве. Объем элементарного координатного параллелепипеда. Ковариантные компоненты орт-нормали к элементарной площадке произвольной ориентации. Преобразование координат. Преобразование контрвариантных компонент бесконечно малого перемещения и основного базиса. Формулы преобразования компонент базисной матрицы. Преобразование ковариантных компонент бесконечно малого вектора перемещения и взаимного базиса. \*Аффинные ортогональные преобразования. Определение скаляра, примеры геометрических и физических величин, преобразующихся как контравариантные и ковариантные компоненты вектора. Полиадные (диадные, триадные и т.д.) произведения векторов базиса. Определение тензора второго и более высокого ранга. Метрический тензор. \*Определение псевдотензора. Эквивалентность в трехмерном пространстве антисимметричного тензора второго ранга аксиальному вектору.

I.2. Тензорная алгебра

Умножение тензора на число. Сложение (вычитание) тензоров. Операции симметрирования и альтернирования тензоров второго ранга. Неопределенное (полиадное) умножение тензоров. Операции сокращения индексов. Скалярное произведение (свертка) тензоров. Представление компонент тензора через скалярное произведение тензора и базисных векторов. Двойная свертка тензоров. След тензора второго ранга. Определитель тензора. Обратный тензор. Нулевой тензор. \*Обратный тензорный признак. \*Собственные векторы и собственные значения симметричного тензора второго ранга. Инварианты симметричного тензора. \*Свойства собственных векторов и собственных значений симметричного тензора. Представление тензора в ортонормированном базисе собственных векторов.

I.3. Тензорный анализ

Производные от базисных векторов по ко- и контравариантным координатам. Деривационные формулы ко- и контравариантных базисных векторов. Символы Кристоффеля 1-го и 2-го рода, их свойства: симметрия, правило поднятия и опускания индексов (формулы взаимности) у символов Кристоффеля, производные от компонент метрической матрицы через символы Кристоффеля, свертка символов Кристоффеля 2-го рода (сокращенные символы Кристоффеля), символы Кристоффеля в криволинейной системе координат. Коэффициенты Ламе. Операция Набла–Гамильтона, производные от скаляра, вектора, тензора по криволинейным координатам. Ковариантное дифференцирование. Свойство ковариантного дифференцирования базисных векторов и компонент метрического тензора. Тожество Риччи. Градиент, дивергенция, ротор, лапласиан, \*бигармонический оператор в произвольной криволинейной системе координат. Теорема Остроградского–Гаусса. Теорема Стокса.

I. Теория деформаций. Тензор деформации Коши Грина. Тензор деформации Альманси. Физический смысл компонент тензора деформации. Тензор скоростей деформации, физический смысл его компонент. Уравнение совместности деформаций Сен-Венана. Распределение скоростей в жидкой частице. Теорема Гельмгольца.

II. Динамические величины и динамические уравнения механики сплошной среды. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера и Лагранжа. Массовые и поверхностные силы. Напряжение на площадке. Принцип напряжения Коши. Зависимость вектора напряжения от ориентации площадки. Тензор напряжений. Физические составляющие тензора напряжений. Тензорная поверхность тензора напряжений, главные оси и главные компоненты тензора напряжений, их механический смысл. Максимальные касательные напряжения.

Теорема количества движения. Уравнения движения сплошной среды в напряжениях для конечных объемов сплошной среды и в дифференциальной форме.

Теорема об изменении момента количества движения. Симметрия тензора напряжений в случае отсутствия внутренних моментов количества движения и внутренних массовых и поверхностных пар.

Теорема живых сил. Работа внутренних поверхностных сил. Закон сохранения механической энергии.

Теорема импульсов и моментов количества движения в интегральной форме. Тензор плотности потока импульса. Определение общей силы реакции момента и "отдаваемой" потоком энергии. Сила реакции жидкости, текущей в трубе. Парадокс Даламбера. Задача о косом натекании плоской струи несжимаемой жидкости на стенку. Уравнения движения в переменных Лагранжа.

III. Первое начало термодинамики. Закон сохранения энергии. Уравнение энергии и уравнение притока тепла для сплошной среды для конечных объемов и в дифференциальной форме.

IV. Второе начало термодинамики. Обратимые и необратимые процессы. Применение второго начала термодинамики к необратимым процессам в произвольных средах, содержащее понятие энтропии. Тожество Гиббса. Уравнение баланса энтропии для конечного индивидуального объема сплошной среды. Дифференциальное уравнение второго закона термодинамики. Производство энтропии за счет вязкости и теплопроводности. Неотрицательность коэффициентов вязкости и теплопроводности.

V. Условия на поверхностях сильного разрыва в сплошных средах. Тангенциальные (контактные) разрывы и ударные волны. Скачки разряжения. Условия на поверхностях сильного разрыва в идеальном газе. Адиабата Гюгонио.

VI. Замкнутые системы уравнений для классических моделей сплошной среды. Идеальная жидкость и газ. Внутренняя и свободная энергия как термодинамические потенциалы. Уравнения Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости и для баротропных движений газа. Граничные условия.

Интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости в поле тяжести. Понятие о кавитации. Трубка Пито–Прандтля. Динамическое и гидростатическое давление.

Интеграл Бернулли для адиабатических течений совершенного газа. Параметры торможения. Число Маха. Максимальная скорость. Форма трубок тока в несжимаемой и сжимаемой жидкости. Сопло Лавалья. Оценка влияния сжимаемости при установившихся и неустановившихся движениях.

Интеграл Коши–Лагранжа. Постановка задач о потенциальных движениях идеальной жидкости и газа. Определение давления.

Гидростатика. Уравнение равновесия жидкости. Равновесие баротропной жидкости. Суммарная сила и момент, действующие на покоящееся в неподвижной жидкости тело. Закон Архимеда.



