

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**и.о. директора физтех-школы  
физики и исследований им.  
Ландау**

**А.А. Воронов**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Олимпиадные задачи по математике
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика и педагогика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра инновационной педагогики
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составили:

Н.Х. Агаханов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Ф.А. Ивлев

Программа обсуждена на заседании кафедры инновационной педагогики 20.04.2020

## Аннотация

Программа «Олимпиадные задачи по математике» знакомит слушателей с основами олимпиадной математики и спецификой олимпиадной математики в средней школе. Программа предполагает усвоение основных педагогических и практических приемов решения классических задач олимпиадной математики. В ходе обучения по программе слушатели изучают методические основы построения факультативного курса олимпиадной математики в средней школе и использование олимпиадной математики для решения физических задач.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Ознакомление слушателей с основами олимпиадной математики, усвоение основных педагогических и практических приемов решения классических задач олимпиадной математики, ознакомление слушателей с применением олимпиадной математики для решения физических задач, усвоение методических основ построения факультативного курса олимпиадной математики.

#### Задачи дисциплины

- Приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области углублённого курса элементарной (школьной) математики;
- подготовка слушателей к изучению углублённых курсов арифметики, алгебры, геометрии (планиметрии и стереометрии), комбинаторики;
- изучение специальных разделов, не входящих в государственный стандарт школьного курса математики;
- приобретение навыков применения указанных разделов при проведении факультативных занятий по математике.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей
ПК-8 Способен к преподаванию физико-математических дисциплин в образовательном учреждении общего образования, дополнительного образования	ПК-8.3 Способен применять различные методы обучения и образовательные технологии, исходя из особенностей содержания учебного материала, возраста и образовательных потребностей обучаемых; планировать и комплексно применять различные средства обучения

ПК-9 Способен организовывать совместную и индивидуальную учебную деятельность обучающихся, осуществлять педагогическую поддержку обучающихся с выдающимися способностями	ПК-9.2 Способен осуществлять индивидуальную работу с обучающимися в зависимости от их способностей, образовательных возможностей и потребностей; разрабатывать индивидуально ориентированные программы, материалы с учетом индивидуальных особенностей обучающихся
	ПК-9.3 Умеет организовывать различные виды деятельности обучающихся в образовательном процессе; применять методы мотивации обучающихся к учебной и учебно-исследовательской работе
	ПК-9.4 Умеет осуществлять отбор учебного и методического материала для реализации в различных формах обучения физико-математическим дисциплинам в соответствии с дидактическими целями и возрастными особенностями обучающихся

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- понятия простого, составного числа;
- понятие взаимной простоты двух чисел;
- основную теорему арифметики;
- признаки делимости;
- теоремы Виета и Безу;
- свойства многочленов и их графиков;
- неравенства Коши-Буняковского, неравенства о средних, трансервенство;
- понятие инварианты и полуинварианты;
- понятие графа, планарного графа, пути Эйлера;
- понятие правильной раскраски графа;
- понятие дерева позиций в математических играх;
- понятие дерева, остовного дерева, висячей вершины, цикла;
- число сочетаний и перестановок;
- основные приемы решения задач олимпиадной математики;
- основные объекты планиметрии и связанные с ними теоремы (Чевы, Мене-лая);
- понятие степени точки относительно окружности;
- понятие центра масс системы точек;
- специфику преподавания олимпиадной математики в школе.

уметь:

Применять признаки делимости, метод математической индукции, методы комбинаторных подсчетов, теоремы планиметрии для решения задач олимпиадной математики.

владеть:

- Общими понятиями и приёмами решения задач олимпиадной математики;
- основами построения логических конструкций.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Арифметика и основы теории чисел.	4	8		12
2	Многочлены.	2	4		6
3	Последовательности.	2	4		6

4	Уравнения и неравенства.	2	4		6
5	Комбинаторика.	2	4		6
6	Планиметрия.	3	6		9
Итого часов		15	30		45
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

##### 1. Арифметика и основы теории чисел.

Делимость. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики. Признаки делимости на 2, 3, 5, 7, 9, 11. Взаимно простые числа. Алгоритм Евклида нахождения НОД (наибольшего общего делителя). Сравнения по модулю.

