

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Практические методы решения систем уравнений
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составили:

С.А. Горейнов, канд. физ.-мат. наук, доцент

К.М. Терехов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике 02.04.2022

Аннотация

Курс посвящен методам решения многомерных задач – метода расщепления уравнений по физическим процессам и пространственным переменным. В рамках единого подхода описаны основные подходы по построению экономичных разностных схем расщепления для численного решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса сжимаемого теплопроводного газа и несжимаемой жидкости.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение студентами фундаментальных знаний в области математического моделирования, изучение современных численных методов решения линейных и нелинейных систем уравнений, а также областей их практического применения.

Задачи дисциплины

- формирование базовых знаний в области численных методов математического моделирования как дисциплины, обеспечивающей технологические основы современных инновационных сфер деятельности;
- обучение студентов современным методам решения больших систем и ознакомление с их приложениями;
- формирование подходов к выполнению исследований студентами по математическому моделированию в рамках выпускных работ на степень магистра.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1 Определяет приоритеты профессиональной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки
	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ место и роль общих вопросов науки в научных исследованиях;
- ☐ современные проблемы вычислительной математики;
- ☐ новейшие численные методы эффективного решения больших систем, порождаемых задачами математической физики;
- ☐ постановку проблем моделирования физических процессов;
- ☐ о взаимосвязях и фундаментальном единстве естественных наук.

уметь:

- ☐ эффективно использовать на практике теоретические компоненты науки: понятия, суждения, умозаключения, законы;
- ☐ представить панораму универсальных методов и законов современного естествознания;
- ☐ работать на современном компьютерном оборудовании;
- ☐ абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций;
- ☐ пользоваться справочной литературой научного и прикладного характера для быстрого поиска необходимых математических и физических данных и понятий.

владеть:

- ☐ планированием, постановкой и обработкой результатов численного эксперимента;
- ☐ навыками самостоятельной работы в лаборатории на современном компьютерном оборудовании;
- ☐ навыками освоения большого объёма информации;
- ☐ культурой постановки и моделирования физических задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Аппроксимации, связанные с методом Ланцоша. Аппроксимации типа Каратеодори-Фейера. Аппроксимации симметричных тензоров типа алгоритма Сильвестра.		6		
2	Классические быстрые прямые методы.		6		
3	Метод сопряженных градиентов.		6		4
4	Многосеточные методы. Методы декомпозиции области.		8		5
5	Методы декомпозиции области. Метод Ньютона решения нелинейных систем. Варианты метода Ньютона.		4		6
Итого часов			30		15
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		45 час., 1 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Аппроксимации, связанные с методом Ланцоша. Аппроксимации типа Каратеодори-Фейера. Аппроксимации симметричных тензоров типа алгоритма Сильвестра.

Метод bidiagonalization. Тензорные krylovские методы.

Методы аппроксимации из подпространства в C -норме. Теорема Адамяна-Арова-Крейна, аппроксимации операторов в H^∞ -норме.

Малоранговые тензорные аппроксимации, сводящиеся к линейно-алгебраическим операциям с квази-ганкелевыми матрицами. Алгоритмы канонического разложения тензоров.

2. Классические быстрые прямые методы.

Классические быстрые прямые методы Быстрое преобразование Фурье. Метод циклической редукции. Маршевые методы.

Параллельный быстрый прямой метод Частичные задачи. Быстрый прямой метод. Параллельная реализация.

Итерационные процессы в подпространствах Итерационные процессы в подпространствах. Методы фиктивных компонент. Метод фиктивного пространства.

3. Метод сопряженных градиентов.

Метод сопряженных градиентов Подпространства Крылова. Спектральная теория сходимости. Метод сопряженных градиентов.

Метод Ланцоша для систем с симметричными матрицами Минимизация некоторых функционалов с помощью метода Ланцоша. Оценка сходимости с помощью многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на двух отрезках.

Обобщенный метод минимальных невязок Метод минимальных невязок для матриц общего вида, различные реализации. Оценки арифметической сложности.

Методы вложенных расщеплений и минимальной степени Граф матрицы. Теоремы о заполнении в методе исключения Гаусса. Теорема о минимальном сепараторе. Алгоритмы, приближенно минимизирующие заполнение.

4. Многосеточные методы. Методы декомпозиции области.

Двухсеточный метод. Сглаживающее свойство базовых итерационных методов. Коррекция с грубой сетки. Продолжение, проектор, оператор на грубой сетке. Матрица итераций. Сходимость для модельной задачи.