Плоские безвихревые установившиеся течения идеальной несжимаемой жидкости. Функция тока, потенциал скоростей. Комплексный потенциал и комплексная скорость. Равномерный поступательный поток, источник, сток, вихрь, дублет, обтекание угла. Комплексный потенциал обтекания цилиндра. Метод конформных отображений. Обтекание профиля с острой кромкой. Постулат Чаплыгина–Жуковского. Формула для циркуляции. Формулы Чаплыгина–Блазиуса для определения главного вектора и главного момента сил давлений, действующих на профиль. Теорема Жуковского. Безотрывное обтекание пластинки под углом атаки. Главный вектор сил и главный момент.

Вихревые движения идеальной жидкости. Теорема Томсона. Теорема Лагранжа о безвихревом движении жидкости. Теорема Гельмгольца. Теорема о сохранении вихревой линии. Теорема о сохранении интенсивности вихревых трубок. Теорема Бьеркнеса о возникновении вихрей. Уравнение для вихря. Уравнение Фридмана. Уравнение Гельмгольца. Определение вектора скорости по заданному вихрю и дивергенции. Единственность решения поставленной задачи. О решении рассматриваемой задачи в ограниченной области. Скорости, индуцируемые вихревой нитью. Формула Био–Савара. Вихревая поверхность, поверхность разрыва касательных скоростей. Вихревой слой.

VII. Замкнутые системы уравнений для классических моделей сплошной среды. Линейная вязкость (ньютоновская) жидкость. Обобщенный закон Ньютона для тензора напряжений. Коэффициент вязкости. Объемный коэффициент вязкости. Гипотеза Стокса. Уравнение Навье–Стокса. Закон Фурье. Коэффициент теплопроводности. Уравнение энергии и уравнение притока тепла. Диссипативная функция. Скорость возрастания энтропии при необратимых процессах, неотрицательность коэффициентов вязкости и теплопроводности. Линейные феноменологические уравнения переноса для термодинамических потоков. Принцип Онзагера. Постановка начальных и граничных условий для уравнений Навье–Стокса. Необратимость движений вязкой жидкости. Завихренность течений вязкой жидкости. Точные решения системы уравнений вязкой жидкости. Течение между двумя параллельными плоскими стенками, течение Куэтта. Нестационарные одномерные течения: разрывание начального тангенциального разрыва, движение вязкой жидкости в полупространстве, возникающее от движения границы полупространства. Диффузия точечного вихря. Задача о структуре ударной волны, решение Беккера.

Течения вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса. Уравнение пограничного слоя. Задача Блазиуса о пограничном слое на плоской пластине.

VIII. Замкнутые системы уравнений для классических моделей сплошной среды. Изотропная линейно-упругая среда. Закон Гука.

Упругие постоянные Ламе. Модуль упругости Юнга, коэффициент Пуассона, модуль объемного сжатия. Их физический смысл. Уравнения теории упругости в напряжениях. Уравнения теории упругости в перемещениях (уравнение Ламе). Постановка начальных и граничных условий для уравнений теории упругости. Принцип суперпозиции решений. Принцип Сен-Венана. Теорема единственности решения задач статики упругого тела. Растяжение и чистый изгиб цилиндра. Кручение цилиндра. Равновесие полого шара и полого цилиндра под действием внутреннего и наружного давлений.

Постановка динамических задач теории упругости.

Упругие волны, продольные и поперечные волны. Поверхностные волны Рэлея.

Уравнения термоупругости.

IX. Методы подобия и размерности. П-теорема. Движение математического маятника. Истечение тяжелой жидкости через водослив. Движение жидкости в трубах. Движение тела в жидкости. Задача о сильном взрыве. Закон движения ударной волны при сильном взрыве.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительной физики
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 7 (осенний) - Дифференцированный зачет
- 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** М.Д. Брагин, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математические модели механики сплошных сред» обучающийся должен:

### знать:

Принципы построения математических моделей МСС.

Основные математические постановки задач гидродинамики, газодинамики и теории упругости.

### уметь:

Выводить основные уравнения задач гидродинамики, газодинамики и теории упругости, использовать базовые принципы математического моделирования в МСС при решении задач.

### владеть:

Математическим аппаратом включая обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, тензорный анализ.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

**Перечень типовых контрольных вопросов по дисциплине**  
**Математические модели механики сплошных сред**

**Осенний семестр**

**1. Криволинейные координаты. Основной (касательный) базис  $\bar{g}_i (i=1, 2, 3)$  в трехмерном пространстве.**

**Фундаментальная матрица  $|g_{ij}|$**

- а) построить координатные линии и координатные поверхности,
- б) найти якобиевы матрицы преобразований координат,
- в) найти векторы основного (касательного) и взаимного локальных базисов,
- г) найти фундаментальную матрицу  $|g_{ij}|$ , обратную к ней матрицу  $|g^{ij}|$  и коэффициенты Ламе для следующих преобразований от декартовой системы прямоугольных координат  $(x, y, z)$  к криволинейной системе координат  $(x^1, x^2, x^3)$  в следующих задачах.

**1.1. Цилиндрическая система координат:**

$$x = x^1 \cos x^2, \quad y = x^1 \sin x^2, \quad z = x^3 \quad (x^1 = r, \quad x^2 = \varphi, \quad x^3 = z)$$

$$(0 \leq x^1 < \infty, \quad 0 \leq x^2 < 2\pi, \quad -\infty < x^3 < \infty).$$

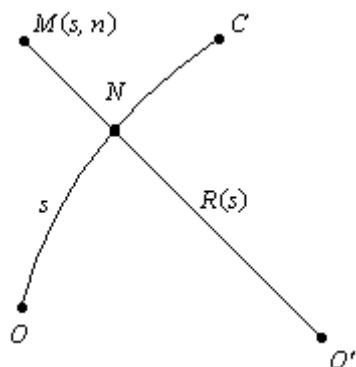
**1.2. Сферическая система координат:**

$$x = x^1 \sin x^2 \cos x^3, \quad y = x^1 \sin x^2 \sin x^3, \quad z = x^1 \cos x^2$$

$$(x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi),$$

$$(0 \leq x^1 < \infty, \quad 0 \leq x^2 \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

1.3. Естественная система криволинейных координат, связанная с плоской кривой  $OC$ , заданной своим радиусом кривизны  $R(s) = O'N$  как функция длины дуги  $s$ . Положение точки  $M$  на плоскости определяется длиной нормали



$\overline{MN} = n$  к контуру  $OC$ , проходящей через точку  $M$ , и длиной дуги  $\overline{ON} = s$ , отсчитываемой от некоторой точки  $O$  контура до основания нормали  $N$ . Угол  $MNC$  – прямой. Найти коэффициенты Ламе  $H_s$  и  $H_n$ .

