

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Теория оптимизации
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составили:

А.В. Гасников, д-р физ.-мат. наук, доцент

К.Ю. Осипенко, д-р физ.-мат. наук, профессор

А.Г. Бирюков, канд. физ.-мат. наук, доцент

В.Г. Жадан, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 19.05.2023

## Аннотация

Изложение материала достаточно традиционное для многих современных курсов методов конечномерной оптимизации. Вначале приводятся некоторые сведения из выпуклого анализа, необходимые для формулировки последующих результатов. После этого рассматриваются собственно задачи оптимизации в различных постановках, включая задачи с несколькими критериями. Для них формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности, излагается теория двойственности.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Изучение основ выпуклого анализа, теории и методов решения различных оптимизационных задач в конечномерных пространствах.

#### Задачи дисциплины

- овладение студентами начальных сведений по теории выпуклых множеств и выпуклых функций;
- приобретение теоретических знаний по условиям оптимальности для задач безусловной и условной оптимизации, линейного и выпуклого программирования;
- ознакомление студентов с основными современными методами решения конечномерных оптимизационных задач;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических и экспериментальных исследований в области решения практических оптимизационных задач, в том числе с привлечением пакетов оптимизации.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия и основные теоретические результаты в области теории и методов оптимизации в конечномерных пространствах;
- современные проблемы соответствующих разделов численных методов решения оптимизационных задач;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла «Методы оптимизации»;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных оптимизационных задач.

уметь:

- понять поставленную оптимизационную задачу и провести ее формализацию;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных оптимизационных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждения;
- самостоятельно находить алгоритмы решения оптимизационных задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представлять математические знания в области методов оптимизации в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками решения оптимизационных задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых разделов методов оптимизации;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов теории оптимизации;
- предметным языком теории и методов оптимизации, навыками грамотного описания решения соответствующих задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Постановки задач оптимизации и их классификация.	2	2		6
2	Выпуклые множества и их основные свойства.	7	7		6
3	Выпуклые функции и их основные свойства.	4	4		6
4	Условия оптимальности для задач безусловной минимизации.	4	4		6
5	Условия оптимальности для выпуклых задач.	4	4		6
6	Условия оптимальности для общих задач математического программирования.	4	4		6
7	Теория двойственности для задач математического программирования.	5	5		9
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

###### 1. Постановки задач оптимизации и их классификация.

Постановка задач оптимизации Локальный и глобальный экстремумы. Классификация экстремальных задач. Примеры оптимизационных задач.

## 2. Выпуклые множества и их основные свойства.

Определение выпуклых множеств и их основные частные случаи.

Выпуклые множества. Пересечение и линейная комбинация выпуклых множеств, их свойства. Конус, выпуклый конус. Аффинное множество, две формы представления аффинного множества. Выпуклая, неотрицательная и аффинная комбинация точек. Выпуклая, коническая и аффинная оболочки множеств. Их связь с комбинациями точек.

Топологические свойства выпуклых множеств.

Внутренность, относительная внутренность и замыкание выпуклого множества. Относительная граница множества. Свойства относительной внутренности выпуклого множества.

Отделимость выпуклых множеств и проектирование.

Отделимость множеств. Свойства отделимости выпуклых множеств. Опорная гиперплоскость. Существование опорной гиперплоскости. Проекция точки на множество. Свойства проекций.

Понятие сопряженного множества.

Сопряженное множество. Второе сопряженное множество. Их свойства. Сопряженный конус и сопряженное линейное подпространство. Конус, двойственный к сумме конусов, и конус, сопряженный к пересечению конусов.

Многогранные множества и системы линейных равенств и неравенств.

Многогранные множества, полиэдры. Множество, сопряженное к многогранному множеству. Системы линейных равенств и неравенств. Теоремы об альтернативах. Лемма Фаркаша. Линейные матричные неравенства.

## 3. Выпуклые функции и их основные свойства.

Определение и основные свойства выпуклых функций.

Выпуклые, строго выпуклые и сильно выпуклые функции. Множество подуровня выпуклой и сильно выпуклой функции. Эпиграф функции, свойства эпиграфа выпуклой функции. Непрерывность и дифференцируемость по направлению выпуклой функции. Дифференциальные критерии выпуклой (сильно выпуклой) функции. Субдифференциал выпуклой функции.

Сопряженные и полярные функции.

Сопряженные и полярные функции, их свойства. Неравенства Юнга–Фенхеля и Минковского–Малера. Индикаторная и опорная функция выпуклого множества.

## 4. Условия оптимальности для задач безусловной минимизации.

Теорема Вейерштрасса и её следствия. Условия оптимальности для выпуклых задач минимизации в терминах субдифференциалов. Касательное направление, касательный конус. Конус возможных направлений. Их свойства. Теорема о необходимом условии экстремума в терминах производных по касательному направлению. Необходимое и достаточное условие экстремума для выпуклой задачи в терминах производных по направлению.

