

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Проректор по учебной работе и  
довузовской подготовке**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Теория функций комплексного переменного
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика и педагогика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 105 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 45 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 90 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Количество контрольных работ, заданий: 3

Программу составил: В.В. Горяйнов, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

## Аннотация

Наряду с тем, что теория функций комплексного переменного сама по себе является важной ветвью математики, она лежит в основе большого числа чрезвычайно мощных методов, которые находят свое применение в различных областях науки и техники. Тесная связь элементарных функций наиболее очевидной становится в случае комплексного переменного, а наиболее глубокие их свойства и важные соотношения раскрываются в рамках комплексного анализа. Развиваемая теория позволяет строить и исследовать новые неэлементарные функции, некоторые из которых (гамма-функция и функция Эйри) изучаются в курсе более детально. Комплексный анализ дает эффективные методы вычисления интегралов и получения асимптотических оценок, что также иллюстрируется в курсе. Функции комплексного переменного описывают плоские векторные поля, причем наиболее интересные для приложений имеют естественное описание в рамках теории аналитических функций. Условие дифференцируемости в комплексном анализе приводит к важному классу голоморфных функций, изучение которого составляет значительную часть курса и приводит к различным методам, широко используемых в анализе, математической физике, теории потенциала и других областях знаний.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по теории функций комплексного переменного для дальнейшего использования в других областях математики, теоретической физики, гидродинамике, аэродинамике,
- формирование математической культуры и исследовательских навыков,
- овладение методами комплексного анализа.

#### Задачи дисциплины

- приобретение обучающимися теоретических знаний, связанных с комплексным анализом и его приложениями,
- умение анализировать изолированные особые точки голоморфных функций и работать с регулярными ветвями многозначных функций,
- свободное владение асимптотическими методами и методом конформных отображений при решении двумерных задач математической физики,
- знание основных теорем и формул комплексного анализа.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения поставленных задач
	УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физики, математики и (или)	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные свойства голоморфных, целых, мероморфных и гармонических функций;
- основные теоремы: интегральную Коши, Морера, Римана о конформном отображении, Коши о вычетах, Лиувилля, Миттаг-Леффлера о существовании мероморфной функции с заданными полюсами, Руше о нулях голоморфной функции, Сохоцкого о поведении функции в окрестности существенно особой точки и др.;
- основные принципы: аргумента, сохранения области, максимума модуля, симметрии Римана-Шварца, компактности для семейств голоморфных функций и др.;
- интегральные формулы Коши и Пуассона, представления голоморфных и мероморфных функций в виде рядов и бесконечных произведений;
- отображающие свойства элементарных функций и их области однолиственности;
- асимптотические свойства гамма-функции и функции Эйри.

уметь:

- получать представление голоморфной функции в виде рядов Тейлора и Лорана,
- выявлять и исследовать изолированные точки функции,
- применять теорию вычетов для вычисления контурных и несобственных интегралов,
- находить конформные отображения с использованием элементарных функций на канонические области,
- применять метод конформных отображений при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости,
- получать асимптотические формулы для интегралов, зависящих от параметра.

владеть:

- методами комплексного анализа при вычислении интегралов с помощью вычетов,
- техникой конформного отображения при решении задач гидродинамики, аэродинамики и других конформно инвариантных двумерных задач теоретической физики,
- асимптотическими методами при исследовании интегралов, зависящих от параметра.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Комплексные числа. Стереографическая проекция.	3	3		5
2	Комплексные числа. Стереографическая проекция.	5	5		10
3	Комплексное интегрирование. Интеграл Коши.	4	2		10
4	Ряды Тейлора и Лорана. Регулярные ветви логарифма и корней.	8	4		15
5	Изолированные особые точки. Вычеты. Вычисление интегралов.	8	10		15
6	Принцип аргумента и отображающие свойства голоморфных функций. Конформные отображения. Аналитическое продолжение.	10	8		10

7	Локально равномерная сходимость. Мероморфные функции. Бесконечные произведения.	10	6		8
8	Гармонические функции и задача Дирихле.	6	4		7
9	Асимптотические методы и функция Эйри.	6	3		10
Итого часов		60	45		90
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

##### 1. Комплексные числа. Стереографическая проекция.

Алгебра комплексных чисел и их геометрическое представление. Последовательности и ряды. Расширенная комплексная плоскость и стереографическая проекция.