**1.4. Вывести формулу  $g = g_1 = \det \|g_{ij}\| = V^2$ ,**

$$\text{где } V_1 = \bar{g}_1 \cdot (\bar{g}_2 \times \bar{g}_3).$$

**1.5. Найти  $V_1$  для систем координат, указанных в задачах 1.1, 1.2.**

**2. Взаимный (сопряженный) базис  $\vec{g}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) находится из условий  $\vec{g}^i \cdot \vec{g}_j = \delta_j^i$ .**

2.1. Показать, что если на основном и взаимном базисах построить параллелепипеды с объемами, соответственно равными

$$|V_1| = |\vec{g}_1 \cdot (\vec{g}_2 \times \vec{g}_3)| \text{ и } |V^1| = |\vec{g}^1 \cdot (\vec{g}^2 \times \vec{g}^3)|,$$

то ребра одного из них будут перпендикулярны граням другого и наоборот. Модули векторов основного базиса равны обратным значениям параллельных им высот параллелепипеда, построенного на векторах взаимного базиса.

2.2. Проверить, что взаимный базис можно вычислять по формуле

$$\vec{g}^i = \nabla x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial x^i}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial x^i}{\partial z} \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты прямоугольной декартовой системы координат.

2.3. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах основного базиса, равен

$$|V_1| = \sqrt{\det |g_{ij}|} \equiv \sqrt{g},$$

а на векторах взаимного базиса равен

$$|V^1| = \sqrt{\det |g^{ij}|} \equiv \sqrt{g'}.$$

2.4. Разложить вектор  $\vec{a}$  по трем произвольно заданным некомпланарным векторам

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \left( \vec{a} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{a}_i \right).$$

Найти коэффициенты  $\alpha_i$  через векторы  $\vec{a}^i$ , взаимные векторам  $\vec{a}_i$ .

2.5. Используя построения взаимного базиса, определить вектор  $\vec{b}$ , удовлетворяющий уравнениям

$$\vec{b} \cdot \vec{a}_i = \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $\vec{a}_i$  – заданные некомпланарные векторы,  $\alpha_i$  – заданные действительные числа.

**3. Ковариантные  $(a_i)$ , контравариантные  $(a^i)$  компоненты вектора  $\vec{a} = a^i \vec{g}_i = a_i \vec{g}^i$**

3.1. Показать, что контравариантные компоненты  $a^i$  вектора  $\vec{a}$  можно найти или из параллельных составляющих  $a^i |\vec{g}_i|$  вектора  $\vec{a}$  по направлениям основного базиса, или из ортогональных проекций  $\frac{a^i}{|\vec{g}^i|}$  вектора  $\vec{a}$  на оси взаимного базиса.

3.2. Показать, что ковариантные компоненты  $a_i$  можно найти соответственно по параллельным составляющим  $a_i |\vec{g}^i|$  вектора  $\vec{a}$ , по направлениям взаимного базиса либо по ортогональным проекциям  $\frac{a^i}{|\vec{g}_i|}$  вектора  $\vec{a}$  на оси основного базиса  $\vec{g}_i$ .

3.3. Показать, что  $g^{ik} = \frac{G^{ik}}{g}$ , где  $G^{ik}$  – алгебраическое дополнение матрицы  $g_{ik}$ .

**4. Скалярное и векторное произведение векторов.**

**Символы Леви-Чивита  $e_{ijk}$  – Дискриминантные тензоры (матрицы)  $\epsilon_{ijk}, \epsilon^{ijk}, \epsilon^i_j{}^k$  и т.д.**

4.1. Вывести формулы для векторных произведений базисных векторов

$$\vec{g}_i \times \vec{g}_j = \epsilon_{ijk} \vec{g}^k, \quad \vec{g}^i \times \vec{g}^j = \epsilon^{ijk} \vec{g}_k, \quad \text{где символы } \epsilon_{ijk} = \vec{g}_i \cdot (\vec{g}_j \times \vec{g}_k), \quad \epsilon^{ijk} = \vec{g}^i \cdot (\vec{g}^j \times \vec{g}^k).$$

4.2. Используя формулу  $\epsilon_{ijk} \epsilon^{ijp} = 2\delta_k^p$ , вывести формулы обращения

$$\bar{g}_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \bar{g}^j \times \bar{g}^k, \quad \bar{g}^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \bar{g}_j \times \bar{g}_k.$$

4.3. Для произвольных векторов  $\vec{a} = a^i \bar{g}_i, \vec{b} = b^i \bar{g}_i, \vec{c} = c^i \bar{g}_i$  вывести выражения для векторного произведения  $\vec{a} \times \vec{b} = a^i b^j \epsilon_{ijk} \bar{g}^k = a_i b_j \epsilon^{ijk} \bar{g}_k$  и смешанного произведения

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \epsilon^{ijk} a_i b_j c_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

4.4. Вывести формулу для двойного векторного произведения  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$ , используя первую формулу задачи 4.3.

4.5. Проверить тождество  $\bar{g}_i \times \bar{g}^i = 0$ .

4.6. Вычислить, используя формулы задачи 4.1, площади элементарных координатных площадок – площадок параллелограммов, построенных попарно на векторах  $\bar{g}_i dx^i$  (по  $i$  не суммировать!) ( $i = 1, 2, 3$ ),  $d\sigma_{(i)} = \sqrt{g g^{ii}} dx^j dx^k$  ( $i \neq j \neq k \neq i$ ).