##### 2. Многочлены.

Многочлены. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу и следствия из неё.

##### 3. Последовательности.

Арифметическая и геометрическая прогрессии. Числа Фибоначчи, закономерности. Метод математической индукции.

##### 4. Уравнения и неравенства.

Диофантовы уравнения. Корни многочленов. Теорема Виета. Основная теорема алгебры. Неравенства о средних. Неравенство Коши-Буняковского. Транснеравенство.

##### 5. Комбинаторика.

Графы. Раскраски графов. Деревья, циклы. Лемма о рукопожатиях. Понятие простого пути в графе. Эйлеров путь и Эйлеров цикл. Планарные графы. Число сочетаний, количество перестановок. Инварианты и полуинварианты. Игры и стратегии. Дерево позиций. Задачи на «оценку + пример».

##### 6. Планиметрия.

Основные элементы треугольника и их свойства. Подобие треугольников и многоугольников. Гомотетия. Прямая и окружность Эйлера. Теоремы Чева и Менелая. Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник. Степень точки. Геометрия масс.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном. Для проведения занятий в формате видеоконференции – ноутбук или персональный компьютер, оснащенный микрофоном и видеокамерой, имеющий выход в сеть Интернет с достаточной для участия в видеоконференции пропускной способностью.

#### 6.Перечень рекомендуемой литературы

## Основная литература

1. Агаханов, Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6 – 11 класс / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. – М.: Просвещение, 2010. – 192 с.
2. Агаханов, Н. Х. Математика. Областные олимпиады. 8 – 11 класс / Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников [и др.]. – М.: Просвещение, 2010. – 239 с.
3. Агаханов, Н. Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993 – 2009: заключительные этапы / Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников [и др.]– М.: МЦНМО, 2014. – 552 с.
4. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике.– М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.
5. Генкин С.А., Итенберг И.В., Д.В.Фомин. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы, Киров, 1994. – 272 с.

## Дополнительная литература

1. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. Алфутова Н.Б., Устинов А.В.– М.: МЦНМО, 2002. – 264 с.
2. Геометрия. Планиметрия 7-9 классы. Задачник.– М.: МЦНМО, 2006. – 416 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/> - учебные материалы кафедры высшей математики МФТИ  
<http://lib.mipt.ru> - Электронная библиотека Физтеха

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций и видеозаписей демонстрационных физических экспериментов, а также системы дистанционного обучения, взаимодействия с обучающимися посредством видеоконференций и вебинаров.

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

По каждой пройденной теме студентам выдается по 8 - 12 задач (всего 60 задач за семестр), которые им необходимо решить самостоятельно. Для допуска к зачету требуется успешное решение не менее 50-ти процентов задач для самостоятельного решения.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладные математика и физика  
**профиль подготовки:** Физика и педагогика  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
кафедра инновационной педагогики  
**курс:** 4  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчики:**

Н.Х. Агаханов, канд. физ.-мат. наук, доцент  
Ф.А. Ивлев

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей
ПК-8 Способен к преподаванию физико-математических дисциплин в образовательном учреждении общего образования, дополнительного образования	ПК-8.3 Способен применять различные методы обучения и образовательные технологии, исходя из особенностей содержания учебного материала, возраста и образовательных потребностей обучаемых; планировать и комплексно применять различные средства обучения
ПК-9 Способен организовывать совместную и индивидуальную учебную деятельность обучающихся, осуществлять педагогическую поддержку обучающихся с выдающимися способностями	ПК-9.2 Способен осуществлять индивидуальную работу с обучающимися в зависимости от их способностей, образовательных возможностей и потребностей; разрабатывать индивидуально ориентированные программы, материалы с учетом индивидуальных особенностей обучающихся
	ПК-9.3 Умеет организовывать различные виды деятельности обучающихся в образовательном процессе; применять методы мотивации обучающихся к учебной и учебно-исследовательской работе
	ПК-9.4 Умеет осуществлять отбор учебного и методического материала для реализации в различных формах обучения физико-математическим дисциплинам в соответствии с дидактическими целями и возрастными особенностями обучающихся

