

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Дифференциальная геометрия, однородные пространства и их применения
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Д.В. Алексеевский, д-р физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 03.04.2024

## Аннотация

Имеется два подхода к определению объекта геометрии: полевой подход Б. Римана, который приводит к определению риманова пространства и его различным обобщениям, и групповой подход Ф. Клейна, состоящий, грубо говоря, в том, что геометрия изучает однородные пространства.

Курс посвящен изложению базисных понятий и результатов римановой геометрии и ее обобщений, и геометрии однородных пространств. Долгое время эти теории применялись, в основном, в естественных науках – физике и механике.

В последние десятилетия они стали широко использоваться в науках о жизни, таких как медицина и биология, в частности, в нейронауках (нейрогеометрия), в анализе изображений (image processing), в статистике (геометрическая статистика на многообразиях и однородных пространствах), в информационной геометрии Ченцова-Амари, в компьютерных науках (компьютерное зрение, распознавание образов, машинное обучение, особенно, CNN (Convolution Neural Network)), в теории оптимизации на многообразиях, в технике (роботы, томография), в теории шейпов и т. д. Все эти дисциплины включаются в создаваемую на наших глазах новую науку, которая называется информационной геометрией в широком смысле, геометрической наукой информации или, по предложению Ю.И. Манина, геометрией информации.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Освоение студентами базисных понятий и результатов дифференциальной геометрии и теории однородных пространств, что позволит студентам в дальнейшем работать в различных областях прикладной математики, использующих дифференциальную геометрию, группы Ли, однородные пространства.

### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых теоретических знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области применения дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления;
- приобретение практических умений и навыков в применении дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления;
- оказание консультативной помощи студентам в проведении ими собственных теоретических исследований в области применения дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления;

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен комбинировать и адаптировать существующие информационно-коммуникационные технологии для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-4.1 Умеет применять информационно-коммуникационные технологии для поиска и анализа профессиональной информации, выделения в ней главного, структурирования, оформления и представления в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями
	ОПК-4.2 Умеет применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен адаптировать зарубежные комплексы обработки информации и автоматизированного проектирования к нуждам отечественных предприятий

ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Имеет практически опыт использования существующих методов и алгоритмов решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками
	ПК-2.3 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия применения дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления;
- современные проблемы применения дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть дифференциальной геометрии и теории однородных пространств.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач применения дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач дифференциальной геометрии;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач применения дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов применения дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления;
- навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост.

		лекции	семинары	лаборат. работы	работа
1	Введение. Что такое дифференциальная геометрия и зачем она нужна.	4			4
2	Тензорная алгебра.	3			3
3	Многообразие как топологическое пространство, снабженное атласом карт.	3			3
4	Римановы многообразия.	4			4
5	Вещественные и комплексные группы Ли.	2			2
6	Алгебра кватернионов.	2			2
7	Однородное пространство группы Ли $G$ как фактор-пространство $M = G/H$ .	2			2
8	Римановы симметрические пространства и симметрические разложения полупростых алгебр Ли.	2			2
9	Однородные выпуклые конусы и ниль-алгебры Винберга.	4			4
10	Однородный выпуклый конус как многообразие вероятностных мер.	4			4
Итого часов		30			30
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

##### Семестр: 1 (Осенний)

#### 1. Введение. Что такое дифференциальная геометрия и зачем она нужна.

##### 1.1. Простое многообразие как множество с картой.

Согласованные карты.

Гладкие функции и гладкие кривые.

Гладкие отображения многообразий.

Касательные векторы и касательное пространство.

Базис касательного пространства.

##### 1.2. Касательное расслоение и риманова метрика как поле евклидовых метрик.

Риманова геометрия, ее применения и обобщения.

##### 1.3. Группы Ли как многообразие со структурой группы с гладкими групповыми операциями.

Примеры групп Ли: векторная группа, полная матричная группа  $GL(n)$  и ее замкнутые подгруппы.

##### 1.4. Действие группы Ли $G$ на многообразии, транзитивное действие стационарная подгруппа и орбита.

Однородное пространство.

Примеры: сфера, проективное пространство, аффинное пространство, евклидово пространство, грассманово многообразие, конус положительно определенных матриц.

##### 1.5. Два подхода к геометрии.

1.5.1. Подход Римана: геометрия изучает многообразия, снабженные геометрической структурой – например, римановой метрикой.