Многосеточный метод. V- и W-циклы. Предсглаживание и постсглаживание. Матрица итераций. Сходимость многосеточного метода (W-цикл).

Основные приложения методов декомпозиции области. Математические основы методов декомпозиции. Условие сшивки. Теорема о продолжении и теорема о следах. Уравнение Пуанкаре-Стеклова.

Метод итераций Нейман-Дирихле. Переобуславливатель Нейман-Дирихле. Несимметричная версия. Симметричная версия.

Метод Шварца. Аддитивный метод Шварца.

5. Методы декомпозиции области. Метод Ньютона решения нелинейных систем. Варианты метода Ньютона.

Методы декомпозиции области Основные приложения методов декомпозиции области. Математические основы методов декомпозиции. Условие сшивки. Теорема о продолжении и теорема о следах. Уравнение Пуанкаре-Стеклова.

Метод итераций Нейман-Дирихле. Переобуславливатель Нейман-Дирихле. Несимметричная версия. Симметричная версия.

Метод Шварца. Аддитивный метод Шварца.

Метод Ньютона решения нелинейных систем Неточный метод Ньютона решения нелинейных систем. Теоремы о сверхлинейной и квадратичной сходимости.

Варианты метода Ньютона Метод Ньютона-Крылова и метод Бroyдена.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Доска, ноутбук и мультимедийное оборудование (проектор или плазменная панель).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Василевский Ю., Олышанский М. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. - М.: Макс-ПРЕСС, 2007. - 103с.
2. Олышанский М. Лекции и упражнения по многосеточным методам. - М: Физматлит, 2005. - 168с. ISBN 5922105930.
3. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. - М.: Академия, 2007. 320с. ISBN 978-5-7695-3925-1.
4. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. 2nd Edition. SIAM, 2003.

Дополнительная литература

3. Джордж А., Лю И. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984.
4. Kelley, C.T. Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations. SIAM, Philadelphia, 1995.
5. Капорин И.Е., «Использование полиномов Чебышева и приближенного обратного трехугольного разложения для предобуславливания метода сопряженных градиентов», Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012, Т. 52, с. 179-204
6. Ерёмин А. Ю., Капорин И.Е., «Влияние наибольших собственных значений на численную сходимость метода сопряженных градиентов», Зап. Научн. Сем. ПОМИ, 1998, том 248, с. 5-16.
7. Na, L., Saad, Y., Chow, E., «Crout versions of ILU for general sparse matrices», SIAM Journal on Scientific Computing, 2003, 25(2), с. 716-728
8. Bollhofer, M., «A robust ILU with pivoting based on monitoring the growth of the inverse factors», Linear Algebra and its Applications, 2001, 338(1-3), с. 201-218
9. Ruge, J. W., Stuben, K. «Algebraic Multigrid», Multigrid Methods, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987. с. 73-130
10. Stuben, K. «A review of algebraic multigrid», Numerical Analysis: Historical Developments in the 20th Century, Elsevier, 2001. с. 331-359
11. Kuznetsov, Yu. A. «Algebraic multigrid domain decomposition methods», Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 4(5), с. 351-380
12. Bollhofer, M., Saad Y. «Multilevel preconditioners constructed from inverse-based ILUs», SIAM Journal on Scientific Computing, 2006, 27(5), с. 1627-1650
13. Bramble, J. H., Pasciak, J. E. «A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems», Mathematics of computation, 1988, 50(181), с 1-17
14. Elman, H. C., Golub, G. H. «Inexact and preconditioned Uzawa algorithms for saddle point problems», SIAM Journal on Numerical Analysis, 1994, 31(6), с. 1645-1661
15. Bramble, J. H., Pasciak, J. E., Vassilev A. T. «Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems», SIAM Journal on Numerical Analysis, 1997, 34(3), с. 1072-1092
16. Sinkhorn, R., «A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochastic matrices», The annals of mathematical statistics, 1964, 35(2), с. 876-879
17. Kaporin, I. E. «Scaling, reordering, and diagonal pivoting in ILU preconditionings», Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2007, 22(4), с. 341-375
18. Olschowska, M., Neumaier A. «A new pivoting strategy for Gaussian elimination», Linear Algebra and its Applications, 1996, 240, с. 131-151
19. Cuthill, E., McKee, J. «Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices», Proceedings of the 1969 24th national conference, 1969, с. 157-172
20. Grigori, L., Boman, E., Donfack, S., Davis, T., «Hypergraph-based unsymmetric nested dissection ordering for sparse LU factorization», SIAM Journal on Scientific Computing, 2010, 32(6), с. 3426-3446
21. Amestoy, P., Davis, T., Duff, I. «An approximate minimum degree ordering algorithm», SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1996, 17(4), с. 886-905
22. Anderson, D. G., «Iterative procedures for nonlinear integral equations», Journal of the ACM, 1965, 12(4), с. 547-560

