

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Проректор по учебной работе и
довузовской подготовке**

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Проекционно-сеточные методы решения уравнений математической физики
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительной физики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Ю.И. Скалько, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры вычислительной физики 04.06.2020

Аннотация

В рамках курса изучаются проекционные методы, требования к выбору базисных функций, аппроксимация и финитные функции, рассматриваются примеры построения и исследования проекционно-сеточных алгоритмов. Целью дисциплины является формирование у студентов знаний и навыков построения проекционно-сеточных алгоритмов численного решения уравнений математической физики (ПСАРУМФ). К задачам дисциплины относятся освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов) в области построения ПСАРУМФ и исследования свойств этих алгоритмов, приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области ПСАРУМФ, оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области вычислительной математики. По окончании курса студент будет знать фундаментальные понятия, законы, теории вычислительной математики (ПСАРУМФ), современные проблемы соответствующих разделов вычислительной математики (ПСАРУМФ); понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла ПСАРУМФ, основные свойства соответствующих математических объектов, аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач вычислительной математики (ПСАРУМФ). Он будет уметь понять поставленную задачу, использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ПСАРУМФ, оценивать корректность постановок задач, строго доказывать или опровергать утверждение, самостоятельно находить алгоритмы решения задач ПСАРУМФ, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ, самостоятельно видеть следствия полученных результатов, точно представить математические знания в области ПСАРУМФ в устной и письменной форме. Также слушатель будет владеть навыками освоения большого объема информации и решения задач ПСАРУМФ (в том числе, сложных), навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин, культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ПСАРУМФ, предметным языком вычислительной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

формирование у студентов знаний и навыков построения проекционно-сеточных алгоритмов численного решения уравнений математической физики (ПСАРУМФ).

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов) в области построения ПСАРУМФ и исследования свойств этих алгоритмов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области ПСАРУМФ;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области вычислительной математики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области прикладной математики и информатики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ПК-3 Владеет навыками участия в научных	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания

дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационно-коммуникационных технологий и информационных систем, задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории вычислительной математики (ПСАРУМФ);
- современные проблемы соответствующих разделов вычислительной математики (ПСАРУМФ);
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла ПСАРУМФ;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач вычислительной математики (ПСАРУМФ).

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ПСАРУМФ;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач ПСАРУМФ, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области ПСАРУМФ в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач ПСАРУМФ (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ПСАРУМФ;
- предметным языком вычислительной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Общая схема приближенных методов	4			8
2	Проекционные методы	6			8
3	Требования к выбору базисных функций	4			7
4	Аппроксимация и финитные функции	8			2
5	Примеры построения и исследования проекционно-сеточных алгоритмов	8			5

Итого часов	30			30
Подготовка к экзамену	30 час.			
Общая трудоёмкость	90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Общая схема приближенных методов

Близкие уравнения, сходимость, мера аппроксимации. Теорема о сходимости каркасов приближенных решений. Теорема о сходимости приближенных решений. Устойчивость. Теорема об устойчивости процесса отыскания каркасов приближенных решений. Теорема об устойчивости процесса построения приближенных решений.

2. Проекционные методы

Общая схема проекционных методов в линейных нормированных пространствах. Метод моментов. Метод Галеркина.

Вариационные алгоритмы. Проекционные алгоритмы. Общая схема проекционных алгоритмов в гильбертовом пространстве.

Метод Ритца (классический). Теорема о сходимости классического метода Ритца. Метод Ритца в энергетических пространствах. Теорема о сходимости метода Ритца в энергетических пространствах. Естественные и главные краевые условия. Признаки различия естественных и главных краевых условий.

Метод Бубнова--Галеркина. L-полная система координатных функций. Проектор, ортопроектор. Оператор ортогонального проектирования в конечномерном пространстве. Теорема о сходимости метода Бубнова –Галеркина.

Полудискретный метод Галеркина. Метод наименьших квадратов.

Лемма об однозначной разрешимости системы метода наименьших квадратов.

Теорема о сходимости метода наименьших квадратов. Связь между методом наименьших квадратов и методом Ритца.

Метод коллокаций.

3. Требования к выбору базисных функций

Плотность. Удовлетворение краевым условиям. Минимизация ошибки аппроксимации. Устойчивость. Численная устойчивость. Условие равномерной линейной независимости базиса. Сильная минимальность базиса.

4. Аппроксимация и финитные функции

Простейшие кусочно-постоянные финитные функции. Теорема об аппроксимации.

Нормировка и условие равномерной линейной независимости.

Кусочно-линейные базисные функции в одномерном случае. Аппроксимация. Равномерная линейная независимость.

Кусочно-линейная аппроксимация на прямоугольнике. Функция Куранта. Теорема об аппроксимации. Нормировка и условие равномерной линейной независимости.

Билинейные базисные функции. Теорема об аппроксимации. Равномерная линейная независимость.