Другие примеры геометрических структур: векторное поле, симплектическая структура и  $k$ -мерное распределение – поле  $k$ -мерных подпространств (система Пфаффа).

1.5.2. Подход Кляйна: объектом геометрии являются  $G$ -многообразия (многообразия вместе с действием группы Ли  $G$ ).

Геометрия изучает инварианты этого действия.

Унификация этих подходов (Э. Картан).

## 2. Тензорная алгебра.

Сопряженное пространство.

Алгебра ковариантных и контравариантных тензоров.

Симметрическая и внешняя алгебра.

Алгебра Клиффорда, классификация клиффордовых алгебр и клиффордовых модулей

## 3. Многообразие как топологическое пространство, снабженное атласом карт.

Примеры многообразий, гиперповерхности евклидова пространства как многообразия. Касательное и кокасательное пространства.

Векторные поля и дифференциальные 1-формы.

Поток векторного поля.

Тензорные поля.

Представление группы диффеоморфизмов в пространстве тензорных полей и производная Ли.

Дифференциальные формы и внешний дифференциал.

Когомологии.

## 4. Римановы многообразия.

Связность Леви-Чивита и параллельный перенос.

Линейные связности, кривизна и кручение.

Группа голономии и разложение де Рама.

Классификация неприводимых групп голономии риманова пространства.

Геодезические и их свойства.

Пример. Гиперповерхности евклидова пространства. Псевдоримановы многообразия.

Пространства постоянной кривизны и их геодезические. Геометрия Лобачевского.

## 5. Вещественные и комплексные группы Ли.

Примеры групп Ли.

Полупростые и разрешимые группы Ли.

Действие группы Ли на многообразии.

Стационарные подгруппы, орбиты и представление изотропии.

Три действия группы Ли  $G$  на многообразии  $G$ .

Три канонических связности на группе Ли.

Алгебра Ли группы Ли.

Случай линейной группы.

Экспоненциальное отображение.

Восстановление связной линейной группы Ли по ее алгебре Ли.

Теорема Адо и соответствие между группами Ли и алгебрами Ли.

## 6. Алгебра кватернионов.

3-сфера как группа единичных кватернионов.

Расслоение Хопфа и его применение к описанию конфигурационного пространства глаза, законы Дондерса и Листинга.

Геометрия саккад.

Фиксационные движения глаз как случайное блуждание на сфере.

## 7. Однородное пространство группы Ли $G$ как фактор-пространство $M = G/H$ .

Инфинитезимальное описание однородного пространства и инвариантных тензорных полей.

Инвариантные римановы метрики в однородном пространстве  $G/H$ , Формулы для тензора кривизны, тензора Риччи и связности Леви-Чивита Уравнение Эйнштейна.

Примеры однородных метрик Эйнштейна: бивариантная метрика на компактной полупростой группе Ли, изотропно неперебиваемые многообразия, грасмановы многообразия над  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$ , фактор-пространство  $G/K$  простой некомпактной группы Ли по максимальной компактной подгруппе.

## 8. Римановы симметрические пространства и симметрические разложения полупростых алгебр Ли.

Геометрические симметрических пространств.

Кривизна и алгебра голономии симметрического пространства.

Инвариантные и параллельные тензорные поля.

Симметрические пространства как римановы многообразия с параллельным тензором кривизны.

Некомпактные симметрические пространства простой группы Ли  $G$  как фактор-пространства  $G/K$  по максимальной компактной подгруппе  $K$ .

Двойственность и описание компактных симметрических пространств.

Применения симметрических пространств.

## 9. Однородные выпуклые конусы и ниль-алгебры Винберга.

Самосопряженные конусы и теорема Кехера-Винберга.

Самосопряженные конусы как симметрические римановы пространства.

Однородные выпуклые конусы ранга 3, ассоциированные с модулями Клиффорда, и очень вещественные действительные многообразия (кубические выпуклые детерминантные гиперповерхности).

Гессианова риманова метрика Кошуля-Винберга и ее кривизна.

Применения однородных выпуклых конусов в супергравитации, уравнениях Монжа-Ампера, выпуклом программировании и информационной геометрии.

## 10. Однородный выпуклый конус как многообразие вероятностных мер.

Двойственность.

Многомерное распределение Гаусса и конус положительно определенных матриц.

Распределение Гаусса на самосопряженном однородном выпуклом конусе.

Статистические и гессиановы многообразия. Статистические многообразия задаваемые дивергенцией.