## 5. Условия оптимальности для выпуклых задач.

Необходимое и достаточное условия экстремума дифференцируемой функции на выпуклом множестве. Вариационное неравенство. Необходимые и достаточные условия экстремума для задачи безусловной минимизации.

## 6. Условия оптимальности для общих задач математического программирования.

Необходимые и достаточные условия оптимальности для задач математического программирования. Условия Каруша–Куна–Таккера. Достаточные условия второго порядка. Условия регулярности ограничений. Необходимые и достаточные условия оптимальности для выпуклой задачи математического программирования. Регулярная и нерегулярная задачи математического программирования.

7. Теория двойственности для задач математического программирования.

Седловая точка функции Лагранжа. Теория двойственности для задач математического программирования. Задача линейного программирования и двойственная к ней. Собственные и несобственные задачи математического программирования. Двойственность для несобственных задач линейного программирования.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Необходимое оборудование для лекций и практических занятий: компьютер, проектор.

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Курс методов оптимизации [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] .— 2-е изд. — М. : Физматлит, 2005, 2008 .— 367 с.
2. Численные методы оптимизации [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. Ф. Измайлов, М. В. Солодов .— М. : Физматлит, 2003, 2005 .— 304 с.
3. Методы оптимизации [Текст]. Ч. 1 : Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации : учеб. пособие для вузов / В. Г. Жадан ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2014 .— 271 с.
4. Методы оптимизации [Текст]. Ч. 2 : Численные алгоритмы : учеб. пособие для вузов / Жадан, В. Г. ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2015 .— 320 с.

### **Дополнительная литература**

1. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи [Текст] : учебник для вузов / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2005 .— 256 с.
2. Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Г. Бирюков ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2010 .— 225 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://www.mou.mipt.ru>  
<http://life-prog.ru/optimization/php>  
<http://www.optimization-on-line.org/>  
<http://simplemax.net/>  
<http://www.convexoptimization.com/>  
<http://www.mou.mipt.ru>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Необходимое программное обеспечение: программы MAPLE и MATLAB.

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс методов оптимизации, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания,
- подготовку к практическим занятиям, экзаменам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

**Разработчики:**

А.В. Гасников, д-р физ.-мат. наук, доцент  
К.Ю. Осипенко, д-р физ.-мат. наук, профессор  
А.Г. Бирюков, канд. физ.-мат. наук, доцент  
В.Г. Жадан, д-р физ.-мат. наук, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория оптимизации» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия и основные теоретические результаты в области теории и методов оптимизации в конечномерных пространствах;
- современные проблемы соответствующих разделов численных методов решения оптимизационных задач;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла «Методы оптимизации»;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных оптимизационных задач.

### уметь:

- понять поставленную оптимизационную задачу и провести ее формализацию;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных оптимизационных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждения;
- самостоятельно находить алгоритмы решения оптимизационных задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представлять математические знания в области методов оптимизации в устной и письменной форме.

### владеть:

- навыками решения оптимизационных задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых разделов методов оптимизации;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов теории оптимизации;
- предметным языком теории и методов оптимизации, навыками грамотного описания решения соответствующих задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Перечень вопросов представлен в приложенном документе.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень вопросов представлен в приложенном документе.



## Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена, обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой.

### 3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

В каждом семестре аттестация по дисциплине осуществляется в три этапа:

1. На первом этапе проводится семестровая письменная контрольная работа;
2. На втором этапе после контрольной работы студенты сдают два домашних задания;
3. На третьем этапе студенты проходят аттестацию в форме устного теоретического экзамена.

#### Контрольная работа

Предлагается четыре варианта контрольной работы, каждый из которых содержит четыре задачи.

Срок написания контрольной работы – в период с 5 по 12 декабря в осеннем семестре, с 5 по 12 мая в весеннем семестре.

#### Пример варианта контрольной работы в осеннем семестре

1. Найти проекцию точки  $a \in \mathbb{R}^3$  на множество  $G \subset \mathbb{R}^3$ ,  $a \notin G$  если

$$G = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2, x_1 + x_2 + x_3 = 3\}.$$

2. Пусть  $f(x, y) = \max\{|x-1| + e^{|y-1|}, |x-y-1|\}$ ,  $G = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1\}$ .

Пусть  $A \in G, A = (1, 1)^T$ . Найти  $\partial f(A)$  и  $\partial f_G(A)$ .

3. Пусть

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x \leq 1, y \leq 0, 3x - y \leq 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \leq 0, x - 4y \leq 5\}$$
 точки

$A(0, -4), B(0, 0), C(1, -1)$  принадлежат множеству  $G$ . Найти в этих точках касательные конусы к множеству  $G$  и сопряженные к ним.

