

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Вычислительные методы математической физики
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

6 (весенний) - Зачет

7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 30 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: В.П. Шутяев, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике 16.05.2020

Аннотация

В данном курсе рассматриваются следующие основные темы:

- формирование профессиональных знаний, связанных с использованием современных теоретических концепций в области вычислительных методов математической физики;
- развитие умений, основанных на полученных теоретических знаниях и практических навыках, позволяющих на творческом уровне создавать и применять физико-математические модели и численные методы к решению основных задач математической физики;
- получение студентами навыков самостоятельной исследовательской работы, предполагающей изучение специфических алгоритмов, инструментов и средств, необходимых для решения фундаментальных и прикладных задач, исследования и моделирования процессов и систем;
- получение практических навыков анализа, обработки и использования экспериментальных и наблюдательных данных для решения фундаментальных и прикладных задач, исследования и моделирования процессов и систем.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Целью учебной дисциплины является получение знаний об основных вычислительных методах математической физики, в том числе, основах теории разностных методов, вариационных методов, принципах построения и исследования вычислительных алгоритмов решения задач математической физики, методах решения систем сеточных уравнений, возникающих при разностной аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных, методах решения сопряженных уравнений, методах возмущений в задачах математической физики и практическая подготовка студентов к дальнейшей самостоятельной работе в области математического моделирования физических задач и современных технологий.

Задачи дисциплины

- ознакомление слушателей с принципами и методами численного решения задач математической физики;
- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области вычислительных методов математической физики;
- оказание консультаций и помощи слушателям в проведении собственных теоретических и экспериментальных исследований в области численного решения задач математической физики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-3 Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде	УК-3.1 Способен устанавливать разные виды коммуникации (учебную, научную, деловую, неформальную и др.)
	УК-3.2 Взаимодействует с другими членами команды для достижения поставленной задачи
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- ☐ основные понятия теории разностных схем;
- ☐ общие принципы построения разностных схем для задач математической физики;
- ☐ метод прогонки для решения разностных уравнений;
- ☐ схему Кранка-Николсон разностных методов для одномерных нестационарных задач;
- ☐ вариационные методы;
- ☐ свойства операторов разностной задачи;
- ☐ способы аппроксимации граничных условий;
- ☐ метод конечных элементов;
- ☐ метод возмущений для задач на собственные значения;
- ☐ алгоритмы возмущений в нестационарных задачах;
- ☐ алгоритмы возмущений в нелинейных задачах математической физики;
- ☐ методы решения систем сеточных уравнений;
- ☐ нестационарные итерационные методы в методах решения систем сеточных уравнений.

уметь:

- применять численные методы к решению основных задач математической физики;
- абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций;
- оценивать погрешности аппроксимации и точности приближенных решений;
- делать правильные выводы из сопоставления результатов аналитической теории и численного эксперимента;
- производить численные оценки по порядку величины;
- делать качественные выводы при переходе к предельным условиям в изучаемых проблемах;
- видеть в технических задачах физическое содержание;
- пользоваться справочной литературой научного и прикладного характера для быстрого поиска необходимых математических и физических данных и понятий.

владеть:

- базовыми знаниями в области вычислительных методов математической физики и принципами их использования в профессиональной деятельности;
- навыками самостоятельного численного решения основных задач математической физики;
- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физических задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Задача о минимизации функционала энергии. Метод Рунге в энергетических пространствах. Метод Галеркина. Вариационная формулировка краевых задач с оператором диффузии матричная формулировка приближенных задач метода Рунге			8	15
2	Основные понятия теории разностных схем. Одномерное уравнение диффузии. Разностный метод для одномерного уравнения диффузии. Метод интегрального тождества. Матричная формулировка разностной задачи. Сеточные спектральные задачи.			8	15

3	Построение разностных схем для эволюционной задачи общего вида. Спектральный критерий устойчивости. Уравнение теплопроводности. Явная и неявная схемы. Схема Кранка-Николсон. Уравнение переноса. Свойства решения задачи. Явная и неявная схемы, схема "бегущего" счета.			8	15
4	Разностные методы аппроксимации двумерных уравнений диффузии на прямоугольных сетках. Метод конечных элементов с кусочно-линейными и билинейными базисными функциями.			6	15
5	Методы расщепления, дробных шагов и переменных направлений. Аппроксимация, устойчивость, сходимость методов расщепления	10			5
6	Прямые методы. Метод исключения Гаусса для систем с ленточными матрицами. Метод разделения переменных. Быстрое преобразование Фурье. Общие понятия теории итерационных методов	10			5
7	Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в задачах математической физики.	10			5
Итого часов		30		30	75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Задача о минимизации функционала энергии. Метод Рунта в энергетических пространствах. Метод Галеркина. Вариационная формулировка краевых задач с оператором диффузии матричная формулировка приближенных задач метода Рунта

Задача о минимизации функционала энергии. Классический метод Рунта.