Дивергенции Кульбака-Лейблера и Брегмана на однородном выпуклом конусе.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система), имеющими выход в сеть «Интернет».

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : учебник для вузов / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко .— М. : Физматлит, 2004 .— 304 с.
2. Гладкие многообразия [Текст] / М. М. Постников - М.Наука,1987
3. Введение в теорию гладких многообразий / С. М. Натанзон. – Москва: МЦНМО, 2020. – Электронная копия доступна онлайн
4. Группы и геометрический анализ [Текст] : Интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции/С. Хелгасон , -М., Мир, 1987

### Дополнительная литература

1. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия [Текст] / М. М. Постников - М.Наука,1979
2. Риманова геометрия и тензорный анализ [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / П. К. Рашевский .— 7-е изд. — М. : ЛКИ, 2010 .— 664 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

[www.mou.mipt.ru](http://www.mou.mipt.ru)

<https://habr.com/ru/companies/skillfactory/articles/708796/>

В процессе преподавания дисциплин используются следующие методы, средства и обновляемое при необходимости программное обеспечение информационных технологий: e-mail преподавателя; электронные учебно-методические материалы для обеспечения самостоятельной работы студентов; список сайтов в сети «Интернет» для поиска научно-технической информации по разделам дисциплины; пакеты прикладных программ, например, pytorch.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- выполнение домашних работ, для осознания связей между теорией и практическими навыками;
- подготовку к экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.



**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Прикладная математика и информатика  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра математических основ управления  
**курс:** 1  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** Д.В. Алексеевский, д-р физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен комбинировать и адаптировать существующие информационно-коммуникационные технологии для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-4.1 Умеет применять информационно-коммуникационные технологии для поиска и анализа профессиональной информации, выделения в ней главного, структурирования, оформления и представления в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями
	ОПК-4.2 Умеет применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен адаптировать зарубежные комплексы обработки информации и автоматизированного проектирования к нуждам отечественных предприятий
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Имеет практический опыт использования существующих методов и алгоритмов решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками
	ПК-2.3 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дифференциальная геометрия, однородные пространства и их применения» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия применения дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления;
- современные проблемы применения дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть дифференциальной геометрии и теории однородных пространств.

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач применения дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач дифференциальной геометрии;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач применения дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов применения дифференциально-геометрических методов и однородных пространств в физике, механике и теории управления;
- навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
**ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ**  
**ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

Типовые вопросы совпадают с приведенными в п.4.

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

**4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Что такое дифференциальная геометрия и зачем она нужна.
2. Простое многообразие как множество с картой.
3. Согласованные карты.
4. Гладкие функции и гладкие кривые.
5. Гладкие отображения многообразий.
6. Касательные векторы и касательное пространство.
7. Базис касательного пространства.
8. Касательное расслоение и риманова метрика как поле евклидовых метрик. Риманова геометрия, ее применения и обобщения.
9. Группы Ли как многообразие со структурой группы с гладкими групповыми операциями.
10. Примеры групп Ли: векторная группа, полная матричная группа  $GL(n)$  и ее замкнутые подгруппы.
11. Действие группы Ли  $G$  на многообразии, транзитивное действие стационарная подгруппа и орбита.
12. Однородное пространство.
13. Примеры: сфера, проективное пространство, аффинное пространство, евклидово пространство, грассманово многообразие, конус положительно определенных матриц.
14. Два подхода к геометрии.
15. Подход Римана: геометрия изучает многообразия, снабженные геометрической структурой – например, римановой метрикой.
16. Другие примеры геометрических структур: векторное поле, симплектическая структура и  $k$ -мерное распределение – поле  $k$ -мерных подпространств (система Пфаффа).
17. Подход Кляйна: объектом геометрии являются  $G$ -многообразия (многообразия вместе с действием группы Ли  $G$ ).
18. Геометрия изучает инварианты этого действия.
19. Унификация этих подходов (Э. Картан).
20. Тензорная алгебра.
21. Сопряженное пространство.
22. Алгебра ковариантных и контравариантных тензоров.
23. Симметрическая и внешняя алгебра.
24. Алгебра Клиффорда, классификация клиффордовых алгебр и клиффордовых модулей.
25. Многообразие как топологическое пространство, снабженное атласом карт.