4. Пусть  $f(x, y) = |x+1| + y$ ,  $g(x, y) = |y| - x + 2$ ,  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\}$ .

Для задачи  $f \rightarrow \min, (x, y) \in G$

а) Найти множество стационарных точек, проверить, являются ли стационарные точки седловыми. Проверить, являются ли эти точки решениями.

б) Сформулировать двойственную задачу, решить ее и проверить выполнимость соотношения двойственности.

#### Пример варианта контрольной работы

1. Сформулировать следующую задачу в виде задачи линейного программирования, построить для этой задачи двойственную, решить ее с помощью М-метода, восстановить решение исходной задачи.

$$\max(x + y)$$

$$2|x-1| + |y-2| \leq 2$$

2. Методом сопряженных градиентов решить задачу:

$$\min f(x), x \in \mathbb{R}^3, \quad \text{где } f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_2 + x_3$$

$$x_0 = (0, 1, 0).$$

3. Методом модифицированной функции Лагранжа решить задачу:

$$\min 3x^2 + 2xy + y^2,$$

$$\text{при условии } x + 2y \geq 1.$$

4. Методом штрафных функций решить задачу:

$$\min (x-y)^2 + (y-z)^2,$$

$$\text{при условии } x + 2y + z \leq 1,$$

$$x + z = 2.$$

### Домашние задания

В каждом семестре студенты сдают по два домашних задания.

Срок сдачи заданий – до 25 декабря в осеннем семестре и до 25 мая в весеннем семестре.

### ЗАДАНИЕ № 1

1. Используя геометрические интерпретации, решить следующие экстремальные задачи:

$$a) \quad \text{extr}(2x_1^2 - x_2^2) \text{ при условии } 2|x_1|^\lambda + |x_2|^\lambda \leq 1, \lambda > 0,$$

$$б) \quad \text{extr}(2|x_1|^\lambda + |x_2|^\lambda) \text{ при условии } 2x_1^2 - x_2^2 \leq 1, \lambda > 0,$$

$$в) \quad \text{extr}(2x_1^2 - x_2^2) \text{ при условии } 2|x_1|^\lambda + |x_2|^\lambda = 1, \lambda > 0,$$

$$г) \quad \text{extr}(2|x_1|^\lambda + |x_2|^\lambda) \text{ при условии } 2x_1^2 - x_2^2 = 1, \lambda > 0.$$

Указать, какие из решений этих задач являются локальными, глобальными, строгими, острыми.

2. Решить задачу:

$$\text{extr} \left[ (1-x-2y) \cdot xy^2 + (1-y-2z) \cdot y \cdot z^2 \right].$$

3. Найти экстремумы в следующей задаче:

$$\text{extr} \left( x^2 - xy + 2y^2 \right), \quad \text{если } x^2 - 2y^2 = 4.$$

4. Решить задачу:

$$\text{extr } c^T x, \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{если}$$

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^T A x + b^T x = 0 \right\}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$$\text{Рассмотреть случаи: } A > 0 \quad \text{и} \quad A \geq 0.$$

5. Пусть

$G_1, \dots, G_m$  – произвольные множества в  $R^n$ .

Доказать, что  $Aff(\sum_{i=1}^m G_i) = \sum_{i=1}^m Aff G_i$ ,

$$Cone(\bigcup_{i=1}^m G_i) = \sum_{i=1}^m Cone G_i,$$

$$Conv(\sum_{i=1}^m G_i) = \sum_{i=1}^m Conv G_i.$$

6. Найти опорные гиперплоскости ко множеству  $G$  в точках экстремума для задачи:

$$\min \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2, \text{ если } x \in G \subset R^n, \text{ где}$$

$$G = \left\{ x \in R^n : (x-a)^T (x-a) + c^T x \leq 1 \right\}, \quad a, c \in R^n, \lambda_i > 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$a^T a > 1.$$

7.

1) Пусть  $G \subset R^n$  – замкнутое множество,  $\bar{x} \in G$ . Найти множество

$Y \subset R^n : \forall a \in Y$  точка  $\bar{x} = \pi_G(a)$ . Рассмотреть случаи выпуклого и невыпуклого множеств  $G$ .

2) Пусть даны  $\bar{x} \in R^n$  и выпуклый конус  $K \subset R^n$ . Пусть  $Y = \bar{x} + K, a \in Y$ . Найти множества  $G \subset R^n : \bar{x} \in G$  и  $\forall a \in Y$  точка  $\bar{x} = \pi_G(a)$ .