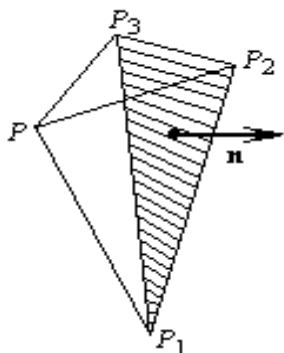
4.7. Вычислить объем элементарного координатного параллелепипеда ( $dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3$ ).

\*4.8. Рассмотрим элементарный тетраэдр  $PP_1P_2P_3$ , ребра

которого есть векторы

$$\overrightarrow{PP_1} = \bar{g}_1 dx^1, \overrightarrow{PP_2} = \bar{g}_2 dx^2, \overrightarrow{PP_3} = \bar{g}_3 dx^3$$

с общим началом в точке  $P$ .



Обозначим через  $d\sigma_{(i)}$  площадь координатной грани тетраэдра  $x^i = \text{const}$ ,  $d\sigma_{(n)}$  – площадь грани  $P_1P_2P_3$ ,  $\vec{n} = n^i \bar{g}_i = n_i \bar{g}^i$  – единичную внешнюю нормаль к  $P_1P_2P_3$ . Показать, что

$$\vec{n} = n^i \bar{g}_i, \text{ где } n_i = \frac{d\sigma_{(i)}}{\sqrt{g^{ii}} d\sigma_{(n)}}, \quad n^i = g^{ij} n_j.$$

## 5. Преобразование координат. Определение тензора

Наряду с системой криволинейных координат  $(x^1, x^2, x^3)$  будем рассматривать новую систему координат  $(y^1, y^2, y^3)$ , связанную со старой формулами преобразования

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3), \quad (*)$$

обладающими свойствами непрерывности, дифференцируемости и взаимнооднозначности.

\*5.1. Доказать, что элементы фундаментальной матрицы  $g_{ij}$  и обратной матрицы  $g^{ij}$ , а также элементы  $g^i_j = \bar{g}^i \cdot \bar{g}_j = \delta^i_j$  являются компонентами одного и того же тензора второго ранга

$$G = g_{ij} \bar{g}^i \bar{g}^j = g^{ij} \bar{g}_i \bar{g}_j = \\ = \delta^i_j g_i g^j = \delta^j_i g^i g_j - \text{метрического тензора.}$$

\*5.2. Показать, что определитель матрицы смешанных компонент тензора второго ранга является инвариантом преобразования координат (\*).

5.3. Показать, что основная квадратичная форма  $g_{ij} dx^i dx^j$  является инвариантом по отношению к преобразованию (\*)

$$(g_{ij} dx^i dx^j = g'_{ij} dy^i dy^j), \text{ где } g'_{ij} - \text{метрическая матрица в системе координат } y^1, y^2, y^3.$$

5.4. Пусть  $f(x^1, x^2, x^3)$  – дифференцируемая функция координат  $x^i$ . Доказать, что

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, 3) \text{ преобразуются при преобразовании (*) как ковариантные компоненты вектора.}$$

5.5. Выяснить, образуют ли величины  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^k}$  компоненты тензора второго ранга, если

$\Phi(x^1, x^2, x^3)$  – дважды дифференцируемая функция.

5.6. Доказать, что символы  $\epsilon_{ijk}$  и  $\epsilon^{ijk}$  (см. п. 4.2) являются соответствующими компонентами тензора третьего ранга (дискриминантный тензор).

\*5.7. Тензору  $\hat{T} = T^{ij} \bar{g}_i \bar{g}_j$  в выбранной системе координат поставим в соответствие три объекта  $\bar{t}^i = T^{ij} \bar{g}_j$  или  $\bar{T}^j = T^{ij} \bar{g}_i$ , которые в выбранной системе координат можно изобразить в виде векторов  $\bar{t}^i$  или  $\bar{T}^j$  с компонентами, составленными из строк (столбцов) матрицы тензора  $\hat{T}$ . Найти преобразования величин  $\bar{t}^i$  и выразить тензор  $\hat{T}$  через  $\bar{t}^i$  и  $\bar{T}^j$ . Выразить  $\bar{T}^j$  через  $\bar{t}^j$ . В каком случае  $\bar{T}^i = \bar{t}^i$ ?

## 6. Тензорная алгебра

6.1. Показать, что если тензор второго ранга симметричный, т.е. если  $T^{ij} = T^{ji}$ , то  $T_{ij} = T_{ji}$ ,  $T^{i \cdot} = T^{i \cdot}$ .

\*6.2. Показать, что  $\hat{T}^2$ ,  $\hat{T}^3$  и произвольная степень  $n$  симметричного тензора есть также симметричный тензор.

6.3. Показать, что скалярное умножение вектора на тензор подчиняется правилу  $\vec{a} \cdot \hat{T} = \hat{T}^T \cdot \vec{a}$ , где  $\hat{T}^T$  – транспонированный тензор второго ранга.

6.4. Непосредственно проверить следующие правила транспонирования:  $(\hat{T} \cdot \hat{S}) = \hat{S}^T \cdot \hat{T}^T$ ,  $(\hat{T} \cdot \hat{S} \cdot \hat{Q})^T = \hat{Q}^T \cdot \hat{S}^T \cdot \hat{T}^T$ .

6.5. Доказать, что двойное скалярное произведение (двойная свертка) тензоров второго ранга  $\hat{T} : \hat{S} = T^{ij} S_{ji}$  является инвариантом (скаляром).

6.6. Вывести формулы:  $\hat{G} : \hat{T} = T^{i \cdot} \cdot$ ,  $\hat{T} : \hat{G} = T^{i \cdot} \cdot$ ,  $\hat{G} : \hat{G} = 3$ .

\*6.7. Извлечь квадратный корень из тензора  $\hat{T} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ .

6.8. Доказать, что в результате полного свертывания тензора, имеющего одинаковое число ковариантных и контравариантных индексов, получается скаляр.