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. Журналы по научным вычислениям и матричному анализу (напр., SIAM Journal of Scientific Computing <http://www.siam.org>, <http://sciencedirect.com>),
2. электронные конспекты лекций <http://dodo.inm.ras.ru/terekhov/lect1>,

3. ресурс <http://scholar.google.com>, учебные пособия и сборники задач, разработанные для данного курса.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Журналы по научным вычислениям и матричному анализу (напр., SIAM Journal of Scientific Computing <http://www.siam.org>, <http://sciencedirect.com>), доступные через Internet сборники трудов тематических конференций: <http://ddm.org/>, электронные конспекты лекций, учебные пособия и сборники задач, разработанные для данного курса.

Обеспечение самостоятельной работы — электронная библиотека ИВМ РАН.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, алгоритмы.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Математическое моделирование и компьютерные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике
курс:	<u>4</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчики:

С.А. Горейнов, канд. физ.-мат. наук, доцент
К.М. Терехов, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1 Определяет приоритеты профессиональной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки
	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Практические методы решения систем уравнений» обучающийся должен:

знать:

- ☐ место и роль общих вопросов науки в научных исследованиях;
- ☐ современные проблемы вычислительной математики;
- ☐ новейшие численные методы эффективного решения больших систем, порождаемых задачами математической физики;
- ☐ постановку проблем моделирования физических процессов;
- ☐ о взаимосвязях и фундаментальном единстве естественных наук.

уметь:

- ☐ эффективно использовать на практике теоретические компоненты науки: понятия, суждения, умозаключения, законы;
- ☐ представить панораму универсальных методов и законов современного естествознания;
- ☐ работать на современном компьютерном оборудовании;
- ☐ абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций;
- ☐ пользоваться справочной литературой научного и прикладного характера для быстрого поиска необходимых математических и физических данных и понятий.

владеть:

- ☐ планированием, постановкой и обработкой результатов численного эксперимента;
- ☐ навыками самостоятельной работы в лаборатории на современном компьютерном оборудовании;
- ☐ навыками освоения большого объема информации;
- ☐ культурой постановки и моделирования физических задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Быстрое преобразование Фурье.
2. Маршевый метод, частичные задачи.

3. Метод циклической редукции как двухсеточный метод.
4. Быстрый прямой метод. Параллельная реализация.
5. Итерационные процессы в подпространствах. Методы фиктивных компонент.
6. Метод фиктивного пространства.
7. Подпространства Крылова. Спектральная теория сходимости.
8. Метод сопряженных градиентов.
9. Метод минимальных невязок.
10. Варианты обобщенного метода минимальных невязок.
11. Теорема о заполнении в методе исключения Гаусса. Теорема о минимальном сепараторе. Метод вложенных рассечений. Метод минимальной степени.
12. Фронтальные методы.
13. Блочные переобуславливатели для седловых матриц.
14. Неполное треугольное разложение по позициям, частичное транзитивное замыкание графа, компенсация.
15. Неполное треугольное разложение по значениям.
16. Неполное треугольное разложение второго порядка.
17. Сходимость многосеточного метода (W-цикл).
18. Теорема о продолжении и теорема о следах. Уравнение Пуанкаре-Стеклова.
19. Переобуславливатель Нейман-Дирихле, симметричная и несимметричная версии.
20. Метод Шварца. Аддитивный метод Шварца.
21. Теория сходимости метода Ньютона.
22. Неточный метод Ньютона решения нелинейных систем.
23. Метод Ньютона-Крылова.
24. Метод Бroyдена.

Примерный перечень билетов:

Билет №1

1. Быстрое преобразование Фурье.
2. Неточный метод Ньютона решения нелинейных систем.

Билет №2

1. Метод Шварца. Аддитивный метод Шварца.
2. Быстрый прямой метод. Параллельная реализация.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой.

Дифференцированный зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, или путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.