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Олимпиадные задачи по математике» обучающийся должен:

**знать:**



- понятия простого, составного числа;
- понятие взаимной простоты двух чисел;
- основную теорему арифметики;
- признаки делимости;
- теоремы Виета и Безу;
- свойства многочленов и их графиков;
- неравенства Коши-Буняковского, неравенства о средних, транснаравенство;
- понятие инварианты и полуинварианты;
- понятие графа, планарного графа, пути Эйлера;
- понятие правильной раскраски графа;
- понятие дерева позиций в математических играх;
- понятие дерева, остовного дерева, висячей вершины, цикла;
- число сочетаний и перестановок;
- основные приемы решения задач олимпиадной математики;
- основные объекты планиметрии и связанные с ними теоремы (Чевы, Менелая);
- понятие степени точки относительно окружности;
- понятие центра масс системы точек;
- специфику преподавания олимпиадной математики в школе.

**уметь:**

Применять признаки делимости, метод математической индукции, методы комбинаторных подсчётов, теоремы планиметрии для решения задач олимпиадной математики.

**владеть:**

- Общими понятиями и приёмами решения задач олимпиадной математики;
- основами построения логических конструкций.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

По каждой пройденной теме студентам выдается по 10 задач (всего 60 задач за семестр), которые им необходимо решить самостоятельно. Для допуска к зачету требуется успешное решение не менее 50-ти процентов задач для самостоятельного решения.

Примеры задач представлены в прикреплённом файле.

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

Перечень контрольных вопросов:

1. Основная теорема арифметики. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 11.
2. Многочлены. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.
3. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Последовательность Фибоначчи. Основные свойства.
4. Теорема Виета для многочленов произвольных степеней.
5. Неравенства о средних. Метод Штурма. Неравенство Коши-Буняковского. Транснаравенство.
6. Аффинные теоремы планиметрии (Чевы, Менелая).
7. Замечательные точки треугольника. Теорема о прямой Эйлера.
8. Вписанные углы. Прямая Симсона, точка Микеля.
9. Касающиеся окружности. Лемма Архимеда.
10. Векторы. Свойства векторов. Центр масс.
11. Число сочетаний, количество перестановок.
12. Принцип математической индукции.
13. Специальные олимпиадные темы. «Оценка + пример».
14. Правильная раскраска графа. Планарные графы. Раскраска планарного графа в 5 цветов.
15. Количество рёбер в дереве. Критерий существования Эйлера пути в графе.

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Итоговая аттестация по дисциплине «Олимпиадные задачи по математике» осуществляется в форме дифференцированного зачета. К дифференцированному зачету допускаются студенты, успешно решившие 50 процентов задач, заданных по каждой теме в течение семестра. Дифференцированный зачет проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении зачёта обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.

По каждой пройденной теме студентам выдается по 8 - 12 задач (всего 60 задач за семестр), которые им необходимо решить самостоятельно. Для допуска к зачету требуется успешное решение не менее 50-ти процентов задач для самостоятельного решения.

### Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

*Пример домашнего задания по теме «Алгоритм Евклида»*

1. Найдите а) (126, 1308); б) (478717, 24139); в) НОД числа из 14 единиц и 21 единицы; г) числа из  $n$  единиц и  $m$  единиц; д)  $(2^m - 1, 2^n - 1)$ ; е)  $(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1)$ .

2. а) Даны такие числа  $a$  и  $b$ , что остаток от деления  $a$  на  $b$  равен  $d = \text{НОД}(a, b)$ . Докажите, что существуют такие целые числа  $u$  и  $v$ , что  $d = au + bv$ . б) Даны числа  $a$  и  $b$ . Пусть  $c$  — остаток от деления числа  $a$  на  $b$ . Оказалось, что остаток от деления числа  $b$  на  $c$  равен  $d = (a, b)$ . Докажите, что существуют такие целые числа  $u$  и  $v$ , что  $d = au + bv$ . в) Пусть  $d = (a, b)$ . Докажите, что существуют такие целые числа  $u$  и  $v$ , что  $d = au + bv$ . Такое представление НОДа называется *линейное представление НОД*.  $\square$

