

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Спектральные методы в теории графов
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.Б. Купавский, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 01.03.2024

Аннотация

Курс посвящен тому, какие свойства графа можно описать в терминах связанных с графом матриц: лапласиана и матрицы смежности. Курс будет содержать условно более алгебраические темы (в частности, экспандеры и их построение, sensitivity conjecture, решенная Хуангом, сильно регулярные графы, графы Кэли) и более аналитические (неравенства Чигера и квазислучайность, изображение планарных графов, разрезы и потоки). Часть курса будет посвящена алгоритмическим приложениям. Под конец курса мы обсудим неожиданную связь между алгоритмической задачей о максимальном потоке с несколькими источниками и стоками, минимальным разрезом и вопросами о приближениях произвольных метрических пространств с помощью метрики l_1 .

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Дать представление о том какую информацию содержит спектр матриц, связанных с графом. Разобраться в разнообразных применениях спектральной техники.

Задачи дисциплины

- изучение информации, которую содержит спектр матриц, связанных с графом;
- приобретение слушателями знаний в области спектральной техники.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений с научной аргументацией при анализе объекта научной профессиональной деятельности
	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации модели программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.3 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности
	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий; владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Имеет практический опыт использования существующих методов и алгоритмов решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- основные принципы какие свойства графа можно описать в терминах связанных с графом матриц: лапласиана и матрицы смежности;
- Графы Пэли, обобщенный гиперкуб и его спектр;
- оценки числа ребер между подмножествами графа.

уметь:

- решать задачу о графах минимального диаметра с заданной степенью;
- применять теорему Татта об изображении 3-связных планарных графов.

владеть:

- навыками решения задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Графы и матрицы (матрица смежности, Лапласиан)	4	2		8
2	Теорема Хоффмана об оценке числа независимости графа	4	2		8
3	Графы Пэли и Кэли	4	2		8
4	Оценки числа ребер между подмножествами графа.	4	2		8
5	Оценки Чигера, теорема Перрона-Фробениуса, Коши	4	2		8
6	Задача о графах минимального диаметра с заданной степенью	4	2		8
7	Экспандеры. Теорема Татта	4	2		6
8	Задача о максимальном потоке с несколькими источниками и стоками	2	1		6
Итого часов		30	15		60
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Графы и матрицы (матрица смежности, Лапласиан)

Спектр, теорема Куранта-Фишера, характеристика второго собственного значения через вадратичную форму.

2. Теорема Хоффмана об оценке числа независимости графа

Спектр графа Кнезера и вывод теоремы Эрдеша-Ко-Радо о максимальном размере пересекающегося семейства.

3. Графы Пэли и Кэли

Графы Пэли, обобщенный гиперкуб и его спектр. Графы Кэли.

4. Оценки числа ребер между подмножествами графа.

Еще один вывод теоремы Эрдеша-Ко-Радо. Вероятностный тест на простоту и генерация псевдослучайных чисел. Характеризация квазислучайности.

5. Оценки Чигера, теорема Перрона-Фробениуса, Коши

Оценки Чигера. Теорема Перрона-Фробениуса, Теорема Коши о собственных значениях, теорема Вильфа. Решение Хуангом гипотезы о чувствительности (sensitivity conjecture).

6. Задача о графах минимального диаметра с заданной степенью

Сильно регулярные графы. Построение контрпримера к гипотезе Борсука с помощью сильно регулярных графов.

7. Экспандеры. Теорема Татта

Конструкция экспандеров. Теорема Татта об изображении 3-связных планарных графов. Теорема о числе остовных деревьев в графе.

8. Задача о максимальном потоке с несколькими источниками и стоками

Двойственная задача, сведение к задаче о метриках на конечном множестве. Приближения конечных метрических пространств с помощью l_2 и l_1 -метрики. Связь между минимальным разрезом и задаче о потоке с несколькими источниками и стоками.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Элементы дискретной математики в задачах, Электронная версия печатной публикации / А. А. Глибичук, А. Б. Дайняк, Д. Г. Ильинский, А. Б. Купавский [и др.]. — Москва, МЦНМО, 2016
2. Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии / А. М. Райгородский. — Москва: МЦНМО, 2023.

Дополнительная литература

1. Хроматические числа [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2015 .— 44 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Учебная аудитория.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	<u>2</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен	
Разработчик:	А.Б. Купавский, д-р физ.-мат. наук, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений с научной аргументацией при анализе объекта научной профессиональной деятельности
	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации модели программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.3 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности
	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий; владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Имеет практический опыт использования существующих методов и алгоритмов решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Спектральные методы в теории графов» обучающийся должен:

знать:

- основные принципы какие свойства графа можно описать в терминах связанных с графом матриц: лапласиана и матрицы смежности;
- Графы Пэли, обобщенный гиперкуб и его спектр;
- оценки числа ребер между подмножествами графа.

уметь:

- решать задачу о графах минимального диаметра с заданной степенью;
- применять теорему Татта об изображении 3-связных планарных графов.

владеть:

- навыками решения задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Задачи по курсу

1. Найдите спектр цикла на n вершинах.
2. Пусть M - это матрица размера $d \times n$. Докажите, что мультимножества ненулевых собственных значений матриц MM^T и MTM совпадают.

3. Пусть G это d -регулярный граф на n вершинах, и пусть абсолютная величина всех собственных значений его матрицы смежности, кроме первого, не превосходит λ . Пусть $N(v)$ - это множество соседей вершины v , а для данного множества вершин B размера $|B| = b$ пусть $|N(v) \cap B| = NB(v)$. Докажите, что для любого множества вершин B имеем:

$$\sum_{v \in V} |NB(v) - bd| \leq \lambda^2 b(1 - b)n$$

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Графы и матрицы (матрица смежности, Лапласиан.
2. Теорема Хоффмана об оценке числа независимости графа.
3. Теорема Эрдеша-Ко-Радо о максимальном размере пересекающегося семейства.
4. Графы Пэли, обобщенный гиперкуб и его спектр.
5. Графы Кэли.
6. Теорема Перрона-Фробениуса.
7. Теорема Коши о собственных значениях.
8. Теорема Вильфа.
9. Характеризация и другие спектральные свойства реберных графов.
10. Характеризация графа с помощью его спектра

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Графы Кэли.
2. Найдите спектр цикла на n вершинах.

Билет №2

1. Экспандеры и их конструкция.
2. Теорема Татта об изображении 3-связных планарных графов.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.