

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Уравнения математической физики
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Физика и педагогика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра физики и технологии наноструктур
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет

6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 135 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 75 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 150 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 315, всего зач. ед.: 7

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составили:

И.В. Колоколов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

В.В. Лебедев, д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

Программа обсуждена на заседании кафедры физики и технологии наноструктур 09.02.2023

Аннотация

В ходе освоения курса слушатели получают представление о математических задачах, возникающих в различных физических ситуациях, а также изучают способы их решения: как правило, речь идет о дифференциальных уравнениях, как обыкновенных, так и в частных производных, с начальными и граничными условиями. Обсуждаются линейные задачи, анализ которых ведётся на языке функций Грина. В курсе представлены сведения об основных специальных функциях и их свойствах. Разбираются основные сведения по нелинейным динамическим системам, включая теорию устойчивости, решения солитонного типа и анализ интегрируемых уравнений. Также разбираются приближённые методы решения различных задач.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Курс «Уравнения математической физики» нацелен на обучение математической дисциплине и ее прикладным аспектам, необходимым студентам факультета общей и прикладной физики, которые планируют научную работу в своей сфере.

Задачи дисциплины

1. Обучить формальным определениям основных базовых объектов, относящихся к уравнениям в частных производных, теории операторов в гильбертовом пространстве, группам симметрии и интегральным уравнениям;
2. Установить связь между физическим явлением и описывающим его дифференциальным или интегральным уравнением (Трек 1);
3. Научить основным техникам работы с разложением по собственным функциям линейных дифференциальных и интегральных операторов;
4. Обучить решению основных эволюционных задач математической физики;
5. Научить выявлять и использовать симметрии физических и формальных задач для их эффективного решения;
6. Обучить современным подходам к анализу поведения решений нелинейных уравнений математической физики, имеющих реальное физическое значение;
7. Научить операторным методам, основанным на теории групп Ли, для решения эволюционных задач, возникающих в квантовой механике и статистической физике;
8. Обучить применению теории представлений групп Ли и конечных групп для диагонализации операторов, встречающихся в квантовой теории.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований, и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников

ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.2 Имеет глубокое знание и понимание базовых математических дисциплин
	ПК-1.4 Умеет строить математические модели для описания и исследования процессов и явлений в соответствующих научных областях
ПК-3 Способен выбирать и применять подходящее оборудование, инструменты и методы исследований для решения задач в избранной предметной области	ПК-3.2 Знает области и критерии применимости используемых теоретических подходов и умение оценивать точность приближенных аналитических методов вычислений
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- формальные определения основных объектов теории уравнений в частных производных математической физики;
- формулировки и доказательства основных теорем теории уравнений в частных производных математической физики.

уметь:

- применять на практике полученные знания и навыки.

владеть:

- основными инструментами теории уравнений в частных производных, и методами конкретного решения этих уравнений.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Линейные уравнения первого порядка. Метод характеристик.	4	4		4
2	Методы преобразования Лапласа и Фурье и функции Грина для основных эволюционных уравнений математической физики.	8	8		8
3	Операторы в гильбертовом пространстве, разложение по собственным функциям, обращение.	4	4		4
4	Основные специальные функции математической физики, элементы теории Фукса, гипергеометрическая функция.	8	8		8
5	Квазилинейные и нелинейные уравнения первого порядка в частных производных. Уравнение Бюргерса.	6	6		6
6	Интегрируемые нелинейные уравнения математической физики. Солитоны и коллапсы.	6	10		21

7	Симметрии основных уравнений математической физики и их следствия.	4	5		19
8	Конечные группы симметрии. Элементы теории групп.	6	10		21
9	Непрерывные группы симметрии, группы и алгебры Ли, представления группы вращений трехмерного пространства.	4	5		19
10	Интегральные уравнения. Теория Фредгольма. Методы интегральных преобразований.	6	10		21
11	Метод Винера-Хопфа. Сингулярные интегральные уравнения.	4	5		19
Итого часов		60	75		150
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		315 час., 7 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. Линейные уравнения первого порядка. Метод характеристик.

1.1 Уравнение первого порядка. Задача Коши. Функция Грина, дельта-функция. Общие свойства решения уравнения с правой частью. Уравнения порядка выше первого. Задача Коши. Функция Грина, ее нахождение при помощи преобразования Лапласа. Общие свойства решения уравнения с правой частью. Матричное уравнение первого порядка. Задача Коши, функция Грина. Решение уравнения с помощью диагонализации матрицы. Особенности решения для матриц Жордана.