Энергетическое пространство симметричного положительно определенного оператора. Вариационная постановка задачи и обобщенное решение. Метод Рунта в энергетических пространствах.

формулировка задач в случае несамосопряженных операторов. Метод Галеркина

Вариационная формулировка краевых задач с оператором диффузии. Энергетическое пространство, главные и естественные краевые условия.

Метод конечных элементов с кусочно-линейными базисными функциями. Оценка погрешности. Матричная формулировка приближенных задач метода Рунта

2. Основные понятия теории разностных схем. Одномерное уравнение диффузии. Разностный метод для одномерного уравнения диффузии. Метод интегрального тождества. Матричная формулировка разностной задачи. Сеточные спектральные задачи.

Общие принципы построения разностных схем для задач математической физики, переход от непрерывных задач к матричным. Сетки и пространства сеточных функций. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теория сходимости.

Дифференциальная постановка задачи. Область определения оператора. Симметричность и положительная определенность. Основные пространства функций. Разрешимость и свойства решения. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных чисел и функций.

Свойства разностного оператора. Аппроксимация, устойчивость, сходимость.

Метод интегрального тождества.

Матричная формулировка разностной задачи. Метод исключения Гаусса и факторизация матрицы системы, LU-разложение. Метод прогонки для решения разностных уравнений.

Сеточные спектральные задачи. Сеточные собственные числа и функции. Методы решения сеточных спектральных задач.

3. Построение разностных схем для эволюционной задачи общего вида. Спектральный критерий устойчивости. Уравнение теплопроводности. Явная и неявная схемы. Схема Кранка-Николсон. Уравнение переноса. Свойства решения задачи. Явная и неявная схемы, схема "бегущего" счета.

Явная и неявная схемы. Схема Кранка-Николсон. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Устойчивость и ограниченность норм степеней оператора перехода.

Спектральный критерий устойчивости.

Уравнение теплопроводности. Явная и неявная схемы. Схема Кранка-Николсон. Аппроксимация и устойчивость. Критерий Куранта. Сходимость.

Уравнение переноса. Свойства решения задачи. Явная и неявная схемы. Схема "бегущего" счета. Аппроксимация. Устойчивость по Нейману.

4. Разностные методы аппроксимации двумерных уравнений диффузии на прямоугольных сетках. Метод конечных элементов с кусочно-линейными и билинейными базисными функциями.

Разностные методы аппроксимации двумерных уравнений диффузии на прямоугольных сетках. Способы аппроксимации граничных условий. Разностная и матричная формулировки приближенных задач. Оценки погрешности аппроксимации и точности приближенных решений. Схемы высокого порядка точности. Свойства операторов разностной задачи.

Метод конечных элементов с кусочно-линейными и билинейными базисными функциями. Оценка точности. Матричная формулировка приближенных задач. случай смешанных краевых условий. сопоставление с разностным методом.

Семестр: 7 (Осенний)

5. Методы расщепления, дробных шагов и переменных направлений. Аппроксимация, устойчивость, сходимость методов расщепления

Методы расщепления и переменных направлений. Метод покомпонентного расщепления. Метод стабилизации. Двухциклический метод покомпонентного расщепления. Схема реализации метода.

Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Лемма Келлога. Применения к уравнению теплопроводности.

6. Прямые методы. Метод исключения Гаусса для систем с ленточными матрицами. Метод разделения переменных. Быстрое преобразование Фурье. Общие понятия теории итерационных методов

Прямые методы. Метод исключения Гаусса для систем с ленточными матрицами. Метод разделения переменных для решения системы пятиточечных уравнений в прямоугольной области.

Быстрое преобразование Фурье

Общие понятия теории итерационных методов. Необходимые и достаточные условия сходимости.

7. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в задачах математической физики.

Основные и сопряженные уравнения. Алгоритмы возмущений для неоднородных задач. Теорема сходимости.

Метод возмущений для задач на собственные значения. Сопряженные уравнения и теория возмущений для линейных функционалов. Вопросы обоснования алгоритмов возмущений. Алгоритмы возмущений в нестационарных задачах. Применение спектрального метода.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, звуковая система).

Необходимое программное обеспечение.

Обеспечение самостоятельной работы — электронная библиотека ИВМ РАН.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П. Методы решения задач математической физики. - М.: Наука, 2002
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 8-ое изд. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2000, 624 с.
3. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. - М.: Академия, 2007.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. 2е изд. - М.: Изд-во «Научный мир», 2003
5. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. 2-е изд., исправ. - М.: Физматлит, 2000. 296с. ISBN 5-9221-047-5.
6. Шутяев В.П. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в квазилинейных задачах математической физики (учебное пособие). - М.: МФТИ, 2001.
7. Шутяев В.П. Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. - М.: Наука, 2001.