Кусочно-линейная аппроксимация на многоугольной области.

Кусочно-квадратичные базисные функции на треугольной сетке.

Кусочно-полиномиальная аппроксимация.

Построение базисов в случае области с криволинейной границей. Случай естественных краевых условий. Случай главных краевых условий.

5. Примеры построения и исследования проекционно-сеточных алгоритмов

Уравнение нестационарной теплопередачи. Полудискретный метод Галеркина. Схема Крэнка-Никольсона. Устойчивость по спектральному признаку фон Неймана.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и экраном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вариационные методы. Приложения к нелинейным уравнениям в частных производных и гамильтоновым системам [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / М. Струве ; пер. с англ. Ю. Ю. Кочеткова ; под ред. С. И. Похожаева. — М. : МЦНМО, 2010. — 320 с.
2. Лекции по вычислительной математике [Текст] / И. Б. Петров, А. И. Лобанов - М.БИНОМ. Лаб. знаний ; Интернет-Университет Информационных Технологий, 2017

Дополнительная литература

1. Введение в проекционно сеточные методы [Текст] / Г. И. Марчук, В. И. Агошков - М.Наука, 1981
2. Лекции по методам вычислений [Текст] / М. К. Гавурин - М.Наука, 1971
3. Численные методы на основе метода Галеркина [Текст], [монография]/К. Флетчер, -М., Мир, 1988

Фонд литературы базовой кафедры

1. Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения.- 2-е изд., перераб и доп.- СПб.: БХВ – Петербург. 2006.- 288 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

www.mou.mipt.ru

http://mipt.ru/education/chair/computational_mathematics/index.php

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс "Проекционно-сеточные методы решения уравнений математической физики", должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента.

В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

– чтение и конспектирование рекомендованной литературы;

– проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;

– решение задач, предлагаемых студентам на занятиях и в качестве курсового задания;

– подготовку к занятиям.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения. Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания.

При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительной физики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен	
Разработчик:	Ю.И. Скалько, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области прикладной математики и информатики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационно-коммуникационных технологий и информационных систем, задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Проекционно-сеточные методы решения уравнений математической физики» обучающийся должен:

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории вычислительной математики (ПСАРУМФ);
 современные проблемы соответствующих разделов вычислительной математики (ПСАРУМФ);
 понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла ПСАРУМФ;
 основные свойства соответствующих математических объектов;
 аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач вычислительной математики (ПСАРУМФ).

уметь:

понять поставленную задачу;
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ПСАРУМФ;
 оценивать корректность постановок задач;
 строго доказывать или опровергать утверждение;
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач ПСАРУМФ, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
 точно представить математические знания в области ПСАРУМФ в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ПСАРУМФ (в том числе, сложных);
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ПСАРУМФ;
 предметным языком вычислительной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Сформулировать и пояснить общую схему построения алгоритмов приближенного решения уравнений математической физики.
2. Близкие уравнения, теорема о норме разности решений близких уравнений.
3. Мера аппроксимации уравнения.
4. Понятие каркаса приближенного решения. Теорема о сходимости приближенных решений.
5. Сходимость приближенных решений. Теорема о сходимости приближенных решений.
6. Устойчивость процесса отыскания каркасов приближенных решений. Теорема об устойчивости процесса отыскания каркасов приближенных решений.
7. Устойчивость построения приближенных решений. Теорема об устойчивости процесса построения приближенных решений
8. Сущность проекционных методов в линейных нормированных пространствах.
9. Метод моментов, как проекционный алгоритм.
10. Метод Галеркина, как проекционный алгоритм.
11. Общая схема проекционных алгоритмов в гильбертовом пространстве.
12. Связь между вариационными алгоритмами и проекционными алгоритмами
13. Метод Ритца (классический), как проекционный алгоритм.
14. Теорема о сходимости классического метода Ритца.
16. Энергетическое пространство. Метод Ритца в энергетических пространствах.
17. Теорема о сходимости метода Ритца в энергетических пространствах.
18. Естественные и главные краевые условия. Признаки различия естественных и главных краевых условий.
19. Метод Бубнова--Галеркина, как проекционный алгоритм.
20. L-полная система координатных функций. Проектор, ортопроектор. Оператор ортогонального проектирования в конечномерном пространстве.
21. Теорема о сходимости метода Бубнова –Галеркина.
22. Полудискретный метод Галеркина.
23. Метод наименьших квадратов, как проекционный алгоритм.
24. Лемма об однозначной разрешимости системы метода наименьших квадратов.
25. Теорема о сходимости метода наименьших квадратов.
26. Связь между методом наименьших квадратов и методом Ритца.
27. Метод коллокаций, как проекционный алгоритм.
28. Требования к выбору базисных функций.
29. Плотность базисных функций.
30. Способы удовлетворение краевым условиям.
31. Минимизация ошибки аппроксимации.
32. Устойчивость проекционных алгоритмов.
33. Численная устойчивость. Равномерной линейной независимости базиса, сильная минимальность базиса и их связь с численной устойчивостью.
34. Аппроксимация и финитные функции.
35. Простейшие кусочно-постоянные финитные функции. Теорема об аппроксимации. Нормировка и условие равномерной линейной независимости.
36. Кусочно-линейные базисные функции в одномерном случае. Аппроксимация. Равномерная линейная независимость.
37. Кусочно-линейная аппроксимация на прямоугольнике. Функция Куранта. Теорема об аппроксимации. Нормировка и условие равномерной линейной независимости.
38. Билинейные базисные функции. Теорема об аппроксимации. Равномерная линейная независимость.
39. Кусочно-линейная аппроксимация на многоугольной области.