##### 2. Комплексные числа. Стереографическая проекция.

Связность и характеристическое свойство области. Теорема о голоморфной в области функции с обращающейся в нуль производной. Теорема об обратной функции.

##### 3. Комплексное интегрирование. Интеграл Коши.

Интеграл и его свойства. Условия независимости интеграла от формы пути. Теорема Коши и интегральная формула Коши. Теоремы Морера, о среднем и Лиувилля. Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс точки относительно замкнутой кривой и его свойства.

##### 4. Ряды Тейлора и Лорана. Регулярные ветви логарифма и корней.

Разложение голоморфной функции в степенной ряд. Теорема единственности. Разложение голоморфной функции в кольцо. Условия выделения регулярных ветвей логарифма и корней.

##### 5. Изолированные особые точки. Вычеты. Вычисление интегралов.

Классификация изолированных особых точек и связь с видом ряда Лорана. Теорема Сохоцкого о поведении голоморфной функции в окрестности существенно особой точки. Формулы для вычисления вычетов. Основная теорема о вычетах. Лемма Жордана и вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.

##### 6. Принцип аргумента и отображающие свойства голоморфных функций. Конформные отображения. Аналитическое продолжение.

Теорема Руше и основная теорема алгебры. Теорема о локальной структуре отображения. Принцип сохранения области. Однолистность и локальная однолистность. Принцип максимума модуля и лемма Шварца. Конформность отображения и критерий конформности в точке. Элементарные конформные отображения. Теорема Римана об отображении.

##### 7. Локально равномерная сходимость. Мероморфные функции. Бесконечные произведения.

Различные определения локально равномерной сходимости. Теоремы Вейерштрасса и Гурвица. Принцип компактности. Теорема Миттаг—Леффлера о существовании мероморфной функции с заданными полюсами. Разложение котангенса в виде суммы элементарных дробей. Формула Эйлера и представление Гаусса для гамма—функции. Представление синуса в виде бесконечного произведения.

#### 8. Гармонические функции и задача Дирихле.

Связь между голоморфными и гармоническими функциями. Принцип экстремума и теорема единственности для гармонических функций. Конформная инвариантность. Теорема о среднем и интегральная формула Пуассона. Интеграл Пуассона и решение задачи Дирихле в круге.

#### 9. Асимптотические методы и функция Эйри.

Интегральные представления и свойства функции Эйри. Метод Лапласа и асимптотика гамма—функции. Метод стационарной фазы. Метод перевала и асимптотика функции Эйри.

### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

### 6. Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Лекции по теории функций комплексного переменного [Текст] / В. В. Горяйнов, Е. С. Половинкин ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ, 2017  
Половинкин, Е. С.  
Теория функций комплексного переменного [Текст] : учебник для вузов / Е. С. Половинкин . — М. : ИНФРА-М, 2018 .— 254 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - Библиогр.: с. 250. - Предм. указ.: с. 251-253. - ISBN 978-5-16-013608-0 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Шабунин, М. И.

Теория функций комплексного переменного [Текст] : учеб. пособие для вузов / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Лаборатория знаний, 2016 .— 300 с. : ил. +pdf - верия. - Библиогр.: с. 295. - 500 экз. - ISBN 978-5-906828-05-7 (в пер.) .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

#### Дополнительная литература

1. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] : учеб. пособие для вузов / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат .— 5-е изд., испр. — М. : Наука, 1987, 2002 .— 688 с.
2. Лекции по теории функций комплексного переменного [Текст] / В. В. Горяйнов, Е. С. Половинкин ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ, 2017

### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://univertv.ru/video/matematika/> Открытый образовательный видеопортал UniverTV.ru. Образовательные фильмы на различные темы. Лекции в ведущих российских и зарубежных вузах. Научная конференция или научно-популярная лекция по интересующему вас вопросу.
2. <http://www.iqlib.ru/> Электронная библиотека IQlib образовательных и просветительских изданий. Образовательный ресурс, объединяющий в себе интернет-библиотеку и пользовательские сервисы для полноценной работы с библиотечными фондами.