3) Пусть  $G_1, G_2 \subset R^n$  – замкнутые множества и  $\bar{x} = G_1 \cap G_2$  – единственная точка. Каким условиям удовлетворяют множества  $G_1$  и  $G_2$ , если:

а)  $\bar{x} = \pi_{G_1}(a) \quad \forall a \in G_2$ .

б)  $\bar{x} = \pi_{G_1}(a) = \pi_{G_2}(b) \quad \forall a \in G_2, \forall b \in G_1$ .

8. 1) Показать, что конусом, сопряженным к конусу

$$G = \left\{ z \in R^n : a_i^T z \leq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad a_i^T z = 0, \quad i = \overline{m+1, \ell} \right\},$$

является конус

$$G^* = \left\{ P \in R^n : P = -\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i + \sum_{i=m+1}^{\ell} \lambda_i a_i; \quad \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, m} \right\}.$$

2) Найти  $G^*, G^{**}, G^{***}$  для

$$G = \left\{ x \in R^2 : \|x_1| - 2| + \|x_2| - 3| \leq 1 \right\}.$$

9. Определить расстояние между множествами  $G_1 \subset R^n$  и  $G_2 \subset R^n$ , а также уравнения двух разделяющих гиперплоскостей, одна из которых является опорной ко множеству  $G_1$ , другая – ко множеству  $G_2$  в точках, для которых расстояние минимально

$$G_1 = \left\{ x \in R^n : x^T x \leq 1 \right\}, \quad G_2 = \left\{ x \in R^n : (x-a)^T (x-a) \leq 1 \right\},$$

$$\|a\| > 2.$$

Соответствующую задачу оптимизации решить методом множителей Лагранжа.

10.

а) Пусть даны матрицы  $A \in R^{n \cdot n}$ ,  $U \in R^{n \cdot m}$ ,  $V \in R^{n \cdot m}$ ,  $1 \leq m \leq n$ ,

$$\det A \neq 0, \quad \det(E_m + V^T A^{-1} U) \neq 0.$$

Доказать, что

$$(A + U \cdot V^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} U (E_m + V^T A^{-1} U)^{-1} V^T A^{-1}.$$

Рассмотреть частные случаи:

1)  $A = E_n$ ; 2)  $m = 1$ ; 3)  $A = E_n$ ,  $m = 1$ .

Здесь  $E_m$  и  $E_n$  – единичные матрицы порядка  $m$  и  $n$  соответственно.

Для всех случаев найти  $(A + \lambda UV^T)^{-1}$ , где число  $\lambda \neq 0$ .

б) Пусть даны матрицы  $A \in R^{n \cdot n}$  и  $B \in R^{n \cdot n}$ ,

$$\det A \neq 0, \quad \det(E_n + BA^{-1}) \neq 0.$$

Доказать, что

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} (E_n + BA^{-1})^{-1} BA^{-1} = A^{-1} - (A + B)^{-1} BA^{-1}.$$

Рассмотреть частный случай, когда  $A = E_n$ .

## ЗАДАНИЕ № 2

1. Найти опорную функцию для множеств:

$$G_1 = \left\{ x \in R^n : \frac{1}{2} x^T A x + a^T x + b \leq 0 \right\}, \quad A = A^T > 0,$$

$$G_2 = \left\{ x \in R^2 : x_2 < 0; \quad x_1 \cdot x_2 \leq 1 \right\}.$$

2. Найти  $\partial f_G(X)$  функции  $f(x) = \max(|x_1 + x_2 - x_3|, |x_1 - x_2 + 2x_3|)$  на множестве

$$G = \left\{ x \in R^3 : x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 \leq 4; \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

3. Показать, что экстремальная задача регулярна:  $\min f(x)$ ,

$$a_i^T x \leq b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$a_i^T x = b_i, \quad i = \overline{m+1, \ell}, \quad x \in R^n.$$

4. Решить экстремальную задачу:

$$\text{extr} |x_1 - x_2 - 2x_3|, \quad x \in R^3,$$

если

$$2 \leq x_i \leq 7, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Показать, что в точках решения выполнено необходимое и достаточное условие экстремума.

5. Решить задачу

$$\text{extr} (2x_2 - x_1^2), \quad x \in G, \quad \text{где}$$

$$G = \left\{ x \in R^2 : \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} \leq 4 \right\},$$

для чего найти точки  $x^*$ , где  $\nabla f(x^*) \in T^*(x^*)$  и  $-\nabla f(x^*) \in T^*(x^*)$ , и выяснить, какие из них являются точками локального и глобального, строгого и острого экстремума.