\*6.9. Доказать, что  $\det \|T^i_j\| = \det \|T'^i_j\|$ , т.е. определитель смешанных компонент тензора второго ранга есть инвариант.

## 7. Производные от базисных векторов. Символы Кристоффеля. Ковариантное и контравариантное дифференцирование

7.1. Доказать равенства  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i}$ ,  $\Gamma^j_{jk} = \frac{1}{2} g^{ji} \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}$ ,  $\Gamma^k_{jk} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^j}$ .

7.2. Доказать, что при преобразовании (\*) символы Кристоффеля 2-го рода преобразуются по закону  $\Gamma^k_{ij} = \left( \frac{\partial x^a}{\partial y^i} \frac{\partial x^b}{\partial y^j} \Gamma^{\gamma}_{ab} + \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial y^i \partial y^j} \right) \frac{\partial y^k}{\partial x^{\gamma}}$ .

7.3. Установить закон преобразования символов Кристоффеля 1-го рода при преобразовании координат (\*).

7.4. Проверить, что для ортогональной системы координат для символов Кристоффеля имеют место выражения

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma^k_{ij} = 0 \quad (i \neq j \neq k \neq i), \quad \Gamma_{ii,k} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \quad (i \neq k),$$

$$\Gamma_{ij,i} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \quad (i \neq j), \quad \Gamma^k_{ii} = -\frac{1}{2 g_{kk}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k}, \quad \Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g_{ii}}{\partial x^k} \quad (i \neq k).$$

\*7.5. Доказать, что ковариантные производные компонент вектора являются соответствующими компонентами тензора второго ранга. Производные  $\frac{\partial a^k}{\partial x^i}$ ,  $\frac{\partial a_k}{\partial x^i}$  не являются компонентами тензора.

7.6. Показать непосредственным вычислением, что при ковариантном дифференцировании компоненты метрического и дискриминантного тензоров следует рассматривать как постоянные (лемма Риччи):

$$\nabla_i g_{jk} = 0, \quad \nabla_i g^{jk} = 0, \quad \nabla_i g^j_k = 0, \quad \nabla_i \epsilon_{jkl} = \nabla_i \epsilon^{jkl} = 0.$$

7.7. По определению  $\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$ ,  $\operatorname{div} \hat{T} = \nabla \cdot T$ ,  $\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$ .

Показать, что

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla_i a^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} a^i),$$

$$\operatorname{div} \hat{T} = \nabla_i T^{ij} \bar{g}_j \bar{g}^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} T^{ij} \bar{g}_j \bar{g}^k),$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla_i a_j \epsilon^{ijk} \bar{g}_k = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} \epsilon^{ijk} \bar{g}_k,$$

$$\operatorname{div} (\hat{T} \cdot \vec{v}) = \operatorname{div} \hat{T} \cdot \vec{v} + T \cdot \nabla \vec{v}.$$

7.8. Показать, что оператор Лапласа в криволинейной системе координат имеет вид

$$\Delta \varphi = (\nabla \cdot \nabla) \varphi = \nabla^2 \varphi = \operatorname{div} \nabla \varphi = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \varphi = \nabla_i \nabla^i \varphi =$$

$$= \nabla^i \nabla_i \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right).$$

7.9. Показать, что бигармонический оператор в криволинейной системе координат имеет вид

$$\Delta^2 \varphi = \nabla^4 \varphi = g^{ij} g^{kl} \nabla_i \nabla_j \nabla_k \nabla_l \varphi.$$



7.10. Проверить, что  $\operatorname{div}(-P\hat{G}) = -\nabla P$ , где  $P$  – скалярная функция,  $\hat{G}$  – метрический тензор.

7.11. Проверить следующие равенства:

$$\operatorname{rot} \vec{r} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{r} = 3, \quad d\vec{r} \cdot \nabla \varphi = d\varphi,$$

$\nabla \cdot (\hat{T} \times \vec{r}) = (\nabla \cdot \hat{T}) \times \vec{r} + \vec{g}^i \cdot (\hat{T} \times \vec{g}^i)_i$ ,  $\nabla \cdot (\vec{r} \times \hat{T}) = -\vec{r} \cdot (\nabla \times \hat{T})$ . 7.12. Вывести формулу

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) - \operatorname{rot} \vec{V} \times \vec{V}.$$

7.13. Проверить тождество  $\operatorname{div}(\hat{T} \cdot \vec{V}) = \vec{V} \cdot \operatorname{div} \hat{T} + \hat{T} : \hat{e}$ ,

где  $\hat{e}$  – тензор скоростей деформации с компонентами,  $e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$ ,  $\vec{v} = v_i \vec{g}^i$  –

вектор,

$\hat{T}$  – симметричный тензор.

7.14. Доказать тождество  $\vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) = \nabla \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \vec{b}$ .

7.15. Показать, что

$$\operatorname{div}[-p\hat{G} + \mu' \operatorname{div} v \hat{G} + 2\mu \hat{e}] = -\nabla p + (\mu' + \mu) \nabla \operatorname{div} \vec{v} + \mu \Delta \vec{v},$$

где  $\hat{e} = \frac{1}{2}[\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T]$  – тензор скоростей деформации,  $\mu$  и  $\mu'$  – постоянные коэффициенты.

## 8. Кинематика деформируемой сплошной среды

8.1. Поле скоростей в эйлеровых переменных в декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  имеет вид

$$v_1 = -kx_2, \quad v_2 = kx_1, \quad v_3 = 0 \quad (k = \text{const}).$$

Найти: тензор скоростей деформаций; вектор вихря скорости; вектор перемещения; тензор малых деформаций.

8.2. Компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  в декартовой системе координат имеют вид

$$\varepsilon_{12} = a, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = b, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0.$$

Найти поле скоростей в декартовой системе координат.

8.3. Найти выражение тензора скоростей деформаций через вектор скорости в ортогональной криволинейной системе координат.

