

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Уравнения математической физики
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика и педагогика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет

6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 135 всего, в том числе:

лекции: 75 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 150 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 315, всего зач. ед.: 7

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составил: В.И. Зубов, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

## Аннотация

В курсе изучаются основные краевые задачи математической физики. Приводится классификация линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, основанная на их приведении к каноническому виду. Вводится понятие характеристической поверхности.

Подробно рассматривается классическая задача Коши для уравнения колебаний струны. Выводится формула Даламбера, определяется область зависимости классического решения от начальных данных, доказывается корректность задачи. Рассматривается смешанная задача для полубесконечной струны.

Рассматриваются элементы теории обобщённых функций: преобразование Фурье и свёртка и обобщённых функций, дифференцирование преобразования Фурье и свёртки обобщённых функций. Вводится понятие обобщённого по Л. Шварцу решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в заданной области и его вычисления с помощью фундаментального решения. Постановка обобщённой задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с частными производными с постоянными коэффициентами.

Фундаментальное решение трёхмерного волнового уравнения. Обобщённая задача Коши для трёхмерного волнового уравнения, формула Кирхгофа. Единственность классического решения задачи Коши.

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Формула Пуассона обобщённого решения задачи Коши для уравнения теплопроводности как свёртка источника с фундаментальным решением. Принцип максимума и единственность решения для уравнения теплопроводности.

Классическая и обобщённая постановки смешанной задачи для одномерного волнового уравнения и уравнения теплопроводности на отрезке. Решение этих задач методом Фурье.

Спектр и собственные функции оператора Лапласа в круге при тривиальном граничном условии. Уравнение и функции Бесселя. Метод Фурье построения обобщённого решения смешанной задачи о колебаниях закреплённой круглой мембраны.

Спектр и собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на сфере трёхмерного пространства. Сферические функции. Метод Фурье построения обобщённого решения задачи Дирихле в шаре.

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с квадратично-интегрируемым ядром.

Гармонические функции и их свойства. Теорема о среднем и принцип максимума для гармонических функций в трёхмерном пространстве. Потенциалы, их применение для решения основных краевых задач для уравнения Лапласа.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

изучение корректных постановок краевых задач для основных дифференциальных уравнений с частными производными, освоение аналитических методов решения этих краевых задач и их приложение к задачам гидродинамики, аэродинамики, теории теплопроводности и др.

### Задачи дисциплины

- изучение различных типов дифференциальных уравнений с частными производными и свойств решений краевых задач для этих уравнений, характерных для каждого типа;
- изучение корректных постановок краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными разного типа;
- овладение аналитическими методами решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основные типы дифференциальных уравнений в частных производных;  
определение характеристической поверхности;  
основные краевые задачи для уравнений гиперболического типа, параболического типа, эллиптического типа;  
формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения;  
формулу Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности;  
метод интеграла энергии для волнового уравнения и принцип максимума для параболического уравнения;  
метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения;  
гармонические функции и их свойства;  
формулу Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре;  
основные свойства оператора Лапласа при однородных краевых условиях;  
интегральные уравнения Фредгольма второго рода со слабо полярными ядрами, теоремы Фредгольма.

уметь:

- определять тип дифференциальных уравнений с частными производными; приводить уравнения 2-го порядка к каноническому виду;
- решать методом характеристик краевые задачи на плоскости (задачи Коши и Гурса);
- решать задачи Коши для волнового уравнения;
- решать смешанные задачи для полубесконечной струны;
- решать задачи Коши для уравнения теплопроводности;
- применять метод Фурье при решении смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности; применять функции Бесселя при решении задач для круговых областей;
- использовать метод Фурье при решении краевых задач для эллиптических уравнений, применять сферические функции при решении задач для областей со сферической симметрией;
- строить функцию Грина задачи Дирихле для простейших областей и использовать ее при решении конкретных задач;
- решать интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами;
- сводить к интегральному уравнению краевую задачу с помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора;
- вычислять значения объёмных потенциалов, потенциалов простого слоя и двойного слоя, использовать их при решении краевых задач.

