

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Теория вероятностей
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика и педагогика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2024

## Аннотация

В курс включены все базовые определения и утверждения теории вероятностей от колмогоровской аксиоматики до многомерных предельных теорем. Курс предназначен для математиков и предполагает знание основ теории меры, комбинаторики и математического анализа.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение основных современных методов теории вероятностей.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в теории вероятностей;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в теории вероятностей;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в теории вероятностей.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.2 Знает источники происхождения и умеет производить оценку погрешности измерений и достоверности экспериментальных результатов

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;
- современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в теории вероятностей в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком теории вероятностей и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Классическое (комбинаторное) определение вероятности.	4	4		5
2	Геометрические вероятности и их свойства.	4	4		5
3	Условные вероятности, умножение вероятностей, формулы полной вероятности и Байеса.	4	4		5
4	Понятие о случайном блуждании и случайном графе.	6	6		5
5	Общая вероятностная модель. Аксиоматика Колмогорова.	4	4		5
6	Распределение функций от случайных величин.	4	4		5
7	Примеры комбинаторных задач, решаемых за счет линейности математического ожидания.	4	4		15
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

###### 1. Классическое (комбинаторное) определение вероятности.

Свойства вероятности при таком определении. Простейшие комбинаторные модели. Примеры комбинаторных задач, для решения которых удобно использовать классическое определение вероятности.

###### 2. Геометрические вероятности и их свойства.

Примеры задач, для решения которых удобно использовать геометрические вероятности: задача о встрече, задача о минимальном и максимальном элементах в случайной выборке и пр. Парадокс Бертрана.

3. Условные вероятности, умножение вероятностей, формулы полной вероятности и Байеса.

Независимость событий: попарная независимость, независимость в совокупности, независимость события от группы событий. Схема испытаний Бернулли. Полиномиальная схема. Схема серий.

4. Понятие о случайном блуждании и случайном графе.

Порядковые статистики. Закон больших чисел для схемы Бернулли. Предельная теорема Пуассона для схемы серий. Локальная предельная теорема и интегральная предельная теорема Муавра – Лапласа.

5. Общая вероятностная модель. Аксиоматика Колмогорова.

Случайные величины. Закон распределения, функция распределения и ее свойства. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения, плотность распределения. Важнейшие распределения: биномиальное, пуассоновское, геометрическое, гипергеометрическое, равномерное, нормальное, Коши, экспоненциальное (показательное), гамма-распределение. Интерпретация предельных теорем Пуассона и Муавра – Лапласа в терминах распределений случайных величин.

6. Распределение функций от случайных величин.

Математическое ожидание случайной величины. Линейность математического ожидания. Математическое ожидание функции от случайной величины.

7. Примеры комбинаторных задач, решаемых за счет линейности математического ожидания.

Неравенства Маркова и Чебышёва. Связь между понятием распределения случайной величины и заданием вероятностной меры на прямой.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Стандартная учебная аудитория.

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Вероятность [Текст] : в 2 т. Т. 1 : Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы : учебник для вузов / А. Н. Ширяев .— 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МЦНМО, 2007, 2011 .— 552 с.
2. Курс теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. П. Чистяков .— 7-е изд., испр. — М. : Дрофа, 2007 .— 253 с.

### **Дополнительная литература**

1. Задачи по теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Н. Ширяев .— М. : МЦНМО, 2006 .— 416 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru/>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

**по направлению:** Прикладные математика и физика  
**профиль подготовки:** Физика и педагогика  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
кафедра дискретной математики  
**курс:** 2  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.2 Знает источники происхождения и умеет производить оценку погрешности измерений и достоверности экспериментальных результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория вероятностей» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;
- современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в теории вероятностей в устной и письменной форме.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком теории вероятностей и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Две контрольные в семестре, в конце семестра экзамен. После каждого семинара студенты получают домашнее задание на неделю в количестве от 5 до 10 задач. По итогам работы в семестре в зависимости от оценок за контрольные и от работы на семинарах студент получает от 0 до 3 баллов. На экзамене студент должен решить количество задач, равное разности 3 и количества полученных баллов. Решенные на экзамене задачи, а так же два теоретических вопроса студент отвечает на экзамене устно. Если студентом не решена 1 задача, то он получает не более хор(7). Если не решены две задачи, то студент получает не более удовл(4). Наконец, если не решены три задачи, то студент отправляется на пересдачу.

Домашние задания

1. На шахматной доске размера  $n \times n$  случайно размещают  $n$  ладей. Найдите вероятности следующих событий: 1.  $A = \{\text{ладьи не бьют друг друга}\}$ ; 2.  $B = \{\text{ладьи не бьют друг друга, и на главной диагонали нет никаких фигур}\}$ .

2. Привести примеры, показывающие, что, вообще говоря, равенства  $P(B|A) + P(B|\bar{A}) = 1$ ,  $P(B|A) + P(B|\bar{A}) = 1$  неверны. 3. Показать, что каждая из функций  $G_1(x,y) = I(x+y \geq 0)$ ,  $G_2(x,y) = [x+y]$ , где  $[\cdot]$  — целая часть числа, является непрерывной справа, возрастающей по каждой переменной, но не является функцией распределения в  $R^2$ .