26. Примеры многообразий, гиперповерхности евклидова пространства как многообразия.
27. Касательное и кокасательное пространства.
28. Векторные поля и дифференциальные 1-формы.
29. Поток векторного поля. Тензорные поля.
30. Представление группы диффеоморфизмов в пространстве тензорных полей и производная Ли.
31. Дифференциальные формы и внешний дифференциал. Когомологии.
32. Римановы многообразия.
33. Связность Леви-Чивита и параллельный перенос.
34. Линейные связности, кривизна и кручение.
35. Группа голономии и разложение де Рама.
36. Классификация неприводимых групп голономии риманова пространства.
37. Геодезические и их свойства.
38. Пример. Гиперповерхности евклидова пространства.
39. Псевдоримановы многообразия.
40. Пространства постоянной кривизны и их геодезические.
41. Геометрия Лобачевского.
42. Вещественные и комплексные группы Ли.
43. Примеры групп Ли.
44. Полупростые и разрешимые группы Ли.
45. Действие группы Ли на многообразии.
46. Стационарные подгруппы, орбиты и представление изотропии.
47. Три действия группы Ли  $G$  на многообразии  $G$ .
48. Три канонических связности на группе Ли.
49. Алгебра Ли группы Ли.
50. Случай линейной группы.
51. Экспоненциальное отображение.
52. Восстановление связной линейной группы Ли по ее алгебре Ли.
53. Теорема Адо и соответствие между группами Ли и алгебрами Ли.
54. Алгебра кватернионов.
55. 3-сфера как группа единичных кватернионов.
56. Расслоение Хопфа и его применение к описанию конфигурационного пространства глаза, законы Дондерса и Листинга.
57. Геометрия саккад. Фиксационные движения глаз как случайное блуждание на сфере.
58. Однородное пространство группы Ли  $G$  как фактор-пространство  $M = G/H$ .
59. Инфинитезимальное описание однородного пространства и инвариантных тензорных полей.
60. Инвариантные римановы метрики в однородном пространстве  $G/H$ .
61. Формулы для тензора кривизны, тензора Риччи и связности Леви-Чивита. Уравнение Эйнштейна.
62. Примеры однородных метрик Эйнштейна: бинвариантная метрика на компактной полупростой группе Ли, изотропно неперевожимые многообразия, грассмановы многообразия над  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$ , фактор-пространство  $G/K$  простой некомпактной группы Ли по максимальной компактной подгруппе.
63. Римановы симметрические пространства и симметрические разложения полупростых алгебр Ли.
64. Геодезические симметрических пространств.
65. Кривизна и алгебра голономии симметрического пространства.
66. Инвариантные и параллельные тензорные поля.

67. Симметрические пространства как римановы многообразия с параллельным тензором кривизны.
68. Некомпактные симметрические пространства простой группы Ли  $G$  как фактор-пространства  $G/K$  по максимальной компактной подгруппе  $K$ .
69. Двойственность и описание компактных симметрических пространств.
70. Применения симметрических пространств.
71. Однородные выпуклые конусы и ниль-алгебры Винберга.
72. Самосопряженные конусы и теорема Кехера-Винберга.
73. Самосопряженные конусы как симметрические римановы пространства.
74. Однородные выпуклые конусы ранга 3, ассоциированные с модулями Клиффорда, и очень вещественные действительные многообразия (кубические выпуклые детерминантные гиперповерхности).
75. Гессианова риманова метрика Кошуля-Винберга и ее кривизна.
76. Применения однородных выпуклых конусов в супергравитации, уравнениях Монжа-Ампера, выпуклом программировании и информационной геометрии.
77. Однородный выпуклый конус как многообразие вероятностных мер.
78. Двойственность.
79. Многомерное распределение Гаусса и конус положительно определенных матриц.
80. Распределение Гаусса на самосопряженном однородном выпуклом конусе.
81. Статистические и гессиановы многообразия.
82. Статистические многообразия задаваемые дивергенцией.
83. Дивергенции Кульбака-Лейблера и Брегмана на однородном выпуклом конусе.

Примеры билетов:

Билет №1

1. Что такое дифференциальная геометрия и зачем она нужна.
2. Простое многообразие как множество с картой.

Билет №2

1. Алгебра Клиффорда, классификация клиффордовых алгебр и клиффордовых модулей.
2. М

### Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов – выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов – выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов – выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов – выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов – выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов – выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла – выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла – выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла – выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл – выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой.

Экзамен проводится путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.