## Весенний семестр

### ЗАДАНИЕ 1

1. Методы подобия и размерности. П-теорема. Движение математического маятника, истечение тяжелой жидкости через водослив, движение жидкости в трубах (МПР – с. 28–47, Биркгоф. Гидродинамика, гл. 4, 5).
2. Движение тела в жидкости, задача о сильном взрыве, закон распространения ударной волны (МПР - с. 47–53, с. 247–255; С.Т.-1, с. 447–451; Л.Л. – с. 558–563).
3. Интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости. Истечение жидкости из отверстия. Трубка Пито-Прандтля. Динамическое и гидростатическое давление. Явление кавитации (С. – Т.11, с. 22–37).
4. Теорема количества движения в интегральном виде. Косой удар двумерной струи несжимаемой жидкости о плоскую стенку. Глиссирование плоской пластинки (С. – Ч. II, с. 54–60, ККР, 4.1 – с. 65–72). Парадокс Даламбера (С. – Т. 22, с. 71–76, с. 204–206).
5. Определение вектора по его вихрю и расхождению (С. – Т. II, с. 277–288, Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – С. 209-240, В.А. Шандер)
6. Плоское безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости. Применение функций комплексного переменного. Гидромеханическое истолкование функций (Л. – с. 196-207; ККР- Ч. I – с. 129-142. В.А. Шандер).
7. Бесциркуляционные и циркуляционные обтекания круглого цилиндра (Л. – с. 207–215; ККР.- Ч. I, с. 237–251).
8. Применение метода конформного отображения. Обтекание эллипса и пластинки (Л. – с. 222-233, ККР- Ч. I; с. 257-261, 267–274, В.А. Шандер).

### ЗАДАНИЕ 2

1. Ламинарное движение вязкой жидкости в трубе. Закон Пуазейля (Л. – с. 469–480).
2. Диффузия точечного вихря и вязкой жидкости (Л. – С. 526–534).
3. Задача Беккера о структуре ударной волны в вязкой жидкости (Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. – М., 1961, – С. 155-176; Л. – с. 610-617).
4. Волновые движения идеальной жидкости. Задача Коши–Пуассона. Стоячие волны, прогрессивные волны, групповая скорость (К.Р. – с. 401–424).
5. Деформации и напряжения, возникающие в круглой трубе (полном шаре) из упругого материала под воздействием внутреннего и внешнего давления (С.- Т. II, с. 339–347, Т. V, с. 33–34).
6. Максимальные касательные напряжения. (Б. - с. 60-63)
7. Упругие волны в изотропной среде. Продольные и поперечные волны, поверхностные волны Рэлея (С. – Т. II, с. 403–413).

### **3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков** Итоговая аттестация производится в виде дифференцированного зачета.

Дифференцированный зачет проводится путем организации опроса, проводимого в устной форме. Перечень контрольных вопросов: 1. Элементы тензорного исчисления Краткая история возникновения тензорного исчисления. Необходимость применения тензорного аппарата в механике и физике. Задачи тензорного исчисления. 1.1. Системы координат. Основной и взаимный базисы. Понятие тензора и правило преобразования его компонент Системы криволинейных координат в евклидовом пространстве. Основной (локальный, касательный) базис в трехмерном евклидовом пространстве. Коэффициенты Ламе. Взаимный (сопряженный, биортогональный) базис. Два способа вычисления взаимного базиса. Сохранение ориентации при переходе к взаимному базису и обратно. Разложение основного базиса по взаимному базису и обратно. Базисные матрицы основного и взаимного базисов, их взаимнообратность. Дискриминант базиса. Формулы для объемов параллелепипедов, построенных на векторах базисов. Некомпланарность векторов взаимного базиса. Разложение бесконечно малого вектора по основному и взаимному базисам. Неголономность координат бесконечно малого вектора во взаимном базисе. Примеры систем криволинейных координат, для которых не существует ковариантных координат. Представление произвольного вектора в основном и взаимном базисах. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. Ортогональные и параллельные проекции вектора. Физические компоненты вектора. Связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора. Операция поднятия и опускания индексов у компонент вектора. Скалярное произведение двух векторов. Длина вектора. Угол между двумя векторами. Символ Леви—Чивиты. Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение. Площади элементарных координатных площадок в трехмерном евклидовом пространстве. Объем элементарного координатного параллелепипеда. Ковариантные компоненты орт-нормали к элементарной площадке произвольной ориентации. Преобразование координат. Преобразование контравариантных компонент бесконечно малого перемещения и основного базиса. Формулы преобразования компонент базисной матрицы. Преобразование ковариантных компонент бесконечно малого вектора перемещения и взаимного базиса. Аффинные, ортогональные преобразования. Полиадные (диадные, триадные и т. д., также тензорные или неопределенные) произведения векторов базиса. Определение тензора как инвариантного объекта — линейной комбинации полиадных произведений векторов базиса. Ранг тензора. Формулы преобразования компонент тензора. Определение тензора как объекта, компоненты которого преобразуются по тензорному закону. Эквивалентность двух определений тензора. Скаляр как тензор нулевого ранга, вектор как тензор первого ранга. Примеры скалярных, векторных, тензорных величин в геометрии и физике. Метрический тензор. Дискриминантный тензор. Определение псевдотензора. Эквивалентность в трехмерном пространстве антисимметричного тензора второго ранга аксиальному вектору. 1.2. Тензорная алгебра Умножение тензора на число. Сложение и вычитание тензоров. Операции симметрирования и альтернирования тензоров второго ранга. Полиадное умножение тензоров. Операция сокращения индекса. Скалярное произведение (свертка) тензоров. Представление компонент тензора через скалярное произведение тензора и базисных векторов. След и определитель тензора второго ранга. Обращение тензора второго ранга. Инварианты тензора. Собственные векторы, собственные значения, главные оси и главные компоненты симметричного тензора второго ранга, их свойства. Представление тензора в ортонормированном базисе собственных векторов. Обратный тензорный признак.

