

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория вычислительной сложности
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 3

Программу составил: Д.В. Мусатов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 12.05.2023

Аннотация

Полугодовой курс закладывает основы теории сложности вычислений, которые далее при желании можно развивать в различных направлениях. Основные вопросы курса: какие бывают вычислительные ресурсы, как подсчитывать их необходимое количество для решения данной алгоритмической задачи и как отличить решаемые на практике задачи от нерешаемых. Много внимания уделяется изучению различных классов сложности, связей между ними и классификации конкретных задач.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Освоение понятия сложности вычислений.

Задачи дисциплины

- Научиться оценивать сложность алгоритмической задачи в терминах вычислительных ресурсов.
- Научиться отделять практически решаемые задачи от нерешаемых.
- Изучить «зоопарк» классов сложности и начать в нём ориентироваться.
- Изучить набор открытых гипотез о соотношении сложности задач и связи между этими гипотезами.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории сложности вычислений;
- современные проблемы соответствующих разделов сложности вычислений;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач вычислительной сложности.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области вычислительной сложности в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов оценки вычислительной сложности;
- предметным языком сложности вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий**

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Понятие сложности.	6	6		6
2	Временная сложность.	6	6		6
3	Метод диагонализации.	6	6		6
4	Схемная сложность.	6	6		6
5	Дерандомизация.	6	6		6
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

1. Понятие сложности.

Измерение сложности алгоритма и задачи. Тезис Чёрча-Тьюринга в сильной форме.

2. Временная сложность.

Классы P и NP. Теория NP-полноты.

3. Метод диагонализации.

Метод диагонализации. Полиномиальная иерархия. Пространственная сложность.

4. Схемная сложность.

Вероятностные алгоритмы и сложностные классы. Сложность задач подсчёта.

5. Дерандомизация.

Сложность в среднем. Основания криптографии.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и экраном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. В. Вьюгин ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т), Ин-т проблем информации им. А. А. Харкевича .— М. : МФТИ, 2012 .— 140 с.

Дополнительная литература

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.mou.mipt.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс "Прикладная математика: искусство и ремесло вычислений", должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные понятия, аксиомы, методы доказательств, подходы и методы разработки мат. моделей, а также способы численного поиска решений.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- программирование;
- численное решение полученных дифференциальных уравнений;
- подготовку к итоговой аттестации.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: Д.В. Мусатов, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория вычислительной сложности» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории сложности вычислений;
- современные проблемы соответствующих разделов сложности вычислений;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач вычислительной сложности.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области вычислительной сложности в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов оценки вычислительной сложности;
- предметным языком сложности вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры задач из самостоятельных

1. Дайте формальное определение многоленточной машины Тьюринга, которой запрещено изменять содержимое первой ленты (достаточно указать отличия от обычного определения). Докажите, что на машине такого вида можно смоделировать классическую многоленточную машину Тьюринга с не более чем полиномиальным замедлением.
2. Пусть $A, B \in \text{coNP}$. Докажите, что $A \cup B \in \text{coNP}$.
3. Рассмотрим язык $\text{LASTBIT-MAJ} = \{x \in \{0,1\}^{2n} \mid x_{2n} \text{ совпадает с наиболее частым значением из } x_1, \dots, x_{2n-1}\}$. Докажите, что он лежит в L .
4. Придумайте бесконечный язык $A \in [P/\text{poly}]$, такой что для любого $B \in A$ выполнено $B \in [P/\text{poly}]$.

Примеры задач из контрольных

1. Придумайте NP-полные языки A и B , такие что $A \cap B \in P$.
2. Докажите PSPACE-полноту языка $\text{LOOPING} = \{(M, 1^n, k) \mid \text{детерминированная машина Тьюринга } M \text{ закикливается на пустом входе, заняв не больше } n \text{ ячеек и сделав не больше } k \text{ ходов}\}$.
3. Докажите, что язык $\text{DOUBLED SUBSTRING} = \{(x, y) \mid xx \sqsubseteq y\}$ лежит в AC^0 .
4. Докажите, что задача $\text{DNFSAT} = \{\phi \mid \phi - \text{выполнимая формула в ДНФ}\}$ лежит в P , но задача подсчёта выполняющих наборов для ДНФ является NP-трудной.

