

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики  
А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Некоммутативная алгебра
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 45 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: О.Г. Стырт, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2022

## Аннотация

Курс посвящён исследованию ассоциативных колец с единицей и модулей над ними. Именно, будут введены понятия радикала Джекобсона, простоты и полупростоты колец, дана классификация полупростых артиновых колец. Также планируется изучить класс центральных (т.е. со скалярным центром) простых алгебр и определить на них любопытную структуру группы, называемой группой Брауэра. От слушателей предполагается базовое знакомство с алгебраическими понятиями колец и модулей; при необходимости краткое напоминание будет дано в начале курса.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Цель: познакомить слушателей с основными аспектами некоммутативной алгебры, связанными с ассоциативными кольцами и модулями над ними, а также с понятиями центральной простой алгебры и группы Брауэра.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области некоммутативной алгебры;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области некоммутативной алгебры;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области некоммутативной алгебры.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии математических исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

теорию ассоциативных колец, понятия радикала Джекобсона, простоты и полупростоты кольца, центральной простой алгебры, группы Брауэра.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов в области некоммутативной алгебры;

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Ассоциативные кольца, модули над ними		9		9
2	Радикал Джекобсона кольца		9		9
3	Радикал Джекобсона модуля		9		9
4	Матричные кольца над телами		9		9
5	Классификация полупростых артиновых колец		9		9
Итого часов			45		45
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

###### Семестр: 2 (Весенний)

###### 1. Ассоциативные кольца, модули над ними

(Напоминание.) Ассоциативные кольца, модули над ними. Гомоморфизмы модулей, свойства. Простые и полупростые модули.

###### 2. Радикал Джекобсона кольца

Радикал Джекобсона кольца: эквивалентность симметричных определений, критерий принадлежности элемента.

###### 3. Радикал Джекобсона модуля

Радикал Джекобсона модуля: поведение при гомоморфизмах. Полупростые модули: определение в терминах радикала. Эквивалентность определений полупростоты для артиновых модулей.

###### 4. Матричные кольца над телами

Матричные кольца над телами: описание (односторонних) идеалов, простота.

## 5. Классификация полупростых артиновых колец

Центральные простые алгебры над полями, замкнутость относительно тензорного произведения. Группа Брауэра, простейшие примеры нахождения.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Алгебра [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / С. Ленг ; пер. с англ. Е. С. Голда ; под ред. А. И. Кострикина .— М. : Мир, 1968 .— 564 с.

### Дополнительная литература

1. Сборник задач по алгебре [Текст] : [учебник для вузов] / под ред. А. И. Кострикина .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2001 .— 464 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Рекомендуется успешно сдавать тесты, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** О.Г. Стырт, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии математических исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Некоммутативная алгебра» обучающийся должен:

### знать:

теорию ассоциативных колец, понятия радикала Джекобсона, простоты и полупростоты кольца, центральной простой алгебры, группы Брауэра.

### уметь:

понять поставленную задачу;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

### владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов в области некоммутативной алгебры;

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Пример теста:

- Какие из нижеперечисленных множеств со стандартными операциями не является кольцом
  - Натуральные числа
  - Целые числа
  - Рациональные числа
  - вещественные числа
- Какие из нижеперечисленных отображений являются гомоморфизмами кольца целых чисел
  - $f(x) = 2x$
  - $f(x) = -x$
  - $f(x) = -x + 1$

- d.  $f(x) = 0$
3. Какие из нижеперечисленных множеств не являются идеалами кольца многочленов над вещественными числами
- $\{x * p \mid p \in R[x]\}$
  - $\{p \mid p \in R[x] \text{ и свободный коэффициент } p \text{ равен } 2\}$
  - $\{p + 1 \mid p \in R[x]\}$
4. Из скольких элементов состоит фактор кольцо  $Z$  по  $(p)$
- $p$
  - $p - 1$
  - $2p$
5. Обратим ли нильпотентный элемент
- да
  - нет
6. Пересечение всех простых идеалов содержащих идеал совпадает с
- $p$
  - радикалом  $p$
  - $p^2$
7. Идеал  $I$  прост тогда и только тогда, когда
- дополнение  $I$  образует мультипликативную систему
  - дополнение  $I$  не образует мультипликативную систему
8. Модуль является обобщением понятия
- векторного пространства
  - кольца
  - поля
9. Гомоморфный образ Модуля изоморфен факторкольцу по
- ядру гомоморфизма
  - образу гомоморфизма
10. Что из перечисленного не является Модулем над  $Z$
- любой идеал  $Z$
  - $Z^2$
  - $N$
11. Алгебра - это кольцо которое модуль над собой
- да
  - нет
12. Кольцо  $R$  - кольцо дискретного нормирования если и только если  $R$  локальная область идеалов не являющаяся полем
- да
  - нет
13. Кольцо  $R$  - кольцо дискретного нормирования если и только если  $R$  локальное Дедекиндово кольцо не являющаяся полем
- да
  - нет
14. Кольцо  $R$  - кольцо дискретного нормирования если и только если  $R$

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

- Кольца и гомоморфизмы колец.
- Идеалы.
- Факторкольца.
- Делители нуля. Нильпотенты. Единицы.
- Простые идеалы и максимальные идеалы.
- Нильрадикал и радикал Джекобсона.
- Операции над идеалами. Расширение и сужение.
- Модули и гомоморфизмы модулей.

9. Подмодули и фактор-модули.
10. Операции над подмодулями.
11. Прямая сумма и прямое произведение.
12. Конечно порожденные модули.
13. Точные последовательности.
14. Тензорное произведение модулей.
15. Ограничение и расширение скаляров.
16. Свойства точности тензорного произведения.
17. Алгебры. Тензорное произведение алгебр.
18. Локальные свойства.
19. Расширение и сужение идеалов в кольцах частных
20. Целая зависимость.
21. Теорема о подъеме.
22. Целозамкнутые области целостности.
23. Теорема о спуске.
24. Кольца нормирования
25. Примарное разложение в нётеровых кольцах
26. Дискретно нормированные кольца.
27. Дедекиндовы области.
28. Дробные идеалы
29. Топологии и пополнения.
30. Фильтрации.
31. Градуированные кольца и модули.
32. Ассоциированное градуированное кольцо
33. Функция Гильберта.
34. Теория размерности нётеровых локальных колец.
35. Регулярные локальные кольца.
36. Трансцендентная размерность

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;



- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.