владеть:

- методами и подходами теории уравнений с частными производными, применяемыми при решении задач гидродинамики, аэродинамики, физики, теоретической физики, экономики и др.;
- знаниями, приобретенными при изучении курса уравнений математической физики, позволяющими корректно формулировать краевые задачи при математическом моделировании процессов или объектов в различных областях науки и техники.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа

1	Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с линейной старшей частью. Классификация уравнений. Задача Коши, метод характеристик.	5	5		5
2	Волновое уравнение 1.	5	5		5
3	Волновое уравнение 2.	5	5		5
4	Задача Коши для уравнения теплопроводности.	5	5		5
5	Начальные сведения об операторе Лапласа и о задаче на собственные значения при однородных краевых условиях.	5	5		5
6	Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.	5	5		5
7	Смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке. Метод Фурье.	6	4		18
8	Смешанная задача для уравнения колебаний струны на отрезке.	5	3		19
9	Функции Бесселя и их применение к решению задач на собственные значения для круглой мембраны.	6	4		18
10	Уравнения Лапласа и Пуассона.	5	3		19
11	Метод разделения переменных в сферических координатах для уравнения Лапласа в . Сферические функции.	6	4		18
12	Интегральные уравнения.	5	4		9
13	Задача Штурма-Лиувилля.	6	4		10
14	Потенциалы.	6	4		9
Итого часов		75	60		150
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		315 час., 7 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с линейной старшей частью. Классификация уравнений. Задача Коши, метод характеристик.

Вывод некоторых уравнений математической физики. Приведение к каноническому виду в точке дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка от  $n$  независимых переменных с линейной старшей частью. Классификация уравнений. Понятие о задаче Коши и характеристической поверхности. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду на плоскости. Понятие о методе характеристик.

2. Волновое уравнение 1.

Общее решение однородного волнового уравнения. Постановка и решение задачи Коши. Формула Даламбера. Область зависимости решения задачи Коши от начальных данных. Пример Адамара некорректной задачи (задача Коши для уравнения Лапласа). Понятие об обобщенном (негладком) решении.

Постановка и решение смешанной задачи для смешанной задачи для полубесконечной струны с закреплённым концом. Условия согласования начальных и граничных данных.

### 3. Волновое уравнение 2.

Формулы Пуассона-Кирхгофа решения задачи Коши для однородного волнового уравнения. Принцип Гюйгенса. Метод Дюамеля решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения. Общая формула Кирхгофа. Задача Коши для волнового уравнения. Метод спуска. Формула Пуассона. Диффузия волн. Единственность классического решения задачи Коши (метод интеграла энергии).

### 4. Задача Коши для уравнения теплопроводности.

Задача Коши для уравнения теплопроводности.

Постановка задачи Коши. Формула Пуассона решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности, бесконечная дифференцируемость решений. Фундаментальное решение. Метод Дюамеля для неоднородного уравнения. Принцип максимума для параболического уравнения. Единственность классического решения задачи Коши, её корректность.

### 5. Начальные сведения об операторе Лапласа и о задаче на собственные значения при однородных краевых условиях.

Начальные сведения об операторе Лапласа и о задаче на собственные значения при однородных краевых условиях.

Формулы Грина для оператора Лапласа. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана. Симметричность и положительность оператора « $\Delta$ » с однородными условиями Дирихле. Задача на собственные значения. Вещественность и положительность собственных значений. Ортогональность собственных функций.

### 6. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Построение формального решения задачи Дирихле методом Фурье. Бесконечная дифференцируемость решения в области, разложение его по гармоническим многочленам в случае уравнения Лапласа. Интеграл Пуассона. Существование классического решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге при непрерывной граничной функции.

## Семестр: 6 (Весенний)

### 7. Смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке. Метод Фурье.

Смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке. Метод Фурье.

Постановка смешанной задачи на конечном отрезке с граничными условиями Дирихле, единственность решения. Метод разделения переменных для задачи с однородными граничными условиями. Построение формального решения для случаев однородного и неоднородного уравнений. Обоснование метода Фурье. Условия согласования начальных и граничных условий. Решение смешанной задачи при неоднородных граничных условиях.

### 8. Смешанная задача для уравнения колебаний струны на отрезке.

Смешанная задача для уравнения колебаний струны на отрезке.

Постановка смешанной задачи для струны с закреплёнными концами. Единственность её решения (метод интеграла энергии). Построение формального решения методом Фурье (случаи однородного и неоднородного уравнений). Обоснование метода, условия согласования. Существование классического решения.

## 9. Функции Бесселя и их применение к решению задач на собственные значения для круглой мембраны.

Функции Бесселя и их применение к решению задач на собственные значения для круглой мембраны.

Задача на собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в круге при однородном краевом условии Дирихле. Разделение переменных. Дифференциальное уравнение Бесселя. Функции Бесселя первого рода и их свойства. Функции Бесселя, неограниченные в нуле. Выражение для собственных функций и собственных значений круглой мембраны с закрепленными краями через функции Бесселя. Ортогональность собственных функций и функций Бесселя. Полнота системы собственных функций (без доказательства).

## 10. Уравнения Лапласа и Пуассона.

Уравнения Лапласа и Пуассона.

Интегральное представление решений уравнений Пуассона и Лапласа в ограниченной области.