6. Решить задачу БМ:

$$\min \left( \frac{1}{2} x^T A x + \alpha |c^T x - b| \right), \quad A > 0,$$

$$x \in R^n, \quad \alpha > 0, \quad b \neq 0.$$

7. Решить задачу

$\text{extr } 2x_2 \cdot x_3 + x_1$ , если

$$x_1 \geq 0; \quad x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 0; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4.$$

8. Решить методом множителей Лагранжа задачу:

$\min x_2$ , если

$$x_2 \geq 0; \quad -x_2^3 + x_1 \leq 0; \quad -x_2^3 - x_1 \leq 0, \quad x_2 \leq 1.$$

9. Построить задачу, двойственную к следующей:

$$\min \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \right), \quad \lambda_i > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in G,$$

$$G = \{x \in R^n: \quad a^T x \leq b, \quad c^T x = d\}.$$

10. Найти функции, сопряженные к функциям:

а)  $f(x) = c^T x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2, \quad x \in R^n, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1 \dots n.$

б)  $f(x) = \sqrt{1 + x^T x}, \quad x \in R^n.$

11. Для задачи  $\min(-x^2 + y^2)$ , где  $3x^2 + y^2 \leq 3, \quad -x + 2y \leq 0$ ,

найти седловую точку, решая задачу «в лоб», а именно:

а) считая множители Лагранжа параметрами, найти  $x^*(\lambda_1, \lambda_2), \quad y^*(\lambda_1, \lambda_2)$  из решения задачи  $\min L(x, y, \lambda_1, \lambda_2); \quad x, y \in R^2;$

б) найти  $\lambda_1^*, \lambda_2^*$  из решения задачи

$$\max L(x^*(\lambda_1, \lambda_2), \quad y^*(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1, \lambda_2) \text{ и } x^*(\lambda_1^*, \lambda_2^*), \quad y^*(\lambda_1^*, \lambda_2^*), \\ \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0;$$

в) сравнить решения  $x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*$  с решением, полученным из условия оптимальности ККТ.

12. В выпуклой задаче

$$\min \left[ |x - 2| + (y - 2)^2 \right], \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G,$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 : 2x + y \geq 8 \right\}$$

а) найти множество стационарных точек:

$$S = \left\{ x, y, \lambda : 0 \in \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x}, \lambda(2x + y - 8) = 0, \right\}, \quad \lambda \geq 0.$$

б) решить двойственную задачу:  $\max \xi(\lambda)$ , где  $\lambda \geq 0$

$$\xi(\lambda) = \inf L(x, y, \lambda) \quad \text{по } x, y \in R^2.$$

в) найти седловую точку  $(x^*, y^*, \lambda^*)$  функции Лагранжа.

### ЗАДАНИЕ № 3

1. Найти стационарные точки и точки экстремума функции

$$f(x) = x_1^4 + 2x_2^4 - 2x_1^2 - 4x_2^2.$$

Сделать по одному шагу методом наискорейшего спуска (НС) из начальных точек

$$x_0 = (0,8; 0,8), \quad x_0 = (-0,8; -0,8).$$

Оценить значение коэффициента скорости сходимости в методе НС для итерационных процессов, для которых

$$x_0 \in G = \left\{ x \in R^2 : \left| x_i - x_i^* \right| \leq 0,2, \quad i = \overline{1,2} \right\},$$

$x^*$  – точки локальных минимумов, к которым сходится метод НС из указанных точек  $x_0$ .  
Найти предельное значение коэффициента скорости сходимости.

2. Для решения задачи  $\min(x^2 - 2x)$  при условии  $-1 \leq x \leq 5$  с  $\varepsilon$ -точностью методами дихотомии, золотого сечения и Фибоначчи найти число вычислений функции для  $\varepsilon = 10^{-7}$  и  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

3. Какую скорость сходимости к точке минимума имеет метод Ньютона при минимизации функций  $f(x), x \in R^n$ , если

а)  $f(x) = \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{2p}, \lambda_i > 0, p=1, 2, \dots;$

б)  $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{2p},$

где  $A = A^T > 0; \quad p=1, 2, \dots?$

4. Пусть векторы  $a_i \in R^n, \quad i = \overline{1, n}$  – линейно независимы,  $A = A^T$ . Построим систему векторов  $h_i \in R^n$ :

$$h_1 = a_1;$$

$$h_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_k^T A h_i}{h_i^T A h_i} h_i, \quad k = \overline{2, n},$$

при этом система  $a_i \in R^n, \quad i = \overline{1, n}$ , такова, что  $h_i^T A h_i \neq 0, \quad i = \overline{1, n}$ .