3. Дано уравнение  $7x + 5y = 3$ . а) Найдите хотя бы одно решение этого уравнения. б) Найдите еще 3 решения. в) Выразите в общем виде все возможные решения. г) То же для уравнения  $126x + 1308y = 6$ . Возможно, не просто так эта задача стоит после предыдущей. Даже если Вы не решили предыдущую, здесь можно ею пользоваться. д) Найдите все целые решения уравнения  $889x + 140y = 715$ .

4. Даны взаимно простые числа  $a$  и  $b$  и простое число  $p$ . а) Известно, что  $ab : p$ . Докажите, что  $a : p$  или  $b : p$ . б) (**Основная теорема арифметики**) Докажите, что любое число имеет единственное с точностью до порядка разложение на множители.

5. В будущем решили, что имеющиеся денежные купюры неудобны. А поскольку у власти стояли далеко не только математики, то было решено ввести всего две купюры, достоинством 77 и 685 рублей. Докажите, что нам повезло и даже в таком случае мы сможем оплатить любую сумму, возможно, со сдачей.

6. а) Докажите, что если для некоторых натуральных  $a$  и  $b$  верно, что  $\text{НОК}(a, a + 5) = \text{НОК}(b, b + 5)$ , то  $a = b$ .

б) Может ли при натуральных  $a$ ,  $b$  и  $c$  выполняться равенство  $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(a + c, b + c)$ ?

7. Докажите, что ни при каком натуральном  $m$  число  $1978^m - 1$  не делится на  $1000^m - 1$ .

8. Известно, что  $(m, n) = 1$ . Каково наибольшее возможное значение  $(m + 2007n, n + 2007m)$ ?

9. По бесконечной шахматной доске ходит  $(m, n)$ -пегас, который может за один ход сдвинуться на  $m$  клеток по горизонтали или вертикали, а затем — на  $n$  клеток в перпендикулярном направлении. При каких  $m$  и  $n$   $(m, n)$ -пегас сможет попасть из любой клетки доски на любую другую?

Пример домашнего задания по теме «Математическая индукция»

1. Найдите формулу и докажите её по индукции для суммы  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 =$
2. Докажите, что число  $\underbrace{111\dots 11}_{3^n}$  делится на  $3^n$ .

3. Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

4. У вас есть неограниченное число монет достоинством 3 и 5 копеек. Докажите, что вы можете точно выдать любую сумму большую, чем 7 копеек.

5. На доске написаны 100 цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

- а) заменить первую цифру (ноль на единицу и наоборот);
- б) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

(Пример: в последовательности 0011001 можно заменить первую цифру или четвёртую — они подчёркнуты.) Показать, что с помощью нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из ста нулей и единиц.

6. (Игра “Ханойская башня”) Имеется пирамида с  $n$  кольцами возрастающих размеров и ещё два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что

- а) можно переложить все кольца с первого стержня на любой другой.
- б) это можно сделать за  $2^n - 1$  перекладывание.
- с) это нельзя сделать быстрее.

7. Докажите неравенство  $2^n > n$  для натуральных  $n$ .

8. Докажите неравенство для натуральных  $n$ :

а) 
$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

б) 
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

9. Даны натуральные числа  $x_1, \dots, x_n$ . Докажите, что число

$$(1 + x_1^2) \cdot (1 + x_2^2) \cdot \dots \cdot (1 + x_n^2)$$

можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

10. а) На плоскости проведены  $n$  прямых общего положения (никакие две прямые не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке). Чему равно количество частей на которые они разделили плоскость? б) На плоскости нарисовано  $n$  окружностей так, что любые две окружности пересекаются (да, не касаются, а пересекаются!) и никакие три окружности не имеют общей точки. Вопрос тот же.

11. В условиях предыдущей задачи (снова два пункта) докажите, что эти части плоскости можно правильным образом раскрасить в два цвета (то есть так, чтобы части с одинаковым цветом не имели общей границы).