Пространство основных функций. Понятие сходимости последовательности функций. Пространство обобщённых функций. Локально интегрируемые функции и регулярные обобщённые функции. Дифференцирование обобщённых функций. Фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Гармонические функции и их свойства. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о среднем Принцип максимума и минимума.

Задача Дирихле для уравнения Пуассона, единственность классического решения. Функция Грина задачи Дирихле, решение задачи Дирихле с помощью функции Грина. Симметричность функции Грина (без доказательства). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Преобразование Кельвина. Регулярность поведения гармонической функции на бесконечности.

Постановка внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа. Единственность решения внешних задач Дирихле и Неймана.

## 11. Метод разделения переменных в сферических координатах для уравнения Лапласа в . Сферические функции.

Метод разделения переменных в сферических координатах для уравнения Лапласа. Сферические функции.

Уравнение Лапласа в сферических координатах. Сферические функции как собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами на единичной сфере . Шаровые функции (гармонические многочлены). Собственные значения оператора Лапласа-Бельтрами. Дифференциальное уравнение Лежандра. Полиномы Лежандра и присоединённые функции Лежандра. Выражение сферических функций в сферической системе координат.

Ортогональность и полнота (без доказательства) сферических функций. Решение задач Дирихле и Неймана в шаре и шаровом слое в форме рядов по шаровым функциям.

## 12. Интегральные уравнения.

Интегральные уравнения.

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Непрерывность интегральных операторов с непрерывными и полярными ядрами в пространстве . Союзное уравнение. Характеристические числа и собственные функции интегрального оператора.

Уравнения с вырожденными ядрами. Сведение их к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае. Уравнения с непрерывными и полярными ядрами. Уравнение с малым по норме оператором. Ряд Неймана.

Сведение уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма в общем случае.

Уравнения с эрмитовыми ядрами. Симметричность интегрального оператора с эрмитовым ядром. Теорема о существовании характеристических чисел. Теорема Гильберта-Шмидта для уравнений с непрерывными эрмитовыми ядрами.

### 13. Задача Штурма-Лиувилля.

Задача Штурма-Лиувилля.

Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля; её существование, симметричность, непрерывность. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению с эрмитовым ядром. Свойства спектра и собственных функций. Теорема Стеклова.

### 14. Потенциалы.

Потенциалы.

Объёмный потенциал и его свойства. Потенциал простого слоя, его непрерывность. Потенциал двойного слоя. Формула Гаусса, скачок потенциала двойного слоя при переходе через поверхность. Правильная нормальная производная потенциала простого слоя, формула скачка.

Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа посредством потенциалов к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода на границе. Однозначная разрешимость внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и экраном.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Сборник задач по уравнениям математической физики, Электронная версия печатной публикации / В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, Т. В. Михайлова, М. И. Шабунин. — Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2016
2. Уравнения математической физики [Текст] : учебник для вузов : рек. М-вом образования РФ / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. — 7-е изд. — М. : Изд-во МГУ ; Наука, 2004. — 798 с.
3. Уравнения математической физики [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. М. Уроев. — М. : Яуза, 1998. — 373 с.

Дополнительная литература

1. Уравнения математической физики, Электронная версия печатной публикации / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. — Москва, Физматлит, 2000
2. Лекции по уравнениям математической физики [Текст] : учеб. пособие: рек. Учеб.-метод. советом МФТИ / В. П. Михайлов. — М. : Физматлит, 2001. — 206 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru/catalogue/1604/?t=492> – электронная библиотека Физтеха, раздел «Уравнения математической физики».
2. <http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.
3. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
4. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
5. <http://benran.ru> – библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
6. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

Для контроля и коррекции знаний обучающиеся могут использовать компьютерное тестирование, в том числе на портале [www.i-exam.ru](http://www.i-exam.ru).

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, Scilab и др.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий курс уравнения математической физики, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения теории уравнений с частными производными, типы уравнений, постановки основных краевых задач для уравнений с частными производными, основные свойства решений этих задач, применять полученные знания для решения различных задач.

Одним из основных методов теории уравнений математической физики, который необходимо освоить студенту, является метод Фурье. Метод Фурье состоит в том, что решение краевой задачи ищется в виде ряда по собственным функциям стационарного оператора. Сила метода Фурье заключается в его простоте и алгоритмичности – метод Фурье сводит решение краевой задачи для уравнения с частными производными к решению более простых задач (часто, к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений). Для того чтобы пользоваться методом Фурье, необходимо уметь определять собственные числа и собственные функции операторов, например, оператора Лапласа.

Очень важными являются методы, позволяющие решать задачи Коши для уравнений с частными производными гиперболического и параболического типов: метод характеристик, метод Коши-Ковалевской, метод разделения переменных и т.д.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,
- подготовку к практическим занятиям, коллоквиумам, зачёту и экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения. Значительно облегчить решение задачи может хорошо выполненная постановка задачи.