Доказать, что векторы  $h_i \in R^n, \quad i = \overline{1, n}$ , сопряжены относительно матрицы  $A$ , а также справедливо соотношение

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{h_i h_i^T}{h_i^T A h_i}. \quad (*)$$

Используя формулу (\*), решить систему линейных уравнений (\*\*) предварительно ее симметризовав, для

$$a_i = e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)^T, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4,$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = -1, \quad (**)$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2.$$

6. Определить скорость сходимости метода Ньютона и метода наискорейшего спуска и окрестность, из которой эти методы сходятся к оптимальному решению следующей задачи:

$$\min -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + x^T x}, \quad x \in R^n.$$

**Замечание.** При решении задачи замену переменных  $r = \|x\|$  не использовать.

7. Найти минимум функции методом Ньютона и методом сопряженных градиентов, где

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_2 x_3 - x_1 + x_2 - x_3, \quad x \in R^3,$$

$$x_0 = (0, 0, 1).$$

Найти  $\min 3(x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 2)^2 + (x_3 - 1)^2, \quad x \in R^3$ , при условиях:  $2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2; \quad 2x_1 - x_2 + x_3 = 3$  методом множителей Лагранжа. Построить для данной задачи двойственную и решить ее. Сравнить решения этих задач.

9. Для задачи  $\min f(x), x \in G, f$  – непрерывно дифференцируемая функция. Сформулировать необходимые условия экстремума, если

- 1)  $G = \{x \in R^n : a \leq x \leq b\}$ ;
- 2)  $G = \{x \in R^n : Ax = b, b \in R^m, m < n, \text{rang} A = m\}$ ;
- 3)  $G = \{x \in R^n : x^T A x \leq 1, A = A^T\}$ .  
Рассмотреть случаи  $A \geq 0$  и  $A > 0$ ;
- 4)  $G = \{x \in R^n : x \geq 0\}$ .

Сформулировать для указанных задач достаточные условия экстремума первого порядка, второго порядка, достаточные условия острого экстремума. Сформулировать для задачи математического программирования необходимые и достаточные условия оптимальности первого и второго порядков.

10. Пусть функции  $f$  и  $\varphi_i, i = \overline{1, m+l} : R^n \rightarrow R$ , непрерывно дифференцируемы на  $R^n$ . Рассмотрим экстремальные задачи:

А) Найти:  $\min f(x), x \in G \subset R^n$ .

Б) Найти:  $\min f(x), (x, y) \in Y \subset R^{n+m}$ ,

где  $G = \{x \in R^n : \varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, \varphi_i(x) = 0, i = \overline{m+1, l}\}$ ,

$Y = \{x \in R^n, y \in R^m : \varphi_i(x) + y_i^2 = 0, i = \overline{1, m}, \varphi_i(x) = 0, i = \overline{m+1, l}\}$ .

1) Доказать, что точка  $x^* \in G$  является локальным решением задачи А тогда и только тогда, когда существует точка  $(x^*, y^*) \in Y$ , где  $x^* \in G$ , являющаяся локальным решением задачи Б.

2) Доказать, что для всех точек  $x^* \in G$  задачи А существует  $y^* \in R^m$  такой, что  $(x^*, y^*) \in Y$  является стационарной точкой задачи Б.

3) Верно ли, что для стационарной точки  $(x^*, y^*) \in Y$  задачи Б точка  $x^* \in G$  является стационарной точкой задачи А?

#### ЗАДАНИЕ № 4

1. Для задачи ЛП

$$\begin{aligned} \max & (x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4), \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ & x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ & x_i \geq 0, i = \overline{1, 4}, \end{aligned}$$

построить двойственную задачу, решить её, после чего решить прямую задачу.

2. Найти решение задачи

$$\begin{aligned} \max & (x_1 + \lambda x_2), \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3, x_2 + p \leq 6, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

зависящее от параметров  $p$  и  $\lambda$ .

3. Следующую задачу линейного программирования решить табличным симплекс-методом [1]:

$$\begin{aligned} \max & (4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4), \\ & 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq A, \\ & 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 20B, x_i \geq 0, \\ & i = \overline{1, 4}, A \in [15, 30], B \in [3, 10]. \end{aligned}$$



Найти решение соответствующей двойственной задачи.

**Указание.** Конкретные значения параметров  $A$  и  $B$  получить у своего преподавателя.

4. Пусть матрица  $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Методом внешних штрафных функций решить задачу 1:

$\min \frac{1}{2} x^T A x$ , при условии  $2x_1 + 4x_2 = 6$ ,  $x \in R^2$ . Методом внутренних штрафных функций

решить задачу 2:  $\min \frac{1}{2} x^T A x$  при условии  $3x_1 + 6x_2 \geq 8$ ,  $x \in R^2$ .

5. Решить методом точных внешних штрафных функций задачу: найти

$$\min(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3), \text{ где } x \in R^3 \text{ и}$$

$$a)(x_1 - a_1)^2 + 2(x_2 - a_2)^2 + 3(x_3 - a_3)^2 \leq b, \quad b > 0.$$

$$\text{б) значение параметров } a_i, c_i, b, \quad i = \overline{1,3},$$

взять у своего преподавателя.