2. Методы преобразования Лапласа и Фурье и функции Грина для основных эволюционных уравнений математической физики.

2.1. Одномерная граничная задача. Оператор Штурма-Лиувилля. Функция Грина, ее построение через левое и правое решения, Вронскиан. Периодические граничные условия.

2.2. Уравнения Лапласа, Гельмгольца и Дебая. Функции Грина в неограниченном пространстве. Общие свойства решений этих уравнений с правой частью. Задачи для ограниченной области. Решение уравнения Шрёдингера в Кулоновском потенциале при помощи преобразования Лапласа. Аналитические свойства, связанные состояния.

2.3. Уравнения диффузии и уравнение Шрёдингера для свободной частицы. Функция Грина, ее вычисление при помощи преобразования Фурье. Общие свойства решений задачи Коши и уравнения с правой частью.

3. Операторы в гильбертовом пространстве, разложение по собственным функциям, обращение.

3.1. Операторы в гильбертовом пространстве, разложение по собственным функциям, обращение.

3.2. Уравнения волнового типа. Закон дисперсии. Уравнение на огибающую, групповая скорость и дисперсия.

4. Основные специальные функции математической физики, элементы теории Фукса, гипергеометрическая функция.

- 4.1. Гамма-функция Эйлера. Основные соотношения, связь с Бета-функцией. Аналитические свойства Гамма-функции.
- 4.2. Функции Эйри, как решения уравнения Эйри. Представление функций Эйри в виде контурного интеграла (метод Лапласа). Асимптотическое поведение функций Эйри (метод перевала и метод стационарной фазы, связь с представлением WKB). Функции Бесселя. Производящий функционал. Уравнение для функций Бесселя. Рекуррентные соотношения. Аналитические свойства функций Бесселя. Асимптотическое поведение функций Бесселя. Разложение по функциям Бесселя.
- 4.3. Полиномы Лежандра. Производящая функция, дифференциальное уравнение. Рекуррентные соотношения. Интегральное представление. Асимптотическое поведение. Разложение по полиномам Лежандра. Полиномы Эрмита. Производящая функция, дифференциальное уравнение. Рекуррентные соотношения. Интегральное представление. Асимптотическое поведение. Разложение по полиномам Эрмита
- 4.4. Вырожденная гипергеометрическая функция. Дифференциальное уравнение, разложение в ряд, основные соотношения. Интегральное представление, асимптотическое поведение.
5. Квазилинейные и нелинейные уравнения первого порядка в частных производных. Уравнение Бюргерса.
- 5.1. Квазилинейные дифференциальные уравнения. Метод характеристик. Уравнение Хопфа, общие свойства его решения. Уравнение Хопфа с правой частью. Уравнение Бюргерса. Общие свойства решения уравнения Бюргерса, структура шока. Преобразование Коула-Хопфа: решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Семестр: 6 (Весенний)

6. Интегрируемые нелинейные уравнения математической физики. Солитоны и коллапсы.
- 6.1. Уравнение Кортевега-де-Фриза. Волновой предел. Солитонные решения. Понятие о высших интегралах движения. Уравнение синус-Гордон. Волновой предел. Солитонные решения, кинки и антикинки. Понятие о высших интегралах движения. Нелинейное уравнение Шрёдингера. Нётеровские интегралы движения. Коллапс, анализ Таланова. Одномерное нелинейное уравнение Шрёдингера. Волновой предел. Солитонные решения.
7. Симметрии основных уравнений математической физики и их следствия.
- 7.1. Группы симметрии гамильтониана, их роль в формировании спектра, понятие о неприводимом представлении. Неприводимые представления конечных групп. Простые конечные подгруппы группы вращений.
8. Конечные группы симметрии. Элементы теории групп.
- 8.1. Линейные представления конечных групп. Симметрии операторов и их роль в спектре.
9. Непрерывные группы симметрии, группы и алгебры Ли, представления группы вращений трехмерного пространства.
- 9.1. Группы и алгебры Ли, формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа. Группа вращений трехмерного пространства, построение неприводимых представлений, разложение тензорного произведения представлений на неприводимые (сложение моментов). Расщепление вырожденных уровней гамильтониана при понижении симметрии, симметричная классификация колебаний в молекулах и кристаллах.
10. Интегральные уравнения. Теория Фредгольма. Методы интегральных преобразований.
- 10.1. Интегральные уравнения: вырожденные ядра и уравнения типа свертки. Задачи на собственные значения; теория возмущений и элементы теории Фредгольма.