4. Случайная величина  $\xi$  имеет стандартное распределение Коши. Найдите плотности распределения случайных величин  $\xi_2, 1+\xi_2, 2\xi, 1-\xi_2, 1/\xi$ . 5. Пусть  $\xi_1, \xi_2$  — случайные величины, каждая из которых не зависит от случайной величины  $\xi$ . Верно ли, что вектор  $(\xi_1, \xi_2)$  также не зависит от случайной величины  $\xi$ ?

Задачи первой контрольной

1. Является ли  $F(x,y) = (1-e^{-x-y})I(x+y \geq 0)$  функцией распределения?

2. Пусть  $P_1, P_2, P_3$  — экспоненциальные распределения с параметром 1,  $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ . Найдите  $P(\{(x,y,z) : \text{из отрезков длин } x,y,z \text{ можно составить треугольник}\})$ .

3. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, функция распределения которой равна  $F(x) = 0, x \leq -2\pi/3; (1/5)\cos x + \pi/3, -2\pi/3 \leq x < -\pi/3; (1/2)\cos x, -\pi/3 \leq x < 0; 1, x \geq 0$ .

4. Даны независимые случайные величины  $X, Y \sim U[-1,1]$ . Пусть  $\xi = X/(X+Y)$ ,  $\eta = X+Y$ . Найдите  $\text{cov}(\xi, \eta)$ . 5. Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью  $sx^2e^{-x}I(x > 0)$ . Найдите  $s$  и докажите, что  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \ln n = 1) = 1$ .

Задачи второй контрольной

1. Случайные величины  $\xi, \eta$  независимы. Плотность  $\xi$  равна  $(x/2)I((0,2])$ , случайная величина  $\eta$  обладает экспоненциальным распределением с параметром 1. Найти вероятность того, что вектор  $(\eta, \xi)$  попадает в круг радиуса 1 с центром в точке  $(1,0)$ .

2. Характеристическая функция вектора  $(\xi, \eta)$  равна  $\varphi(\xi, \eta) = e^{-2y}e^{-1/2(2x^2-2xy+y^2)}$ . Найдите такое число  $\alpha$ , что случайные величины  $\xi + \alpha\eta$  и  $\eta$  независимы. С помощью полученного числа найдите  $E\xi^2\eta$ .

3. Случайная величина  $\xi$  имеет пуассоновское распределение с параметром  $\lambda$ . Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $f(\xi)$ , если  $f(x) = (-1)^x - 1/x$ .

4. Для простейшего симметричного случайного блуждания  $S_n$  найдите вероятность того, что оно за  $N$  шагов ни разу не пересекает уровень 2:  $P(S_2 \neq 2, \dots, S_N \neq 2) = ?$

5. Игральная кость бросается  $N$  раз. При каждом бросании к выпавшему числу прибавляется 1, если оно отлично от 6. Если же выпадает 6, то число не меняется. Каким должно быть  $N$ , чтобы число, делящееся на 3, выпало (после пересчета) хотя бы 700 раз с вероятностью, превосходящей 0.98?

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Классическое (комбинаторное) определение вероятности. Свойства вероятности при таком определении. Простейшие комбинаторные модели. Примеры комбинаторных задач, для решения которых удобно использовать классическое определение вероятности.

2. Геометрические вероятности и их свойства. Примеры задач, для решения которых удобно использовать геометрические вероятности: задача о встрече, задача о минимальном и максимальном элементах в случайной выборке и пр. Парадокс Бертрана.

3. Условные вероятности, умножение вероятностей, формулы полной вероятности и Байеса. Независимость событий: попарная независимость, независимость в совокупности, независимость события от группы событий.

4. Схема испытаний Бернулли. Полиномиальная схема. Схема серий.

5. Понятие о случайном блуждании и случайном графе. Порядковые статистики.

6. Закон больших чисел для схемы Бернулли.

7. Предельная теорема Пуассона для схемы серий. Локальная предельная теорема и интегральная предельная теорема Муавра – Лапласа.

8. Общая вероятностная модель. Аксиоматика Колмогорова.



9. Случайные величины. Закон распределения, функция распределения и ее свойства. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения, плотность аспределения. Важнейшие распределения: биномиальное, пуассоновское, геометрическое, гипергеометрическое, равномерное, нормальное, Коши, экспоненциальное (показательное), гамма-распределение. Интерпретация предельных теорем Пуассона и Муавра – Лапласа в терминах распределений случайных величин.
10. Связь между понятием распределения случайной величины и заданием вероятностной меры на прямой.
11. Понятие о сингулярном распределении. Теорема Лебега о разложении произвольной функции распределения (б/д).
12. Распределение функций от случайных величин.
13. Математическое ожидание случайной величины. Линейность математического ожидания. Математическое ожидание функции от случайной величины.
14. Примеры комбинаторных задач, решаемых за счет линейности математического ожидания.
15. Моменты. Дисперсия. Вычисление моментов для распределений из п. 7.
16. Неравенства Маркова и Чебышёва.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Распределение функций от случайных величин.
2. Случайные величины. Закон распределения, функция распределения и ее свойства.

Билет №2

1. Классическое (комбинаторное) определение вероятности. Свойства вероятности при таком определении.
2. Общая вероятностная модель. Аксиоматика Колмогорова.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.