6. Методом условного градиента решить задачу: найти

$\max (2x_1^2 - x_2^2)$  при условиях  $x_1 + 2x_2 \leq 8$ ;  $x_1 - 2x_2 \leq 4$ ;  $-x_1 + 2x_2 \leq 4$ ;  $x_1 \geq 0$ ;  $x_2 \geq 0$ . Начальная точка  $x_0 = (1, 0)$ . Длина шага  $a$  вдоль направления  $h$  определяется из условия одномерной максимизации.

7. Методом проекции градиента (схема № 2) решить задачу  $\max (2x_1^2 - x_2^2)$  при условиях:  $x_1 - |x_2 - 4| \geq 0$ ;  $x_2 - 3x_1 \geq 0$ , Начальная точка  $x_0 = (0, 5)$ .

8. Методом возможных направлений решить следующую задачу:  $\min(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 3)^2$  при условиях:  $x_1 + 2x_2 \leq 4$ ,  $x_1^2 - x_2 \leq 0$ ,  $x_1 \geq 0$ . Начальная точка  $x_0 = (0, 1)$ .

9. Методом модифицированных функций Лагранжа решить задачи.

$$1) \min \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2, \quad \lambda_i > 0, \quad i = \overline{1, n}, \text{ если } Ax = b, \quad b \in R^n, \quad m < n,$$

$$\text{rang} A = m, \quad Aa \neq b.$$

$$2) \min \left[ (x_1 + a_1)^2 + 2(x_2 + a_2)^2 + 3(x_3 + a_3)^2 \right], \quad \text{где } x \in R^3 \text{ и } c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \geq b, \quad \text{значения параметров } a_i, c_i, b, \quad i = \overline{1,3}, \text{ взять у своего преподавателя.}$$

Найти предельное значение множителя Лагранжа  $\lambda_k$ . Оценить коэффициенты скорости сходимости последовательностей  $x_k, \lambda_k, k = 1, 2, \dots$

**Указание.** При необходимости воспользоваться формулами из задачи № 11, задание № 1.

10. Методом параметризации целевой функции решить задачу  $\min(x_1 - 2x_2 + x_3)$  при условии  $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$ ,  $x_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1,3}$ .

11. Найти барьерно-проективным методом расстояние от начала координат до выпуклой оболочки точек  $z_i \in R^2$ ,  $i = \overline{1,3}$ :  $z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $z_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Указание.** Свести задачу к задаче условной минимизации на симплексе.

## Экзамен

Экзамен проводится в соответствии с расписанием.

**Перечень контрольных вопросов для экзамена в 5-ом семестре.**

1. Определения локального и глобального минимума. Точки строгого и острого минимума.
2. Классы экстремальных задач и их примеры. Задача безусловной и условной минимизации. Задачи линейного и выпуклого программирования. Классическая и общая задачи математического программирования.
3. Дать определение выпуклого множества. Показать, что пересечение и линейная комбинация выпуклых множеств есть также выпуклое множество. Привести примеры линейных комбинаций множеств.
4. Дать определение выпуклого конуса и аффинного множества. Какие два способа представления аффинного множества известны?
5. Выпуклая, коническая и аффинная оболочки множеств. Их связь с комбинациями точек. Что утверждает теорема Каратеодори о минимальном количестве точек в их выпуклой комбинации?
6. Что такое внутренние и относительно внутренние точки множеств? Всегда ли существует внутренность и относительная внутренность у выпуклого множества?
7. Как связаны относительные внутренности и аффинные оболочки выпуклого множества и его замыкания?
8. Дать определение проекции точки на множество. Показать, что проекция точки на замкнутое выпуклое множество всегда существует и единственна.
9. Привести основные неравенства, связывающие проекцию точки на выпуклое множество с остальными точками этого множества.
10. Дать определения понятий отделимости двух множеств (просто отделимости, собственной отделимости, строгой отделимости и сильной отделимости). Привести критерии сильной и собственной отделимости двух выпуклых множеств.
11. Сформулировать условия отделимости, а также строгой и сильной отделимости точки от выпуклого множества.
12. Дать определение опорной и собственной опорной гиперплоскости. Показать, что в любой граничной (относительно граничной) точке выпуклого множества всегда существует опорная (собственно опорная) гиперплоскость.
13. Дать определение сопряженного и второго сопряженного множества к произвольному множеству. Привести их основные свойства. Показать, что второе сопряженное множество к выпуклому замкнутому множеству, содержащему начало координат, совпадает с ним самим.

14. Дать определение сопряженного конуса. Чему равняются сопряженные конусы к сумме выпуклых конусов и их пересечению? Какой вид имеет сопряженный конус к выпуклому конусу, порожденному столбцами матрицы?

15. Что такое многогранное и полиэдральное множество? Всегда ли сопряженное множество к многогранному множеству является полиэдральным и наоборот?