11. Метод Винера-Хопфа. Сингулярные интегральные уравнения.

11.1. Полубесконечный интервал интегрирования: метод Винера-Хопфа. Дисперсионные соотношения; элементарные сингулярные уравнения.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном. Для проведения занятий в формате видеоконференции – ноутбук или персональный компьютер, оснащенный микрофоном и видеокамерой, имеющий выход в сеть Интернет с достаточной для участия в видеоконференции пропускной способностью.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Задачи по математическим методам физики [Текст] / И. В. Колоколов [и др.] - М. ЛИБРОКОМ, 2017
- Фонд базовой кафедры:
2. Асимптотика: интегралы и ряды [Текст] / М. В. Федорюк - М. Наука, 1987.

Дополнительная литература

1. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] : учеб. пособие для вузов / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — 5-е изд., испр. — М. : Наука, 1987, 2002. — 688 с.
- Фонд базовой кафедры:
2. Курс высшей математики [Текст]: Т.2 / В. И. Смирнов; 20-е изд., стереотип. - М. Наука, 1967.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентации. Также лекции могут проходить в дистанционном режиме посредством видеоконференций и вебинаров.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса уравнений математической физики требует напряжённой работы студента МФТИ, начинающейся с конспектирования:

- 1) приводимых на лекциях определений и теорем с доказательствами;
- 2) приводимых и обсуждаемых на семинарах решений типовых задач.

По мере обучения студенту следует выучить:

- 1) все определения, формулировки именованных теорем с доказательствами;
- 2) алгоритмы получения и обоснования решений типовых задач, разбираемых на семинарах в обязательном порядке;
- 3) самостоятельно решить остальные задачи заданий.

Студент имеет возможность обучаться (частично или полностью) путём использования любых источников знаний для усвоения:

- 1) предусмотренных курсом определений и теорем с доказательствами вплоть до безошибочного воспроизведения;
- 2) предусмотренных курсом типовых задач вплоть до безошибочного воспроизведения и обоснования решений.

Текущий контроль за успеваемостью студентов осуществляется во время проверки письменных работ и устной защиты предусмотренных заданий.

В качестве дополнительной литературы могут быть использованы источники:

1. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы математической физики, в 2 т., ИЛ, Москва, 1958.
2. И.Г. Араманович, В.И.Левин, Уравнения математической физики, М. Наука, 1969.
3. А.П.Исаев, В.А.Рубаков, Теория групп и симметрий, Эдиториал УРСС, КРАСАНД, 2018
4. Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, Лань, СП, 2001.
5. В.Е.Захаров,С.В.Манаков,С.П.Новиков,Л.П.Питаевский, Теория солитонов, М. Наука 1980.
6. Ф. Олвер, Асимптотика и специальные функции, Наука, Москва, 1990.
7. В. Босс, Уравнения математической физики, Эдиториал УРСС, Москва, 2016.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Физика и педагогика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра физики и технологии наноструктур
курс:	<u>3</u>
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет
6 (весенний) - Экзамен

Разработчики:

И.В. Колоколов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент
В.В. Лебедев, д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований, и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.2 Имеет глубокое знание и понимание базовых математических дисциплин
	ПК-1.4 Умеет строить математические модели для описания и исследования процессов и явлений в соответствующих научных областях
ПК-3 Способен выбирать и применять подходящее оборудование, инструменты и методы исследований для решения задач в избранной предметной области	ПК-3.2 Знает области и критерии применимости используемых теоретических подходов и умение оценивать точность приближенных аналитических методов вычислений
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Уравнения математической физики (ФТН)» обучающийся должен:

знать:

- формальные определения основных объектов теории уравнений в частных производных математической физики;
- формулировки и доказательства основных теорем теории уравнений в частных производных математической физики.

уметь:

- применять на практике полученные знания и навыки.

