

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

| | |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| | Рабочая программа дисциплины (модуля) |
| по дисциплине: | Избранные вопросы негладкой и невыпуклой оптимизации |
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики |
| курс: | 1 |
| квалификация: | магистр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Ф.С. Стонякин, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 01.03.2024

Аннотация

Курс призван углубить знания студентов магистратуры в области методов оптимизации в пространствах больших размерностей, применимых ко многим популярным в приложениях типам задач современного анализа данных. В обзорном порядке будут рассмотрены оптимальные методы и нижние границы сложности для задач гладкой и негладкой выпуклой оптимизации. Также будут описаны вариации методов градиентного типа и оценки сложности для возникших несколько лет назад в оптимизации классов так называемых относительно гладких и относительно непрерывных (липшицевых) оптимизационных задач, примеры прикладных задач таких классов. К такого типа проблемам можно относить, в частности, задачи D-оптимального плана эксперимента и бинарной классификации методом опорных векторов (SVM). Особый упор будет сделан на изложение наиболее известных подходов и теоретических результатов о методах для задач невыпуклой оптимизации. Намечено детальное рассмотрение теоретических результатов для задач с аналогами выпуклости (квазивыпуклость, слабая выпуклость), а также сильной выпуклости (условие градиентного доминирования, квадратичного роста и их аналоги) и соответствующие примеры прикладных задач. Также планируется изучить наиболее известные эвристические подходы (имитация отжига, генетические алгоритмы).

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Освоение теории сложности методов для задач негладкой и невыпуклой оптимизации (МО) в пространствах больших размерностей, а также особенностей их практической реализации с помощью языка программирования (Python).

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций и методов) в области МО;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области МО
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области МО

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики | ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики |
| | ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности |
| | ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области прикладной математики и информатики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности |
| ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, | ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания |
| | ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационно-коммуникационных технологии и информационных систем, задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы |

представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ

ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, численные алгоритмы непрерывной оптимизации (МО) и результаты об их сложности;
- современные проблемы соответствующих разделов МО;
- понятия, теоремы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла МО;
- основные численные алгоритмы МО с обоснованием оценок их скорости сходимости;
- основные свойства используемых в изучаемых методах математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач негладкой и невыпуклой оптимизации, возникающих в современном анализе данных.

уметь:

- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач оптимизации;
- оценивать корректность постановок задач оптимизации;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно подбирать наиболее приемлемые алгоритмы решения задач оптимизации, обосновывая выбор анализом возможных подходов;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- реализовывать ключевые изучаемые алгоритмы с помощью языка программирования (Python или C++);
- точно представить математические знания в области МО в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач МО (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов МО;
- предметным языком МО и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов;
- навыками анализа результатов практической реализации МО с помощью языка программирования (Python или C++).

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|---|---------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Введение. Задачи нелинейной оптимизации: нижние оценки и оптимальные алгоритмы. | 6 | | | 6 |

| | | | | | |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--|--|----|
| 2 | Адаптивные методы первого порядка для некоторых классов задач оптимизации. | 6 | | | 6 |
| 3 | Дополнительные главы негладкой оптимизации | 6 | | | 6 |
| 4 | Избранные классы задач невыпуклой оптимизации: теоретические оценки сложности | 6 | | | 6 |
| 5 | Стохастические и эвристические методы для задач невыпуклой оптимизации | 6 | | | 6 |
| Итого часов | | 30 | | | 30 |
| Подготовка к экзамену | | 30 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 90 час., 2 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Введение. Задачи нелинейной оптимизации: нижние оценки и оптимальные алгоритмы.

Примеры оптимизационных задач, возникающих в анализе данных: линейная и нелинейная регрессия и бинарная классификация. Нижние оценки аналитической сложности в пространствах больших размерностей (обзор): гладкие и негладкие задачи. Градиентный метод: невыпуклые, выпуклые и сильно выпуклые задачи. Ускоренные методы для задач выпуклой и сильно выпуклой гладкой оптимизации. Метод тяжёлого шарика, быстрый градиентный метод. Техника рестартов. Оптимальные ускоренные методы гладкой выпуклой минимизации. Субградиентные методы для задач негладкой оптимизации (обзор).

2. Адаптивные методы первого порядка для некоторых классов задач оптимизации.