16. Системы линейных равенств и неравенств. Что такое альтернативная система к заданной системе? Уметь построить альтернативную систему к заданной неоднородной системе с помощью сопряженных конусов. В чем заключается утверждение леммы Фаркаша?

17. Что такое линейное матричное неравенство?

18. Дать определения выпуклых, строго выпуклых и сильно выпуклых функций. Привести неравенство Йенсена. Показать, что функция выпукла тогда и только, когда ее эпиграф есть выпуклое множество. Показать, что у выпуклой функции все множества подуровня (множества Лебега) выпуклы, причем у сильно выпуклых функций они ограничены. Всегда ли выпукла функция, у которой все множества подуровня выпуклы?

19. Знать, что выпуклая функция непрерывна на относительной внутренности своей эффективной области. Что такое эффективная область функции?

20. Привести результат о существовании производных по направлению у выпуклых функций. В случае, когда функция дифференцируема или дважды дифференцируема, привести критерии ее выпуклости.

21. Что такое субдифференциал выпуклой функции. Всегда ли существует субдифференциал у выпуклой функции? Чему равен субдифференциал суммы выпуклых функций?

22. Что такое индикаторная и опорная функции выпуклого множества? Какой вид имеет субдифференциал индикаторной функции? Чему равен условный субдифференциал выпуклой функции на выпуклом множестве?

23. В чем заключается понятие сопряженной функции и второй сопряженной функции? Показать, что вторая сопряженная функция к произвольной функции совпадает с ее выпуклой оболочкой. Привести неравенство Юнга-Фенхеля и привести примеры сопряженных функций.

24. В чем заключается понятие полярной функции? Привести неравенство Минковского-Малера и привести примеры полярных функций.

25. Теорема Вейерштрасса для непрерывных и полунепрерывных снизу функций, ее следствия.

26. Необходимые и достаточные условия экстремума для выпуклой задачи в терминах субдифференциалов. Является ли локальный минимум выпуклой функции одновременно и глобальным? Какие множества минимумов у выпуклой, строго выпуклой функции и сильно выпуклых функций?

27. Что такое касательный конус и конус возможных направлений для произвольного и выпуклых множеств? Что такое тангенциальная производная функции по касательному направлению к множеству?

28. Привести теорему о необходимом условии минимума функции на множестве в терминах тангенциальной производной функции по касательным направлениям. Можно ли в случае выпуклой функции и выпуклого множества перейти к обычным производным по направлениям из конуса возможных направлений?

29. Сформулировать необходимые и достаточные условия минимума дифференцируемой функции на выпуклом множестве. Сформулировать необходимые и достаточные условия минимума для задачи безусловной минимизации.

30. В чем заключается утверждение теоремы Фана для системы линейных равенств и выпуклых неравенств?

31. Что такое общая функция Лагранжа (функция Лагранжа-Джона) для задачи математического программирования? Регулярная функция Лагранжа и ее отличие от общей функции.

32. Сформулировать принцип Лагранжа для задачи математического программирования.

Что такое стационарная точка функции Лагранжа и что такое множители Лагранжа? В чем заключается условие дополняющей нежесткости? Дать определение точки Куна-Таккера (Каруша-Куна-Таккера).

33. Что такое активные ограничения? Когда можно от общей функции Лагранжа перейти к регулярной функции? Привести условие регулярности в терминах линейной независимости градиентов активных ограничений. Как изменяется формулировка принципа Лагранжа для общей задачей математического программирования (при наличии дополнительного множества простой структуры)?

34. Сформулировать достаточные условия оптимальности второго порядка для задачи математического программирования. Что такое условие строгой дополняющей нежесткости?

35. Задача выпуклого программирования, как частный случай общей задачи математического программирования. Привести необходимые и достаточные условия

оптимальности для этой задачи. В чем заключаются условия регулярности ограничений по Слейтеру?

36. Дать определение седловой точки функции Лагранжа. Если у функции Лагранжа существует седловая точка, то является ли компонента, соответствующая исходной переменной, решением задачи математического программирования?

37. Привести теорему Куна-Таккера о седловой точке функции Лагранжа для задачи выпуклого программирования.

38. Что такое прямая и двойственная задачи математического программирования? Их свойства. В чем заключается слабая и сильная двойственность? Теорема двойственности для задач выпуклого программирования. Что понимается под несобственными задачами?

39. Задачи линейного программирования, разные формы их представления (каноническая, основная, стандартная). Построить к ним двойственные задачи. Теорема двойственности для задачи линейного программирования.

***Пример экзаменационного билета в осеннем семестре:***

Билет 1.

1. Постановка задач оптимизации. Локальный и глобальный экстремумы. Классификация экстремальных задач. Примеры.
2. Задача