При подготовке к практическим занятиям необходимо повторять ранее изученные основные определения, формулировки теорем. В начале занятия, как правило, проводится короткий (10-15 минут) опрос по материалу прошедших занятий в устной или письменной форме.

Обычно придерживаются следующей схемы: изучение материала лекции по конспекту в тот же день, когда была прослушана лекция (10-15 минут); повторение материала накануне следующей лекции (10-15 минут), проработка учебного материала по конспектам лекций, учебной и научной литературе, подготовка ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения (1 час в неделю), подготовка к практическому занятию, решение задач (1 час). Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.



Обязательным требованием является выполнение домашних работ, которые оформляются в специально отведённой для этого тетради и систематически сдаются на проверку.

Промежуточный контроль знаний проводится в виде коллоквиумов, на которых студенту предлагается письменно ответить на теоретический вопрос и решить две задачи по теме коллоквиума, а также студенту в ходе освоения курса необходимо выполнить четыре домашних индивидуальных работы с их последующей защитой:

- 1) «Классификация уравнений с частными производными второго порядка, метод характеристик, задача Коши и смешанная задача для волнового уравнения, формула Кирхгофа».
- 2) «Задача Коши для уравнения теплопроводности. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце. Сферические функции».
- 3) «Смешанная задача с начальными условиями на отрезке и в прямоугольнике. Метод Фурье. Функции Бесселя и их применение при решении задач для круглой мембраны. Уравнения Лапласа и Пуассона в пространстве. Функция Грина задачи Дирихле».
- 4) «Интегральные уравнения. Задача Штурма-Лиувилля. Потенциалы».

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладные математика и физика  
**профиль подготовки:** Физика и педагогика  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
кафедра высшей математики  
**курс:** 3  
**квалификация:** бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет  
6 (весенний) - Экзамен

**Разработчик:** В.И. Зубов, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Уравнения математической физики (станд.)» обучающийся должен:

### знать:

основные типы дифференциальных уравнений в частных производных;  
определение характеристической поверхности;  
основные краевые задачи для уравнений гиперболического типа, параболического типа, эллиптического типа;  
формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения;  
формулу Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности;  
метод интеграла энергии для волнового уравнения и принцип максимума для параболического уравнения;  
метод Фурье решения смешанных задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения;  
гармонические функции и их свойства;  
формулу Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре;  
основные свойства оператора Лапласа при однородных краевых условиях;  
интегральные уравнения Фредгольма второго рода со слабо полярными ядрами, теоремы Фредгольма.

### уметь:

- определять тип дифференциальных уравнений с частными производными; приводить уравнения 2-го порядка к каноническому виду;
- решать методом характеристик краевые задачи на плоскости (задачи Коши и Гурса);
- решать задачи Коши для волнового уравнения;
- решать смешанные задачи для полубесконечной струны;
- решать задачи Коши для уравнения теплопроводности;
- применять метод Фурье при решении смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности; применять функции Бесселя при решении задач для круговых областей;
- использовать метод Фурье при решении краевых задач для эллиптических уравнений, применять сферические функции при решении задач для областей со сферической симметрией;
- строить функцию Грина задачи Дирихле для простейших областей и использовать ее при решении конкретных задач;
- решать интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами;
- сводить к интегральному уравнению краевую задачу с помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора;
- вычислять значения объёмных потенциалов, потенциалов простого слоя и двойного слоя, использовать их при решении краевых задач.

### владеть:

- методами и подходами теории уравнений с частными производными, применяемыми при решении задач гидродинамики, аэродинамики, физики, теоретической физики, экономики и др.;
- знаниями, приобретенными при изучении курса уравнений математической физики, позволяющими корректно формулировать краевые задачи при математическом моделировании процессов или объектов в различных областях науки и техники.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

### 3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Уравнения математической физики» осуществляется в форме зачета (5 семестр) и экзамена (6 семестр). Экзамен проводится в письменной и устной форме.