владеть:

- основными инструментами теории уравнений в частных производных, и методами конкретного решения этих уравнений.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры задач из домашнего задания (курсовых работ) приведены в прикреплённом файле.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Контрольные вопросы в 5-ом семестре:

1. Уравнение первого порядка. Задача Коши. Функция Грина, дельта-функция. Общие свойства решения уравнения с правой частью.
2. Уравнения порядка выше первого. Задача Коши. Функция Грина, ее нахождение при помощи преобразования Лапласа. Общие свойства решения уравнения с правой частью.
3. Матричное уравнение первого порядка. Задача Коши, функция Грина. Решение уравнения с помощью диагонализации матрицы. Особенности решения для матриц Жордана.
4. Одномерная граничная задача. Оператор Штурма-Лиувилля. Функция Грина, ее построение через левое и правое решения, Вронскиан. Периодические граничные условия.
5. Уравнения Лапласа, Гельмгольца и Дебая. Функции Грина в неограниченном пространстве. Общие свойства решений этих уравнений с правой частью. Задачи для ограниченной области.
6. Решение уравнения Шрёдингера в Кулоновском потенциале при помощи преобразования Лапласа. Аналитические свойства, связанные состояния.
7. Уравнения диффузии и уравнение Шрёдингера для свободной частицы. Функция Грина, ее вычисление при помощи преобразования Фурье. Общие свойства решений задачи Коши и уравнения с правой частью.
8. Уравнения волнового типа. Закон дисперсии. Уравнение на огибающую, групповая скорость и дисперсия.
9. Гамма-функция Эйлера. Основные соотношения, связь с Бета-функцией. Аналитические свойства Гамма-функции.
10. Функции Эйри как решения уравнения Эйри. Представление функций Эйри в виде контурного интеграла (метод Лапласа). Асимптотическое поведение функций Эйри (метод перевала и метод стационарной фазы, связь с представлением WKBJ).
11. Функции Бесселя. Производящий функционал. Уравнение для функций Бесселя. Рекуррентные соотношения. Аналитические свойства функций Бесселя. Асимптотическое поведение функций Бесселя. Разложение по функциям Бесселя.
12. Полиномы Лежандра. Производящая функция, дифференциальное уравнение. Рекуррентные соотношения. Интегральное представление. Асимптотическое поведение. Разложение по полиномам Лежандра.
13. Полиномы Эрмита. Производящая функция, дифференциальное уравнение. Рекуррентные соотношения. Интегральное представление. Асимптотическое поведение. Разложение по полиномам Эрмита.
14. Вырожденная гипергеометрическая функция. Дифференциальное уравнение, разложение в ряд, основные соотношения. Интегральное представление, асимптотическое поведение.
15. Квазилинейные дифференциальные уравнения. Метод характеристик. Уравнение Хопфа, общие свойства его решения. Уравнение Хопфа с правой частью.
16. Уравнение Бюргерса. Общие свойства решения уравнения Бюргерса, структура шока.
17. Преобразование Коула-Хопфа: решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Контрольные вопросы в 6-ом семестре:

1. Уравнение Кортевега-де-Фриза. Волновой предел. Солитонные решения.
2. Понятие о высших интегралах движения. Уравнение синус-Гордон. Волновой предел. Солитонные решения, кинки и антикинки.
3. Понятие о высших интегралах движения. Нелинейное уравнение Шрёдингера. Нётеровские интегралы движения. Коллапс, анализ Таланова.
4. Одномерное нелинейное уравнение Шрёдингера. Волновой предел. Солитонные решения.
5. Группы симметрии гамильтониана, их роль в формировании спектра, понятие о неприводимом представлении. Неприводимые представления конечных групп. Простые конечные подгруппы группы вращений.
6. Группы и алгебры Ли, формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа. Группа вращений трехмерного пространства, построение неприводимых представлений, разложение тензорного произведения представлений на неприводимые (сложение моментов).
7. Расщепление вырожденных уровней гамильтониана при понижении симметрии, симметричная классификация колебаний в молекулах и кристаллах.
8. Интегральные уравнения: вырожденные ядра и уравнения типа свертки. Задачи на собственные значения; теория возмущений и элементы теории Фредгольма.
9. Полубесконечный интервал интегрирования: метод Винера-Хопфа.
10. Дисперсионные соотношения; элементарные сингулярные уравнения.

Примеры экзаменационных билетов в 6-ом семестре (см. прикрепленный файл):

Билет 1.

1. Уравнение Кортевега-де-Фриза. Волновой предел. Солитонные решения.
2. Задача 1.
3. Задача 2.
4. Задача 3.

Билет 2.