Свободный доступ к электронным учебникам, справочным и учебным пособиям. Аудитория электронной библиотеки IQlib – студенты, преподаватели учебных заведений, научные сотрудники и все те, кто хочет повысить свой уровень знаний.

3. [http://www.edu.ru/modules.php?op=modload&name=Web\\_Links&file=index&l\\_op=viewlink&cid=1314](http://www.edu.ru/modules.php?op=modload&name=Web_Links&file=index&l_op=viewlink&cid=1314) Федеральный портал "Российское образование". Каталог образовательных ресурсов.

4. <http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека Физтеха.

5. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

#### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

Для контроля и коррекции знаний обучающиеся могут использовать компьютерное тестирование, в том числе на портале [www.i-exam.ru](http://www.i-exam.ru).

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, Scilab и др.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

**по направлению:** Прикладные математика и физика  
**профиль подготовки:** Физика и педагогика  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
кафедра высшей математики  
**курс:** 3  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** В.В. Горяйнов, д-р физ.-мат. наук, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2.1 Формулирует совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели работы, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения поставленных задач
	УК-2.2 Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» обучающийся должен:

### знать:

- основные свойства голоморфных, целых, мероморфных и гармонических функций;
- основные теоремы: интегральную Коши, Морера, Римана о конформном отображении, Коши о вычетах, Лиувилля, Миттаг-Леффлера о существовании мероморфной функции с заданными полюсами, Руше о нулях голоморфной функции, Сохоцкого о поведении функции в окрестности существенно особой точки и др.;
- основные принципы: аргумента, сохранения области, максимума модуля, симметрии Римана-Шварца, компактности для семейств голоморфных функций и др.;
- интегральные формулы Коши и Пуассона, представления голоморфных и мероморфных функций в виде рядов и бесконечных произведений;
- отображающие свойства элементарных функций и их области однолиственности;
- асимптотические свойства гамма-функции и функции Эйри.

### уметь:

- получать представление голоморфной функции в виде рядов Тейлора и Лорана,
- выявлять и исследовать изолированные точки функции,
- применять теорию вычетов для вычисления контурных и несобственных интегралов,
- находить конформные отображения с использованием элементарных функций на канонические области,
- применять метод конформных отображений при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости,
- получать асимптотические формулы для интегралов, зависящих от параметра.

### владеть:

- методами комплексного анализа при вычислении интегралов с помощью вычетов,
- техникой конформного отображения при решении задач гидродинамики, аэродинамики и других конформно инвариантных двумерных задач теоретической физики,
- асимптотическими методами при исследовании интегралов, зависящих от параметра.



### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Семестровая контрольная работа проводится в середине осеннего семестра, является одной из форм текущего контроля успеваемости по изучаемой дисциплине с учетом в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Дифференцирование функций по комплексному переменному.
2. Условия Коши-Римана.
3. Теорема об обратной функции.
4. Интегральная теорема Коши для регулярной функции в односвязной области.
5. Интегральная формула Коши.
6. Интеграл типа Коши и его свойства.
7. Ряд Тейлора. Разложение регулярной функции в степенной ряд.
8. Теоремы Вейерштрасса.
9. Разложение в ряд Лорана функции, регулярной в кольце. Единственность разложения в ряд Лорана.
10. Теорема единственности регулярной функции.
11. Понятие первообразной. Достаточное условие существования первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.
12. Теорема Морера. Теорема о стирании разреза.
13. Классификация изолированных особых точек однозначного характера по структуре главной части лорановского разложения.
14. Теорема о вычетах. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
15. Общий вид регулярных ветвей многозначных функций и в односвязной области.
16. Критерий выделения регулярных ветвей многозначной функции в заданной области, их общий вид.
17. Критерий выделения регулярных ветвей многозначной функции в заданной области, их общий вид.
18. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана. Теорема Лиувилля.
19. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
20. Понятие аналитической функции. Особые точки аналитических функций. Теорема Коши-Адамара.
21. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения в области на комплексной плоскости. Критерий конформности в точке.
22. Понятие конформного отображения в расширенной комплексной. Теорема Римана о существовании конформного отображения и принцип соответствия границ. (без доказательства). Общий вид конформного отображения единичного круга на себя.
23. Дробно-линейная функция и ее свойства.
24. Функция Жуковского и ее свойства.
25. Конформные отображения, осуществляемые степенной и экспоненциальной функциями.