#### Примеры контрольных вопросов:

1. Дать определение задачи Коши и характеристической поверхности. В чем суть метода характеристик?
2. Написать формулу Даламбера. Решение какой задачи оно дает? Как формулируется смешанная задача для полубесконечной струны с закреплённым концом? Со свободным концом?
3. В чем состоит принцип Гюйгенса?
4. Сформулировать задачу Коши для уравнения теплопроводности. Привести формулу, дающую ее решение. Как формулируется принцип максимума для параболического уравнения?
5. Как определяется оператор Лапласа при однородных краевых условиях? Как определяются его собственные значения и собственные функции? Написать формулы Грина для оператора Лапласа. Сформулировать краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения эллиптического типа.
6. Какие методы Вам известны для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге? Что такое интеграл Пуассона?
7. Как формулируется смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке? В чем суть метода Фурье?
8. Сформулировать смешанную задачу для уравнения колебаний струны на отрезке.
9. Что такое функции Бесселя первого рода? Каковы их свойства? Где они применяются? Какие другие цилиндрические функции Вы знаете?
10. Дать определение гармонической функции в  $R^3$ . Какие свойства этих функций? В чем состоит принцип максимума и минимума для гармонических функций? Как формулируется задача Дирихле для уравнения Пуассона? Приведите корректную постановку внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в  $R^3$ .
11. Дайте определение сферических функций, шаровых функций. Где они используются?
12. Какие уравнения называются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода? Что такое ядро интегрального уравнения? Какие ядра называются вырожденными? Сформулируйте теоремы Фредгольма.
13. Какая задача носит название задачи Штурма-Лиувилля? Как свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению с эрмитовым ядром? Зачем это нужно?
14. Дать определение объёмного потенциала, потенциала простого слоя, потенциала двойного слоя. Какие свойства этих потенциалов Вам известны?

#### Примеры контрольных заданий:

### ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина:

Уравнения математической физики

Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено

1

однозначно:

$$x^4 u_{xx} - y^4 u_{yy} + 2x^3 u_x - 2y^3 u_y = 0, \quad (x > 0, y > 0),$$

$$u|_{xy=1} = 1, \quad (1 < x < 2), \quad u|_{y=x} = x^2, \quad (0.25 < x < 1).$$

2

Найти решение смешанной задачи:  $16u_{tt} = u_{xx} + 72e^{2x-t}, \quad (x > 0, t > 0),$

$$u|_{t=0} = 12x, \quad u_t|_{t=0} = -3, \quad (x \geq 0), \quad (u - u_x)|_{x=0} = 3e^{-t} - 15, \quad (t \geq 0).$$

3

Решить смешанную задачу:  $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad (0 < x < 3\pi, t > 0),$

$$u|_{t=0} = \cos(x/2), \quad u_t|_{t=0} = x - 3\pi, \quad (0 \leq x \leq 3\pi),$$

$$u_x|_{x=0} = \sin t, \quad u|_{x=3\pi} = 0, \quad (t \geq 0).$$

4

Решить задачу Коши:  $u_t = \Delta u - 12sh2t \cdot shy, \quad ((x, y, z) \in R^3, t > 0),$

$$u|_{t=0} = x^3 shy + (2x + y) \cos(1 + y + 2x) - yze^{-(z/2)^2}, \quad ((x, y, z) \in R^3).$$

5

Решить задачу:

$$\Delta u = 20r^2 \sin 6\varphi, \quad (r < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

$$(3u + u_r)|_{r=1} = 11 \sin 6\varphi - 5 \cos 7\varphi + 3.$$

6

Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных  $\lambda$ :

$$u(x) = \lambda \cdot \int_0^\pi [\pi \sin x + (1 - 2 \cos x) \cos y] u(y) dy + 1 - 6 \cos x,$$

$$u(x) \in C[0, \pi].$$

7

Найти решение смешанной задачи:

$$u_t = 2\Delta u + J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3}r\right) \cos 2\varphi + 2J_5\left(\frac{\mu_1^{(5)}}{3}r\right) \sin 5\varphi, \quad r < 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ t > 0,$$

$$u|_{t=0} = J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3}r\right) \sin 5\varphi, \quad r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$u|_{r=3} = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t \geq 0,$$

где  $\mu_1^{(m)}$  – минимальный положительный корень функции Бесселя  $J_m(r)$ .

Примеры задач, используемых при сдаче заданий:

1. Решить задачу Коши:

$$9u_t = \Delta u, \quad (x, y) \in R^2, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 3 \cos 2x + e^{-9x^2} \sin y, \quad (x, y) \in R^2.$$

2. Найти  $u(0,0,x_3)$  для  $x_3 > 0$ , где  $u(x_1, x_2, x_3)$  - решение задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0 \quad \text{при } x_3 > 0,$$

$$u|_{x_3=0} = \begin{cases} 1, & x_1^2 + x_2^2 < R^2, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 \geq R^2. \end{cases}$$

3. Найти функцию  $u(x)$ , гармоническую в шаре  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1$  и такую, что

$$\left( u + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2}} \cdot (\sin 2\varphi + 3\sqrt{2}).$$

4. Решить задачу:

$$\Delta u = 96x^2, \quad (u - u_r) \Big|_{r=1} = 12 \sin 2\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых  $\lambda$ ,  $a$  и  $b$  интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^1 ((1+3x)y - y^2) u(y) dy + ax^3 + bx^2, \quad -1 \leq x \leq +1.$$