Примеры тем для проектов/курсовых

1. Обзорные проекты по теории:
 - a. Задача об изоморфизме графов: класс GI и полные задачи в нём.
 - b. Сложность поиска неподвижных точек (класс FIXP и др).
2. Изложение доказательства некоторой теоремы:
 - a. Теорема Импульца--Вигдерсона: если в классе E есть язык, не распознаваемый схемами субэкспоненциального размера, то $P=BPP$.
 - b. Теорема Разборова--Смоленского: $\text{mod}_p \notin ACC^0(q)$ для различных простых p и q .
3. Обзоры сложности задач в некоторой области математики. Для заданной области нужно составить выборку задач и классифицировать их насколько возможно по различным сложностным классам: P , NP , PH , $PSPACE$ и т.д. Хотя бы для одной из задач нужно доказать полноту в соответствующем классе.
4. Исследовательские проекты.
 - a. Нужно найти ошибку в одном из опубликованных доказательств или опровержений $P=NP$.
 - b. Нужно проанализировать сложность какой-то компьютерной или настольной игры.

5. Алгоритмические проекты. Требуется описать некоторый алгоритм, доказать его корректность и имплементировать его (возможно, в частном случае) на любом языке программирования. Текст отчёта должен включать в себя описание алгоритма, его анализ и результаты тестовых запусков. В частности, нужно описать, в каких случаях алгоритм работает хорошо, а в каких – плохо. Оценивается прежде всего текст отчёта, а не текст программы. Примеры задач:

- a. Поиск дерева Штейнера.
- b. Решение метрической задачи коммивояжёра.
- c. Поиск раскраски графа в 3 цвета (за экспоненциальное время с малым основанием экспоненты).

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Модели вычислений: одноленточные и многоленточные машины Тьюринга. Тезис Тьюринга в сильной форме.
2. Измерение времени работы алгоритма. Класс P и примеры задач из него.
3. Класс NP: два определения и их эквивалентность. Класс coNP. Полиномиальная сводимость по Карпу и её свойства. NP-трудные и NP-полные задачи. Теоремы об иерархии.
4. Теорема Ладнера о существовании NP-промежуточных задач. Измерение зоны работы алгоритма. Класс PSPACE. Теорема Сэвича. PSPACE-полные задачи.
5. Классы L, NL и coNL. NL-полнота. $NL = coNL$.
6. Вероятностные алгоритмы. Классы BPP и RP. Вероятностные алгоритмы проверки простоты. Интерактивные доказательства и класс IP.
7. Интерактивные доказательства с общими случайными битами и класс AM.
8. $IP = PSPACE$.
9. Основные понятия криптографии: односторонние функции и псевдослучайные генераторы.
10. Доказательства с нулевым разглашением.
11. Приближённое нахождение оптимума: полиномиальные алгоритмы для отдельных задач и PCP-теорема.
12. Введение в теорию колмогоровской сложности.
13. Введение в теорию квантовых вычислений.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

БРС по курсу «Прикладная математика: искусство и ремесло вычислений»

В течение семестра предполагается постоянное выполнение студентами домашних заданий, проведение двух контрольных работ и получение студентом двух оценок:

- Оценка за контрольные работы, О1, как среднее арифметическое всех оценок за контрольные;
- Оценка за выполнение домашних заданий, О2, ставится преподавателем по результатам работы в семестре по правилам, определяемым преподавателем.

В конце семестра проводится итоговый опрос по знанию студентами основных теоретических положений курса и владению умениями численно решать задачи. Оценка по результатам итогового опроса – О3.

Все оценки О1, О2, О3 ставятся по десятибалльной шкале.

Финальная оценка студента за семестр, ОФ, определяется по формуле:

$$ОФ = 0,2 \times О1 + 0,3 \times О2 + 0,5 \times О3.$$

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Дифференцированный зачет проводится путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.