40. Кусочно-квадратичные базисные функции на треугольной сетке.
41. Кусочно-полиномиальная аппроксимация.
42. Построение базисов в случае области с криволинейной границей. Случай естественных краевых условий.
43. Построение базисов в случае области с криволинейной границей. Случай главных краевых условий.
44. Уравнение нестационарной теплопередачи. Полудискретный метод Галеркина. Исследование устойчивости.

Критерии оценивания

Оценка «отлично (8-10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка «хорошо (5-7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка «удовлетворительно (3-4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка «неудовлетворительно (1-2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения оценивания (в форме экзамена) обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, вычислительной техникой и др.

Аттестация (экзамен) по результатам работы может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, или путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.

Перечень типовых контрольных вопросов по дисциплине
Проекционно-сеточные алгоритмы решения
уравнений математической физики

1. Сформулировать и пояснить общую схему построения алгоритмов приближенного решения уравнений математической физики.
2. Близкие уравнения, теорема о норме разности решений близких уравнений.
3. Мера аппроксимации уравнения.
4. Понятие каркаса приближенного решения. Теорема о сходимости приближенных решений.
5. Сходимость приближенных решений. Теорема о сходимости приближенных решений.
6. Устойчивость процесса отыскания каркасов приближенных решений. Теорема об устойчивости процесса отыскания каркасов приближенных решений.
7. Устойчивость построения приближенных решений. Теорема об устойчивости процесса построения приближенных решений
8. Сущность проекционных методов в линейных нормированных пространствах.
9. Метод моментов, как проекционный алгоритм.
10. Метод Галеркина, как проекционный алгоритм.

11. Общая схема проекционных алгоритмов в гильбертовом пространстве.
12. Связь между вариационными алгоритмами и проекционными алгоритмами
13. Метод Ритца (классический), как проекционный алгоритм.
14. Теорема о сходимости классического метода Ритца.
16. Энергетическое пространство. Метод Ритца в энергетических пространствах.
17. Теорема о сходимости метода Ритца в энергетических пространствах.
18. Естественные и главные краевые условия. Признаки различия естественных и главных краевых условий.
19. Метод Бубнова-Галеркина, как проекционный алгоритм.
20. L-полная система координатных функций. Проектор, ортопроектор. Оператор ортогонального проектирования в конечномерном пространстве.
21. Теорема о сходимости метода Бубнова –Галеркина.
22. Полудискретный метод Галеркина.
23. Метод наименьших квадратов, как проекционный алгоритм.
24. Лемма об однозначной разрешимости системы метода наименьших квадратов.
25. Теорема о сходимости метода наименьших квадратов.
26. Связь между методом наименьших квадратов и методом Ритца.
27. Метод коллокаций, как проекционный алгоритм.
28. Требования к выбору базисных функций.
29. Плотность базисных функций.
30. Способы удовлетворения краевым условиям.
31. Минимизация ошибки аппроксимации.
32. Устойчивость проекционных алгоритмов.
33. Численная устойчивость. Равномерной линейной независимости базиса, сильная минимальность базиса и их связь с численной устойчивостью.
34. Аппроксимация и финитные функции.
35. Простейшие кусочно-постоянные финитные функции. Теорема об аппроксимации. Нормировка и условие равномерной линейной независимости.
36. Кусочно-линейные базисные функции в одномерном случае. Аппроксимация. Равномерная линейная независимость.
37. Кусочно-линейная аппроксимация на прямоугольнике. Функция Куранта. Теорема об аппроксимации. Нормировка и условие равномерной линейной независимости.
38. Билинейные базисные функции. Теорема об аппроксимации. Равномерная линейная независимость.
39. Кусочно-линейная аппроксимация на многоугольной области.
40. Кусочно-квадратичные базисные функции на треугольной сетке.

41. Кусочно-полиномиальная аппроксимация.

42. Построение базисов в случае области с криволинейной границей. Случай естественных краевых условий.

43. Построение базисов в случае области с криволинейной границей. Случай главных краевых условий.

44. Уравнение нестационарной теплопередачи. Полудискретный метод Галеркина. Исследование устойчивости.