6. Свести к интегральному уравнению задачу

$$\begin{aligned} -x^2 y'' - xy' &= \lambda y + \cos x, & 1 < x < 2, \\ y(1) - \ln 2 \cdot y'(1) &= 0, & y(2) = 0. \end{aligned}$$

#### 4. Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

оценка «зачтено» выставляется студенту по итогам текущей успеваемости, при условии, что он сдал все задания, предусмотренные программой дисциплины, написал промежуточные контрольные работы и набрал пороговое количество баллов;

оценка «не зачтено» выставляется обучающемуся, если он не набрал пороговое количество баллов.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, предусмотренных программой дисциплины, с учетом набранных очков по БРС.

Время проведения письменного экзамена составляет четыре астрономических часа. Во время проведения письменного экзамена обучающиеся могут пользоваться только ручкой, карандашом и бумагой.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.



### 3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Уравнения математической физики» осуществляется в форме зачета (5 семестр) и экзамена (6 семестр). Экзамен проводится в письменной и устной форме.

#### Примеры контрольных вопросов:

1. Дать определение задачи Коши и характеристической поверхности. В чем суть метода характеристик?
2. Написать формулу Даламбера. Решение какой задачи оно дает? Как формулируется смешанная задача для полубесконечной струны с закреплённым концом? Со свободным концом?
3. В чем состоит принцип Гюйгенса?
4. Сформулировать задачу Коши для уравнения теплопроводности. Привести формулу, дающую ее решение. Как формулируется принцип максимума для параболического уравнения?
5. Как определяется оператор Лапласа при однородных краевых условиях? Как определяются его собственные значения и собственные функции? Написать формулы Грина для оператора Лапласа. Сформулировать краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения эллиптического типа.
6. Какие методы Вам известны для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге? Что такое интеграл Пуассона?
7. Как формулируется смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке? В чем суть метода Фурье?
8. Сформулировать смешанную задачу для уравнения колебаний струны на отрезке.
9. Что такое функции Бесселя первого рода? Каковы их свойства? Где они применяются? Какие другие цилиндрические функции Вы знаете?
10. Дать определение гармонической функции в  $R^3$ . Какие свойства этих функций? В чем состоит принцип максимума и минимума для гармонических функций? Как формулируется задача Дирихле для уравнения Пуассона? Приведите корректную постановку внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в  $R^3$ .
11. Дайте определение сферических функций, шаровых функций. Где они используются?
12. Какие уравнения называются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода? Что такое ядро интегрального уравнения? Какие ядра называются вырожденными? Сформулируйте теоремы Фредгольма.
13. Какая задача носит название задачи Штурма-Лиувилля? Как свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению с эрмитовым ядром? Зачем это нужно?
14. Дать определение объёмного потенциала, потенциала простого слоя, потенциала двойного слоя. Какие свойства этих потенциалов Вам известны?

#### Примеры контрольных заданий:

### ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина:

Уравнения математической физики

Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено

1

однозначно:

$$x^4 u_{xx} - y^4 u_{yy} + 2x^3 u_x - 2y^3 u_y = 0, \quad (x > 0, y > 0),$$

$$u|_{xy=1} = 1, \quad (1 < x < 2), \quad u|_{y=x} = x^2, \quad (0.25 < x < 1).$$

2

Найти решение смешанной задачи:  $16u_{tt} = u_{xx} + 72e^{2x-t}, \quad (x > 0, t > 0),$

$$u|_{t=0} = 12x, \quad u_t|_{t=0} = -3, \quad (x \geq 0), \quad (u - u_x)|_{x=0} = 3e^{-t} - 15, \quad (t \geq 0).$$

3

Решить смешанную задачу:  $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad (0 < x < 3\pi, t > 0),$

$$u|_{t=0} = \cos(x/2), \quad u_t|_{t=0} = x - 3\pi, \quad (0 \leq x \leq 3\pi),$$

$$u_x|_{x=0} = \sin t, \quad u|_{x=3\pi} = 0, \quad (t \geq 0).$$

4

Решить задачу Коши:  $u_t = \Delta u - 12sh2t \cdot shy, \quad ((x, y, z) \in R^3, t > 0),$

$$u|_{t=0} = x^3 shy + (2x + y) \cos(1 + y + 2x) - yze^{-(z/2)^2}, \quad ((x, y, z) \in R^3).$$