1.3. Тензорный анализ Производные от базисных векторов по контравариантным координатам. Символы Кристоффеля первого и второго рода, их свойства. Симметрия символов Кристоффеля второго рода по нижним индексам. Правило поднятия и опускания индексов у символов Кристоффеля (формула взаимности). Выражение для символов Кристоффеля через производные от компонент метрической матрицы. Свертка символов Кристоффеля второго рода (сокращенные символы Кристоффеля). Оператор «набла» Гамильтона, производные от скаляра, вектора, тензора по криволинейным координатам. Ковариантное дифференцирование, его свойства. Свойства ковариантного дифференцирования базисных векторов, компонент метрического и дискриминантного тензоров. Лемма Риччи. Связь

евклидовости пространства с перестановочностью ковариантных производных. Понятие о тензоре Римана—Кристоффеля и римановых пространствах. Выражения для градиента, дивергенции, ротора, лапласиана, бигармонического оператора в произвольной криволинейной системе координат. Теорема Гаусса—Остроградского. Теорема Стокса.

## 2. Кинематика деформируемой сплошной среды

2.1. Способы описания движения сплошной среды Подходы к описанию движения сплошной среды Эйлера и Лагранжа. Понятие жидкой частицы. Закон движения среды.

Пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты. Переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа и обратно. Эквивалентность подходов Эйлера и Лагранжа. Местная и индивидуальная производная по времени. Скорость и ускорение, выражения для них в переменных Эйлера и Лагранжа. Траектория жидкой частицы. Линии, поверхности, трубки тока.

2.2. Тензор деформаций Преобразование малой частицы при произвольном перемещении среды. Тензоры деформаций Грина и Альманси в лагранжевых координатах, механический смысл их ковариантных компонент. Главные оси и главные компоненты тензоров деформаций Грина и Альманси, связи между ними. Относительное изменение объема при деформировании. Компоненты тензоров деформаций Грина и Альманси в эйлеровых координатах. Вектор перемещения. Выражения для компонент тензоров деформаций через производные от компонент вектора перемещения. Геометрически линейная механика. Уравнения совместности для компонент тензоров деформаций. Уравнения Сен-Венана. Формула Чезаро.

2.3. Тензор скоростей деформаций Тензор скоростей деформаций в лагранжевых и эйлеровых координатах. Выражения для компонент тензора скоростей деформаций через производные от компонент вектора скорости. Скорость относительного изменения объема. Теорема Коши—Гельмгольца о распределении скоростей в окрестности произвольной точки сплошной среды.

## 3. Динамические уравнения механики сплошных сред

3.1. Закон сохранения массы Уравнение массы в интегральной форме для лагранжева и эйлера объемов сплошной среды. Уравнение массы в дифференциальной форме, уравнение неразрывности. Одномерные движения сжимаемой среды, лагранжева массовая координата.

3.2. Закон сохранения количества движения Законы Ньютона. Массовые и поверхностные силы. Примеры сил, действующих в сплошной среде. Вектор напряжений. Уравнение количества движения в интегральной форме для лагранжева и эйлера объемов сплошной среды. Формула Коши для вектора напряжений.

Тензор напряжений. Механический смысл его компонент. Уравнение количества движения в дифференциальной форме, уравнения движения.

3.3. Закон сохранения момента количества движения Собственный момент количества движения среды, его физический смысл. Массовые и поверхностные пары сил, их примеры. Уравнение момента количества движения в интегральной форме для лагранжева и эйлера объемов сплошной среды. Формула Коши для вектора моментных напряжений. Тензор моментных напряжений. Уравнение момента количества движения в дифференциальной форме. Уравнение собственного момента количества движения. Симметрия тензора напряжений как следствие равенства нулю собственного момента, массовых и поверхностных пар.

3.4. Теорема живых сил Уравнение кинетической энергии в интегральной форме для конечных объемов сплошной среды и в дифференциальной форме. Работа внутренних поверхностных сил, ее смысл. Выражение для работы внутренних поверхностных сил в случае идеальной жидкости.

2

3.5. Закон сохранения энергии. Первое начало термодинамики

Энергия системы как функция ее состояния. Уравнение состояния. Понятие внутренней энергии. Уравнение энергии в интегральной форме для лагранжева и эйлера объемов сплошной среды. Формула Коши для количества тепла и добавочной энергии, проходящих в единицу времени через единичную площадку с заданной нормалью. Вектор потока тепла. Вектор потока добавочной энергии. Дифференциальное уравнение энергии. Уравнение внутренней энергии (уравнение притока тепла). Уравнение притока тепла в неподвижной среде, для которой выполнен закон Фурье, сведение его к уравнению теплопроводности.

3.6. Второе начало термодинамики

Формулировки второго начала термодинамики по Клаузиусу и по Томсону. Вечные двигатели первого и второго рода, их невозможность. Понятие энтропии. Формулировка второго начала термодинамики с использованием понятия энтропии. Приток энтропии извне и производство энтропии внутри системы. Обратимые и необратимые процессы. Второе начало термодинамики для конечных объемов сплошной среды. Дифференциальное уравнение энтропии. Производство энтропии в процессах вязкости и теплопроводности. Тензор вязких напряжений. Неотрицательность коэффициентов вязкости и теплопроводности как следствие второго начала термодинамики. Понятие некомпенсированного тепла. Неравенство Клаузиуса для сплошных сред.

4. Условия на поверхностях сильного разрыва в сплошных средах

Поверхности разрыва в сплошных средах. Сильные и слабые разрывы. Примеры сильных разрывов: поверхность раздела двух разных сред, ударные и взрывные волны. Условия на поверхностях разрыва как следствия интегральных законов сохранения. Производство энтропии на поверхностях разрыва. Классификация сильных разрывов: тангенциальные, контактные разрывы, ударные волны.

3

5. Жидкости и газы в механике сплошных сред

Определение жидкостей и газов в механике сплошных сред, отсутствие касательных напряжений в состоянии покоя. Понятие давления. Гидростатика. Закон Паскаля. Закон Архимеда.