Адаптивный неускоренный градиентный метод: выпуклый и невыпуклый случай. Адаптивный метод подобных треугольников. Оценки скорости сходимости (обзор) Относительная гладкость и относительная сильная выпуклость. Примеры прикладных задач: матричные уравнения, D-оптимальный план эксперимента. Адаптивный градиентный метод для относительно гладких оптимизационных задач. Задачи централизованной оптимизации в предположении схожести слагаемых: подход с использованием относительной гладкости и сильной выпуклости.

3. Дополнительные главы негладкой оптимизации

Оптимальные оценки сложности для задач негладкой оптимизации: умеренная и большая размерность. Методы секущей гиперплоскости. Универсальные градиентные методы. Адаптивные субградиентные методы для задач выпуклого программирования общего вида. Прямо-двойственность субградиентного метода. Острый минимум и субградиентные методы со скоростью сходимости геометрической прогрессии. Шаг Б.Т. Поляка в субградиентном методе и его приложения к задачам регрессии, а также при отыскании общей точки системы множеств. Относительная непрерывность (липшицевость) в оптимизации. Примеры: геометрические задачи, а также задача бинарной классификации методом опорных векторов. Субградиентные методы для относительно липшицевых задач.

4. Избранные классы задач невыпуклой оптимизации: теоретические оценки сложности

Локальные и глобальные минимумы. Градиентный метод для гладких невыпуклых задач, оценка скорости сходимости с использованием нормы градиента. Проблема нахождения глобального минимума. Обобщения выпуклости, допускающие хорошие глобальные оценки скорости сходимости: квазивыпуклость, слабая выпуклость. Примеры квазивыпуклых и слабо выпуклых задач анализа данных. Субградиентные методы для квазивыпуклых задач (подход Ю.Е. Нестерова), оценки скорости сходимости. Субградиентные методы для слабо выпуклых задач с острым минимумом, теоретический результат о линейной скорости сходимости. Релаксации сильной выпуклости: условия градиентного доминирования и квадратичного роста, теоретический результат о линейной скорости сходимости. Пример: нелинейные системы. Задачи геометрического программирования.

5. Стохастические и эвристические методы для задач невыпуклой оптимизации

Стохастические методы для задач невыпуклой оптимизации. Эвристические алгоритмы невыпуклой оптимизации: метод имитации отжига и генетические алгоритмы.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

Дополнительная литература

1. Введение в выпуклую оптимизацию [Текст], [монография]/Ю. Е. Нестеров, -М., МЦНМО, 2010
2. Глубокое обучение / Я. Гудфеллоу, И. Бенджио, А. Курвилль. — Москва, ДМК Пресс, 2018.— URL: <https://e.lanbook.com/book/107901> (дата обращения: 29.01.2021). - Полный текст (Режим доступа : из сети МФТИ / Удаленный доступ)

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru> -М. Danilova at all. Recent Theoretical Advances in Non-Convex Optimization.
// <https://arxiv.org/pdf/2012.06188.pdf> - Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска / А. В. Гасников. — М. : МЦНМО, 2021. — 272 с.
<https://arxiv.org/pdf/1712.07897.pdf> - Non-convex Optimization for Machine Learning/ Prateek Jain and Purushottam Kar.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

учебная аудитория, экран и проектор.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

| | |
|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики |
| курс: | <u>1</u> |
| квалификация: | магистр |
| Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен | |
| Разработчик: | Ф.С. Стонякин, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор |

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики | ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики |
| | ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности |
| | ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области прикладной математики и информатики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности |
| ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ | ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания |
| | ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационно-коммуникационных технологий и информационных систем, задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы |
| | ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий |

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Избранные вопросы негладкой и невыпуклой оптимизации» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия, численные алгоритмы непрерывной оптимизации (МО) и результаты об их сложности;
- современные проблемы соответствующих разделов МО;
- понятия, теоремы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла МО;
- основные численные алгоритмы МО с обоснованием оценок их скорости сходимости;
- основные свойства используемых в изучаемых методах математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач негладкой и невыпуклой оптимизации, возникающих в современном анализе данных.

уметь:

- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач оптимизации;
- оценивать корректность постановок задач оптимизации;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно подбирать наиболее приемлемые алгоритмы решения задач оптимизации, обосновывая выбор анализом возможных подходов;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- реализовывать ключевые изучаемые алгоритмы с помощью языка программирования (Python или C++);
- точно представить математические знания в области МО в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач МО (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов МО;
- предметным языком МО и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов;
- навыками анализа результатов практической реализации МО с помощью языка программирования (Python или C++).