5

Решить задачу:

$$\Delta u = 20r^2 \sin 6\varphi, \quad (r < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

$$(3u + u_r)|_{r=1} = 11 \sin 6\varphi - 5 \cos 7\varphi + 3.$$

6

Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных  $\lambda$ :

$$u(x) = \lambda \cdot \int_0^\pi [\pi \sin x + (1 - 2 \cos x) \cos y] u(y) dy + 1 - 6 \cos x,$$

$$u(x) \in C[0, \pi].$$

7

Найти решение смешанной задачи:

$$u_t = 2\Delta u + J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3}r\right) \cos 2\varphi + 2J_5\left(\frac{\mu_1^{(5)}}{3}r\right) \sin 5\varphi, \quad r < 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ t > 0,$$

$$u|_{t=0} = J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3}r\right) \sin 5\varphi, \quad r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$u|_{r=3} = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t \geq 0,$$

где  $\mu_1^{(m)}$  – минимальный положительный корень функции Бесселя  $J_m(r)$ .

Примеры задач, используемых при сдаче заданий:

1. Решить задачу Коши:

$$9u_t = \Delta u, \quad (x, y) \in R^2, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 3 \cos 2x + e^{-9x^2} \sin y, \quad (x, y) \in R^2.$$

2. Найти  $u(0,0,x_3)$  для  $x_3 > 0$ , где  $u(x_1, x_2, x_3)$  - решение задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0 \quad \text{при } x_3 > 0,$$

$$u|_{x_3=0} = \begin{cases} 1, & x_1^2 + x_2^2 < R^2, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 \geq R^2. \end{cases}$$

3. Найти функцию  $u(x)$ , гармоническую в шаре  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1$  и такую, что

$$\left( u + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2}} \cdot (\sin 2\varphi + 3\sqrt{2}).$$

4. Решить задачу:

$$\Delta u = 96x^2, \quad (u - u_r) \Big|_{r=1} = 12 \sin 2\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых  $\lambda$ ,  $a$  и  $b$  интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^1 ((1+3x)y - y^2) u(y) dy + ax^3 + bx^2, \quad -1 \leq x \leq +1.$$

6. Свести к интегральному уравнению задачу

$$\begin{aligned} -x^2 y'' - xy' &= \lambda y + \cos x, & 1 < x < 2, \\ y(1) - \ln 2 \cdot y'(1) &= 0, & y(2) = 0. \end{aligned}$$

#### 4. Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

оценка «зачтено» выставляется студенту по итогам текущей успеваемости, при условии, что он сдал все задания, предусмотренные программой дисциплины, написал промежуточные контрольные работы и набрал пороговое количество баллов;

оценка «не зачтено» выставляется обучающемуся, если он не набрал пороговое количество баллов.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, предусмотренных программой дисциплины, с учетом набранных очков по БРС.

Время проведения письменного экзамена составляет четыре астрономических часа. Во время проведения письменного экзамена обучающиеся могут пользоваться только ручкой, карандашом и бумагой.

### 3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Уравнения математической физики» осуществляется в форме дифференцированного зачета (5 семестр) и экзамена (6 семестр). Экзамен проводится в письменной и устной форме.

#### Примеры контрольных вопросов:

1. Дать определение задачи Коши и характеристической поверхности. В чем суть метода характеристик?
2. Написать формулу Даламбера. Решение какой задачи оно дает? Как формулируется смешанная задача для полубесконечной струны с закреплённым концом? Со свободным концом?
3. В чем состоит принцип Гюйгенса?
4. Сформулировать задачу Коши для уравнения теплопроводности. Привести формулу, дающую ее решение. Как формулируется принцип максимума для параболического уравнения?
5. Как определяется оператор Лапласа при однородных краевых условиях? Как определяются его собственные значения и собственные функции? Написать формулы Грина для оператора Лапласа. Сформулировать краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения эллиптического типа.
6. Какие методы Вам известны для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге? Что такое интеграл Пуассона?
7. Как формулируется смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке? В чем суть метода Фурье?
8. Сформулировать смешанную задачу для уравнения колебаний струны на отрезке.
9. Что такое функции Бесселя первого рода? Каковы их свойства? Где они применяются? Какие другие цилиндрические функции Вы знаете?
10. Дать определение гармонической функции в  $R^3$ . Какие свойства этих функций? В чем состоит принцип максимума и минимума для гармонических функций? Как формулируется задача Дирихле для уравнения Пуассона? Приведите корректную постановку внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в  $R^3$ .
11. Дайте определение сферических функций, шаровых функций. Где они используются?
12. Какие уравнения называются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода? Что такое ядро интегрального уравнения? Какие ядра называются вырожденными? Сформулируйте теоремы Фредгольма.
13. Какая задача носит название задачи Штурма-Лиувилля? Как свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению с эрмитовым ядром? Зачем это нужно?
14. Дать определение объёмного потенциала, потенциала простого слоя, потенциала двойного слоя. Какие свойства этих потенциалов Вам известны?