Дополнительная литература

1. Марчук Г. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1989.
2. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1980. -300с.
3. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения задач для эллиптических уравнений. - М.: АН СССР, 1979.
4. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных эллиптических уравнений. - М.: Мир, 1977.
5. Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений. - М.: Наука, 1993.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Информационные ресурсы: доступные через Internet электронные конспекты лекций, учебные пособия и сборники задач, разработанные для данного курса.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Программное обеспечение и информационные технологии не требуются.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, алгоритмы.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике
курс:	3
квалификация:	бакалавр
Семестры, формы промежуточной аттестации:	
	6 (весенний) - Зачет
	7 (осенний) - Дифференцированный зачет
Разработчик:	В.П. Шутяев, д-р физ.-мат. наук, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-3 Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде	УК-3.1 Способен устанавливать разные виды коммуникации (учебную, научную, деловую, неформальную и др.)
	УК-3.2 Взаимодействует с другими членами команды для достижения поставленной задачи
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Вычислительные методы математической физики» обучающийся должен:

знать:

- ☐ основные понятия теории разностных схем;
- ☐ общие принципы построения разностных схем для задач математической физики;
- ☐ метод прогонки для решения разностных уравнений;
- ☐ схему Кранка-Николсон разностных методов для одномерных нестационарных задач;
- ☐ вариационные методы;
- ☐ свойства операторов разностной задачи;
- ☐ способы аппроксимации граничных условий;
- ☐ метод конечных элементов;
- ☐ метод возмущений для задач на собственные значения;
- ☐ алгоритмы возмущений в нестационарных задачах;
- ☐ алгоритмы возмущений в нелинейных задачах математической физики;
- ☐ методы решения систем сеточных уравнений;
- ☐ нестационарные итерационные методы в методах решения систем сеточных уравнений.

уметь:

- применять численные методы к решению основных задач математической физики;
- абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций;
- оценивать погрешности аппроксимации и точности приближенных решений;
- делать правильные выводы из сопоставления результатов аналитической теории и численного эксперимента;
- производить численные оценки по порядку величины;
- делать качественные выводы при переходе к предельным условиям в изучаемых проблемах;
- видеть в технических задачах физическое содержание;
- пользоваться справочной литературой научного и прикладного характера для быстрого поиска необходимых математических и физических данных и понятий.

владеть:

- базовыми знаниями в области вычислительных методов математической физики и принципами их использования в профессиональной деятельности;
- навыками самостоятельного численного решения основных задач математической физики;
- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физических задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов:

1. Основные понятия теории разностных схем.
2. Одномерное уравнение диффузии.
3. Разностный метод для одномерного уравнения диффузии.
4. Метод интегрального тождества.
5. Матричная формулировка разностной задачи.
6. Сеточные спектральные задачи.
7. Построение разностных схем для эволюционной задачи общего вида.
8. Спектральный критерий устойчивости.
9. Уравнение теплопроводности. Явная и неявная схемы. Схема Кранка-Николсон.
10. Уравнение переноса. Свойства решения задачи. Явная и неявная схемы.
11. Задача о минимизации функционала энергии.
12. Метод Рунге в энергетических пространствах.
13. Метод Галеркина.
14. Вариационная формулировка краевых задач с оператором диффузии.
15. Матричная формулировка приближенных задач метода Рунге.
16. Разностные методы аппроксимации двумерных уравнений диффузии на прямоугольных сетках, схемы высокого порядка точности.
17. Метод конечных элементов с кусочно-линейными и билинейными базисными функциями.
18. Прямые методы. Метод исключения Гаусса для систем с ленточными матрицами, LU-разложение.
19. Быстрое преобразование Фурье.
20. Общие понятия теории итерационных методов, асимптотическая скорость сходимости.
21. Стационарные итерационные методы.
22. Нестационарные итерационные методы.
23. Явные и неявные разностные схемы для двумерного уравнения теплопроводности.
24. Методы расщепления и переменных направлений.
25. Аппроксимация, устойчивость, сходимость методов расщепления.
26. Основные и сопряженные уравнения. Алгоритмы возмущений для неоднородных задач. Теорема сходимости.
27. Метод возмущений для задач на собственные значения. Сопряженные уравнения и теория возмущений для линейных функционалов.
28. Алгоритмы возмущений в нестационарных задачах. Применение спектрального метода.
29. Принципы построения сопряженных операторов в нелинейных задачах.
30. Алгоритмы возмущений для нелинейных уравнений общего вида и уравнений с сопряженными операторами.
31. Алгоритмы возмущений в квазилинейных эволюционных задачах.
32. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в теории чувствительности.

Примерный перечень билетов:

Билет №1.

1. Одномерное уравнение диффузии.
2. Метод интегрального тождества.

Билет №2.

1. Разностный метод для одномерного уравнения диффузии.
2. Матричная формулировка разностной задачи.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения зачета и дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Зачет и дифференцированный зачет проводится путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.