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры заданий

1. Покажите, как вводится квадратичная интерполяция с искусственной неточностью для негладких задач.
2. Сделайте реферат по методам для задач централизованной и децентрализованной распределённой оптимизации.
3. Предложите норму и прокс-функцию для задачи оптимизации на прямом произведении симплексов.

Контроль и оценки

Оценка за семестр складывается из:

1. Самостоятельная работа студентов - проект. Программирование на Python или C++ с целью сравнения эффективности изучаемых методов оптимизации.
2. Теоретическая контрольная работа в мае. В вопросах контрольной могут присутствовать задания написать формулировки определений или теорем, а также задачи теоретического характера.

Более точные баллы за указанные пункты и формула для получения оценки будут объявлены в конце семестра.

Примерные темы для проектов (самостоятельная работа студентов):

1. Ускоренные методы для задач невыпуклой оптимизации.
2. Методы первого порядка для квазивыпуклых задач большой размерности.
3. Метод зеркального спуска: невыпуклый, выпуклый и сильно выпуклый случай.
4. Градиентные методы для относительно гладких и относительно сильно выпуклых задач.
5. Методы первого порядка для задач композитной оптимизации.
7. Ускоренные стохастические градиентные методы в невыпуклом случае.
8. Методы распределённой оптимизации.
9. Методы для вариационных неравенств.
10. Эвристические методы для задач невыпуклой оптимизации.
11. Ускоренные стохастические градиентные методы.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Выпуклая и невыпуклая оптимизация. Примеры прикладных задач невыпуклой оптимизации.
2. Локальные и глобальные минимумы. Градиентный метод для гладких невыпуклых задач, оценка скорости сходимости с использованием нормы градиента.

3. Градиентный метод: невыпуклые, выпуклые и сильно выпуклые задачи. Ускоренные методы для задач выпуклой и сильно выпуклой гладкой оптимизации: метод тяжёлого шарика, быстрый градиентный метод.
4. Относительная гладкость и относительная сильная выпуклость. Примеры прикладных задач: матричные уравнения, D-оптимальный план эксперимента.
5. Адаптивный градиентный метод для относительно гладких оптимизационных задач.
6. Задачи централизованной оптимизации в предположении схожести слагаемых: подход с использованием относительной гладкости и сильной выпуклости.
7. Субградиентные методы для негладких задач. Нижние оценки сложности. Метод зеркального спуска.
8. Шаг Б.Т. Поляка в субградиентном методе и его приложения в задачах регрессии, а также при отыскании общей точки системы множеств.
9. Относительная непрерывность (липшицевость) в оптимизации. Примеры: геометрические задачи, а также задача бинарной классификации методом опорных векторов. Субградиентные методы для относительно липшицевых задач.
10. Обобщения выпуклости, допускающие хорошие глобальные оценки скорости сходимости: квазивыпуклость, слабая выпуклость. Примеры квазивыпуклых и слабо выпуклых задач анализа данных.
11. Субградиентные методы для квазивыпуклых задач (подход Ю.Е. Нестерова), оценки скорости сходимости.
12. Субградиентные методы для слабо выпуклых задач с острым минимумом, теоретический результат о линейной скорости сходимости.
13. Релаксации сильной выпуклости: условия градиентного доминирования и квадратичного роста, теоретический результат о линейной скорости сходимости. Пример: нелинейные системы.
14. Задачи геометрического программирования.
15. Эвристические алгоритмы невыпуклой оптимизации: метод имитации отжига и генетические алгоритмы.

Примеры билетов:

Билет 1:

1. Градиентный метод: невыпуклые, выпуклые и сильно выпуклые задачи. Ускоренные методы для задач выпуклой и сильно выпуклой гладкой оптимизации: метод тяжёлого шарика, быстрый градиентный метод.
2. Задачи геометрического программирования.

Билет 2:

1. Обобщения выпуклости, допускающие хорошие глобальные оценки скорости сходимости: квазивыпуклость, слабая выпуклость. Примеры квазивыпуклых и слабо выпуклых задач анализа данных.
2. Задачи централизованной оптимизации в предположении схожести слагаемых: подход с использованием относительной гладкости и сильной выпуклости.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений

- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать одного астрономического часа.