1. Понятие о высших интегралах движения. Уравнение синус-Гордон. Волновой предел. Солитонные решения, кинки и антикинки.
2. Задача 1.
3. Задача 2.
4. Задача 3.

Критерии оценивания

10 баллов – это оценка за ответ на экзамене теории и сдачу задач, выполненных дома в течение семестра и решенных на экзамене. На дом в течении семестра задается 30 задач. На экзамене (дифференцированном зачете) в конце семестра студент получает 3 задачи.

Критерии оценки:

Одна решенная на экзамене задача (из трех) или 10 решенных домашних задач (из пятидесяти) - 0-2 балла (за каждую задачу)

Ответ на теоретический вопрос - 0-2 балла

Порядок формирования оценок по дисциплине:

Оценка за каждый семестр выставляется по формуле: максимум из 10 и $Q1*2+Q2/5+Q3*$, где: $Q1$ — количество решенных задач на экзамене, $Q2$ — количество решенных задач дома, $Q3$ — количество отвеченных теоретических вопросов.

Пересдача экзамена за каждый семестр возможна в установленном в МФТИ порядке. Время и порядок пересдачи определяется учебным управлением МФТИ по согласованию с кафедрой инновационной педагогики МФТИ.

Результирующая оценка за весь курс выставляется после сдачи экзамена за второй семестр и вычисляется по формуле:

$$OP=0.4 (O1)+0.6 (O2),$$

где OP- результирующая оценка за весь курс, $(O1)$ – оценка за первый семестр, $(O2)$ – оценка за второй семестр.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется полчаса (астрономических) на подготовку ответа на теоретические вопросы и по 15 минут на каждую задачу. При выставлении итоговой оценки учитывается работа обучающегося в семестре, выполнение им заданий. На экзамене запрещено пользоваться любыми учебными материалами, а также средствами мобильной связи и электронными устройствами.

Фонд оценочных средств

1. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Пример домашнего задания:

Задача 1. Найти решение уравнения Бюргерса $\partial_t u + u \partial_x u = \partial_x^2 u$ с начальным условием

$$u = \frac{2a \sin x}{1 + a \cos x},$$

где a – константа, $a < 1$. Указание: воспользуйтесь преобразованием Коула-Хопфа.

Задача 2. Для двумерного нелинейного уравнения Шрёдингера начальное условие имеет вид (а) $\psi = 1/\sqrt{1+r^2}$; (б) $\psi = 2 \exp(-r^2/2)$. Приведет ли оно к коллапсу?

Задача 3. Для уравнения синус-Гордон найти энергию покоящегося кинка.

Задача 4. Найти одномерные, двумерное и трехмерное представления группы вращений снежинки и их характеры. Какие из них неприводимы?

Задача 5. Вычислить $\partial \exp(ix_i \sigma_i) / \partial x_j$, где σ_i – матрицы Паули.

Задача 6. Сколько векторных представлений группы вращений (для векторного представления угловое число равно 1) содержатся в прямом произведении трех векторных представлений?

2. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется в форме дифференцированного зачета. Диф.зачет проводится в письменной форме. Длительность зачета не превышает 2 астрономических часа.

Контрольные вопросы в 5-ом семестре:

1. Уравнение первого порядка. Задача Коши. Функция Грина, дельта-функция. Общие свойства решения уравнения с правой частью.
2. Уравнения порядка выше первого. Задача Коши. Функция Грина, ее нахождение при помощи преобразования Лапласа. Общие свойства решения уравнения с правой частью.
3. Матричное уравнение первого порядка. Задача Коши, функция Грина. Решение уравнения с помощью диагонализации матрицы. Особенности решения для матриц Жордана.
4. Одномерная граничная задача. Оператор Штурма-Лиувилля. Функция Грина, ее построение через левое и правое решения, Вронскиан. Периодические граничные условия.
5. Уравнения Лапласа, Гельмгольца и Дебая. Функции Грина в неограниченном пространстве. Общие свойства решений этих уравнений с правой частью. Задачи для ограниченной области.
6. Решение уравнения Шрёдингера в Кулоновском потенциале при помощи преобразования Лапласа. Аналитические свойства, связанные состояния.
7. Уравнения диффузии и уравнение Шрёдингера для свободной частицы. Функция Грина, ее вычисление при помощи преобразования Фурье. Общие свойства решений задачи Коши и уравнения с правой частью.
8. Уравнения волнового типа. Закон дисперсии. Уравнение на огибающую, групповая скорость и дисперсия.
9. Гамма-функция Эйлера. Основные соотношения, связь с Бета-функцией. Аналитические свойства Гамма-функции.
10. Функции Эйри как решения уравнения Эйри. Представление функций Эйри в виде контурного интеграла (метод Лапласа). Асимптотическое поведение функций Эйри (метод перевала и метод стационарной фазы, связь с представлением WKBJ).
11. Функции Бесселя. Производящий функционал. Уравнение для функций Бесселя. Рекуррентные соотношения. Аналитические свойства функций Бесселя. Асимптотическое поведение функций Бесселя. Разложение по функциям Бесселя.
12. Полиномы Лежандра. Производящая функция, дифференциальное уравнение. Рекуррентные соотношения. Интегральное представление. Асимптотическое поведение. Разложение по полиномам Лежандра.
13. Полиномы Эрмита. Производящая функция, дифференциальное уравнение. Рекуррентные соотношения. Интегральное представление. Асимптотическое поведение. Разложение по полиномам Эрмита.
14. Вырожденная гипергеометрическая функция. Дифференциальное уравнение, разложение в ряд, основные соотношения. Интегральное представление, асимптотическое поведение.
15. Квазилинейные дифференциальные уравнения. Метод характеристик. Уравнение Хопфа, общие свойства его решения. Уравнение Хопфа с правой частью.
16. Уравнение Бюргерса. Общие свойства решения уравнения Бюргерса, структура шока.
17. Преобразование Коула-Хопфа: решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Контрольные вопросы в 6-ом семестре:

1. Уравнение Кортевега-де-Фриза. Волновой предел. Солитонные решения.

2. Понятие о высших интегралах движения. Уравнение синус-Гордон. Волновой предел. Солитонные решения, кинки и антикинки.
3. Понятие о высших интегралах движения. Нелинейное уравнение Шрёдингера. Нётеровские интегралы движения. Коллапс, анализ Таланова.
4. Одномерное нелинейное уравнение Шрёдингера. Волновой предел. Солитонные решения.
5. Группы симметрии гамильтониана, их роль в формировании спектра, понятие о неприводимом представлении. Неприводимые представления конечных групп. Простые конечные подгруппы группы вращений.
6. Группы и алгебры Ли, формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа. Группа вращений трехмерного пространства, построение неприводимых представлений, разложение тензорного произведения представлений на неприводимые (сложение моментов).
7. Расщепление вырожденных уровней гамильтониана при понижении симметрии, симметричная классификация колебаний в молекулах и кристаллах.
8. Интегральные уравнения: вырожденные ядра и уравнения типа свертки. Задачи на собственные значения; теория возмущений и элементы теории Фредгольма.
9. Полубесконечный интервал интегрирования: метод Винера-Хопфа.
10. Дисперсионные соотношения; элементарные сингулярные уравнения.

Примеры экзаменационных билетов в 6-ом семестре:

Билет 1.

1. Уравнение Кортевега-де-Фриза. Волновой предел. Солитонные решения.
2. Задача 1.

Задача 1. Найти решение уравнения Бюргерса $\partial_t u + u \partial_x u = \partial_x^2 u$ с начальным условием

$$u = \frac{2a \sin x}{1 + a \cos x},$$

где a – константа, $a < 1$. Указание: воспользуйтесь преобразованием Коула-Хопфа.

3. Задача 2.

Задача 2. Для двумерного нелинейного уравнения Шрёдингера начальное условие имеет вид (a) $\psi = 1/\sqrt{1+r^2}$; (b) $\psi = 2 \exp(-r^2/2)$. Приведет ли оно к коллапсу?

4. Задача 3.

Задача 3. Для уравнения синус-Гордон найти энергию покоящегося кинка.

Билет 2.

1. Понятие о высших интегралах движения. Уравнение синус-Гордон. Волновой предел. Солитонные решения, кинки и антикинки.
2. Задача 1.

Задача 4. Дать одномерные, двумерное и трехмерное представления группы вращений снежинки и их характеры. Какие из них неприводимы?

3. Задача 2.

Задача 5. Вычислить $\partial \exp(i x_i \sigma_i) / \partial x_j$, где σ_i – матрицы Паули.

4. Задача 3.

Задача 6. Сколько векторных представлений группы вращений (для векторного представления угловое число равно 1) содержатся в прямом произведении трех векторных представлений?