#### Примеры контрольных заданий:

### ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА

Дисциплина:

Уравнения математической физики

Решить задачу и указать наибольшую область, в которой решение определено  
однозначно:

$$x^4 u_{xx} - y^4 u_{yy} + 2x^3 u_x - 2y^3 u_y = 0, \quad (x > 0, y > 0),$$

$$u|_{xy=1} = 1, \quad (1 < x < 2), \quad u|_{y=x} = x^2, \quad (0.25 < x < 1).$$

Найти решение смешанной задачи:  $16u_{tt} = u_{xx} + 72e^{2x-t}, \quad (x > 0, t > 0),$

$$u|_{t=0} = 12x, \quad u_t|_{t=0} = -3, \quad (x \geq 0), \quad (u - u_x)|_{x=0} = 3e^{-t} - 15, \quad (t \geq 0).$$

Решить смешанную задачу:  $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad (0 < x < 3\pi, t > 0),$

$$u|_{t=0} = \cos(x/2), \quad u_t|_{t=0} = x - 3\pi, \quad (0 \leq x \leq 3\pi),$$

$$u_x|_{x=0} = \sin t, \quad u|_{x=3\pi} = 0, \quad (t \geq 0).$$

Решить задачу Коши:  $u_t = \Delta u - 12sh2t \cdot shy, \quad ((x, y, z) \in R^3, t > 0),$

$$u|_{t=0} = x^3 shy + (2x + y) \cos(1 + y + 2x) - yze^{-(z/2)^2}, \quad ((x, y, z) \in R^3).$$

Решить задачу:

$$\Delta u = 20r^2 \sin 6\varphi, \quad (r < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

$$(3u + u_r)|_{r=1} = 11 \sin 6\varphi - 5 \cos 7\varphi + 3.$$

Найти характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения. Решить интегральное уравнение при всех возможных  $\lambda$ :

$$u(x) = \lambda \cdot \int_0^\pi [\pi \sin x + (1 - 2 \cos x) \cos y] u(y) dy + 1 - 6 \cos x,$$

$$u(x) \in C[0, \pi].$$

Найти решение смешанной задачи:

$$u_t = 2\Delta u + J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3}r\right) \cos 2\varphi + 2J_5\left(\frac{\mu_1^{(5)}}{3}r\right) \sin 5\varphi, \quad r < 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ t > 0,$$

$$u|_{t=0} = J_1\left(\frac{\mu_1^{(1)}}{3}r\right) \sin 5\varphi, \quad r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$u|_{r=3} = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t \geq 0,$$

где  $\mu_1^{(m)}$  – минимальный положительный корень функции Бесселя  $J_m(r)$ .

Примеры задач, используемых при сдаче заданий:

1. Решить задачу Коши:

$$9u_t = \Delta u, \quad (x, y) \in R^2, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 3 \cos 2x + e^{-9x^2} \sin y, \quad (x, y) \in R^2.$$

2. Найти  $u(0,0,x_3)$  для  $x_3 > 0$ , где  $u(x_1, x_2, x_3)$  - решение задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0 \quad \text{при } x_3 > 0,$$

$$u|_{x_3=0} = \begin{cases} 1, & x_1^2 + x_2^2 < R^2, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 \geq R^2. \end{cases}$$

3. Найти функцию  $u(x)$ , гармоническую в шаре  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1$  и такую, что

$$\left( u + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=1} = \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{2}} \cdot (\sin 2\varphi + 3\sqrt{2}).$$

4. Решить задачу:

$$\Delta u = 96x^2, \quad (u - u_r) \Big|_{r=1} = 12 \sin 2\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

5. Найти характеристические числа, собственные функции интегрального оператора и решить при всех допустимых  $\lambda$ ,  $a$  и  $b$  интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^1 ((1+3x)y - y^2) u(y) dy + ax^3 + bx^2, \quad -1 \leq x \leq +1.$$

6. Свести к интегральному уравнению задачу

$$\begin{aligned} -x^2 y'' - xy' &= \lambda y + \cos x, & 1 < x < 2, \\ y(1) - \ln 2 \cdot y'(1) &= 0, & y(2) = 0. \end{aligned}$$

#### 4. Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

оценка «зачтено» выставляется студенту по итогам текущей успеваемости, при условии, что он сдал все задания, предусмотренные программой дисциплины, написал промежуточные контрольные работы и набрал пороговое количество баллов;

оценка «не зачтено» выставляется обучающемуся, если он не набрал пороговое количество баллов.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, предусмотренных программой дисциплины, с учетом набранных очков по БРС.

Время проведения письменного экзамена составляет четыре астрономических часа. Во время проведения письменного экзамена обучающиеся могут пользоваться только ручкой, карандашом и бумагой.