## 26. Классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа. Единственность решения. Интеграл Пуассона для круга.

### Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

### 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется один час (астрономический) на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

## Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

по дисциплине «ТФКП», 3 курс, 5 семестр,  
 экзамен, кафедра высшей математики

Виды заданий	Сумма баллов
1. Контрольная работа по сдаче 1 задания	0 – 6
2. Семестровая контрольная работа	0 – 16
3. Контрольная работа по сдаче 3 задания	0 - 6
4. Задание № 1 (тетрадь и ее защита)	0 – 2
5. Задание № 2 (тетрадь и ее защита)	0 – 2
6. Задание № 3 (тетрадь и ее защита)	0 – 2
7. Проверка теоретических знаний (не более трёх лекционных контрольных)	0 – 3
8. Работа на семинарах	0 – 3
Итого за работу в семестре	0 – 40
Устный ответ	0 – 60
<b>ИТОГО</b>	<b>0 - 100</b>

Соответствие между суммой баллов БРС и итоговой оценкой

Баллы БРС	Оценки	
93 - 100	10	отлично
86 - 92	9	
79 - 85	8	
72 - 78	7	хорошо
65 - 71	6	
59 - 64	5	
51 - 58	4	удовлетворительно
40 - 50	3	
11 - 39	2	
0 – 10	1	неудовлетворительно

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

### Примеры контрольных заданий

1. Найти число корней уравнения  $5z^6 + 5z^3 + 12z - 5 = 0$  в кольце  $1 < |z| < 5$ .
2. Найти образ вещественной оси при отображении

$$w = \frac{(1+i)z + 1-i}{(1-i)z - 2}.$$

3. Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область

$$D = \{z : |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\} \setminus [0, 1+i].$$

4. Решить задачу Дирихле в единичном круге с заданным граничным условием:

$$\Delta u = 0, \quad u(e^{i\theta}) = \frac{2 + \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta}.$$

5. Для каких значений  $a \in \mathbb{C}$  интеграл

$$\int_{\gamma} \left( \frac{z+a}{z-1} + \cos \frac{z+1}{z-1} \right) dz$$

не зависит от формы пути  $\gamma$ , расположенного в области  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ?

6. Функция  $f$  голоморфна в единичном круге  $\mathbb{D}$ ,  $|f(z)| < 1$  при  $z \in \mathbb{D}$  и  $f(0) = 0$ . Доказать, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} f(z^n)$  сходится равномерно в замкнутом круге  $|z| \leq r < 1$ .
7. Существует ли голоморфная в единичном круге  $\mathbb{D}$  функция, удовлетворяющая условию  $|f(z)| = e^{|z|}$  для всех  $z \in \mathbb{D}$ ?

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1

дисциплина: ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Комплексная дифференцируемость. Условия Коши-Римана.
2. Решить задачу Дирихле в единичном круге с заданным граничным условием:

$$\Delta u = 0, \quad u(e^{i\theta}) = \frac{4}{3 \cos \theta - 5}.$$

3 курс, 5 семестр, 2017/18 уч. г.

Одобрено на заседании кафедры 20 ноября 2017 г.

УТВЕРЖДАЮ: \_\_\_\_\_ Заведующий кафедрой ИВАНОВ Г.Е.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 8

дисциплина: ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Целые функции и теорема Лиувилля.
2. Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область, полученную пересечением верхней полуплоскости и двух кругов  $|z - 1| < \sqrt{2}$ ,  $|z + 1| < \sqrt{2}$ .

3 курс, 5 семестр, 2017/18 уч. г.

Одобрено на заседании кафедры 20 ноября 2017 г.

УТВЕРЖДАЮ: \_\_\_\_\_ Заведующий кафедрой ИВАНОВ Г.Е.