6. Замкнутые модели в механике сплошных сред

6.1. Идеальные жидкости и газы Тензор напряжений идеальной жидкости. Система уравнений Эйлера, ее замкнутость. Вид уравнений Эйлера при учете массовых источников тепла и процессов теплопроводности. Консервативная запись уравнений Эйлера, ее значение. Тензор плотности потока импульса. Уравнение энтропии для идеальной жидкости. Обратимость движений идеальной жидкости. Граничные условия на твердой поверхности. Уравнения Эйлера в баротропном и несжимаемом случаях. Уравнения движения в форме Громеки—Ламба. Уравнение состояния совершенного газа. Адиабата Пуассона. Интеграл Бернулли. Функция давления для несжимаемой жидкости и совершенного газа. Интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости: трубка Пито—

Прандтля; динамическое и гидростатическое давление; явление кавитации. Интеграл Бернулли для совершенного газа: максимальная скорость и температура торможения; оценка влияния сжимаемости при установившемся движении; форма трубок тока в несжимаемой и сжимаемой жидкостях; сопло Лавала. Парадокс Даламбера. Вихревые движения идеальной жидкости. Уравнение динамики вихря. Уравнения Фридриха и Гельмгольца. Теорема Томсона. Теорема Лагранжа. Теоремы Гельмгольца. Теорема Бьеркнеса об образовании вихрей. Скорости, индуцируемые вихревой нитью. Формула Био—Савара. Вихревой слой. Потенциальные движения идеальной жидкости. Потенциал скорости. Интеграл Коши—Лагранжа. Определение давления по заданному потенциалу скорости. Задача о распространении малых возмущений как пример потенциального движения идеальной жидкости. Акустическое приближение.

4

Адиабатичность распространения звука. Линеаризация уравнений Эйлера по возмущениям, сведение их к волновому уравнению. Скорость звука. Число Маха. Плоские безвихревые установившиеся движения идеальной несжимаемой жидкости. Уравнение Лапласа на потенциал скорости, линейность задачи и принцип суперпозиции. Функция тока. Соотношения между частными производными потенциала скорости и функции тока по координатам, условия Коши—Римана. Применение теории функций комплексного переменного. Комплексный потенциал и комплексная скорость. Примеры простейших течений: равномерный поток, источник, точечный вихрь, вихреисточник, диполь. Комплексные потенциалы обтекания цилиндра и пластины. Метод конформных отображений. Обтекание профиля с острой задней кромкой, постулат Чаплыгина—Жуковского. Формула для циркуляции. Формулы Чаплыгина для определения главного вектора и главного момента сил давлений, действующих на профиль. Теорема Жуковского о подъемной силе крыла. Вихревая природа подъемной силы. Понятия жидкого крыла и присоединенного вихря. Волновые движения идеальной жидкости под действием силы тяжести, их потенциальность. Задача Коши—Пуассона. Стоячие волны, прогрессивные волны. Групповая скорость. Соотношение Рэлея. \*Одномерные движения совершенного газа. Задача о поршне. Волна разрежения, контактный разрыв, ударная волна. Адиабата Гюгонио. Задача Римана о распаде произвольного разрыва.

6.2. Линейно-вязкие (ньютоновские) жидкости и газы Опыт Ньютона. Тензор напряжений линейно-вязкой (ньютоновской) жидкости. Неньютоновские жидкости. Упрощение тензора вязких напряжений в случае изотропной жидкости. Коэффициенты вязкости. Коэффициент сдвиговой вязкости и коэффициент объемной вязкости, их связь с процессами релаксации различных степеней свободы. Давление в вязкой жидкости. Гипотеза Стокса. Число (критерий) Рейнольдса, его механический смысл. Закон Фурье и коэффициент теплопроводности. Число (критерий) Прандтля. Понятие об общих линейных феноменологических уравнениях переноса для термодинамических потоков. Принцип Онзагера.

5

Система уравнений Навье—Стокса—Фурье, ее замкнутость. Необратимость движений вязкой жидкости. Граничные условия на твердой поверхности. Точные решения уравнений Навье—Стокса. Ламинарное движение вязкой жидкости в трубах, закон Пуазейля для круглой трубы. Понятие о турбулентном движении. Опыт Рейнольдса. Нестационарные движения: размывание начального тангенциального разрыва; движение в полупространстве, вызванное движением его границы; релаксация точечного вихря; релаксация вихрей конечных размеров. Задача Беккера о структуре фронта ударной волны в вязком теплопроводном совершенном газе. Движение вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса, приближение пограничного слоя Прандтля. Задача Блазиуса о пограничном слое на плоской пластине. \*Движение вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса, приближение Стокса. Теорема единственности. Точное решение для твердой сферы, закон Стокса для силы сопротивления. Уточненное уравнение Озеена. 6.3. Линейно-упругие среды Определение упругой среды. Обобщенный закон Гука, тензор напряжений линейно-упругой среды. Случай

изотропной линейно-упругой среды. Упругие постоянные Ламе. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модуль объемного сжатия, их механический смысл. Максимальные касательные напряжения. Система уравнений линейной теории упругости при изотермических процессах, ее замкнутость. Уравнения Навье—Ламе. Постановка граничных условий в задачах теории упругости. Принцип суперпозиции. Теорема единственности решения статических задач теории упругости. Принцип Сен-Венана. Учет температурных напряжений и деформаций. Соотношения Дюамеля—Неймана. Точные решения уравнений Навье—Ламе. Растяжение, чистый изгиб, кручение цилиндра. Равновесие полого шара и полого цилиндра под действием внутреннего и наружного давлений. Упругие волны. Продольные и поперечные волны. Поверхностные волны Рэлея. Перечень типовых задач приведен в дополнительном файле «контрольные вопросы Мат.Мод.МСС.pdf»

**4. Критерии оценивания** Оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений; оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности; оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации; оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

**2 вариант 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности** При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется не менее 30 и не более 60 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать 0.5 астрономических часов. Во время проведения итоговой аттестации обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины. Учитываются оценки за задания, выполненные в письменном виде в течении семестра.