

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор высшей школы  
программной инженерии  
А.В. Малеев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Алгоритмы и структуры данных
<b>по направлению:</b>	Программная инженерия
<b>профиль подготовки:</b>	Разработка программно-информационных систем высшая школа программной инженерии высшая школа программной инженерии
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

2 (весенний) - Экзамен

3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 36 час.

Подготовка к экзамену: 60 час.

Всего часов: 216, всего зач. ед.: 6

Количество контрольных работ, заданий: 6

Программу составил: А.Е. Кулапин, преподаватель

Программа обсуждена на заседании высшей школы программной инженерии 19.03.2025

## Аннотация

В начале вводятся общие математические обозначения, позволяющие работать с асимптотиками и оценивать сложность работы алгоритмов. Семестр посвящён изучению структур данных, необходимых для разнообразных более сложных алгоритмов. Простейшие структуры стек, очередь, вектор анализируются на предмет эффективности и времени выполнения. Вводятся кучи (двоичная, биномиальная и фибоначчиева), описываются границы их применимости. Изучаются деревья поиска (splay, AVL, декартово, В-дерево) вместе с подробными доказательствами корректности и асимптотики, а также с описанием прикладных преимуществ каждой структуры. Рассматриваются наиболее универсальные техники обработки запросов: хэш-таблицы, деревья отрезков, деревья Фенвика (в том числе многомерные), разреженные таблицы. В рамках рассматриваемых тем оттачиваются различные техники оценки временной сложности алгоритмов: метод потенциалов и метод бухгалтерского учёта. Курс в целом рассчитан на изучение базовых структур, реализация которых требуется во множестве более продвинутых алгоритмов.

Слушатели знакомятся с понятиями алгоритмов, асимптотик, графов, а также рассчитывая на умение студентов самостоятельно реализовывать программный код, обеспечивающий работу сформулированного алгоритма, курс раскрывает аспекты теории графов в области поиска максимального потока в транспортных сетях (в том числе минимальной стоимости), затем переходит к изучению базовых и продвинутых алгоритмов на строках (вкуче с оптимальными способами хранения строк и структур над ними в памяти компьютера), и, наконец, завершается блоком о вычислительной геометрии (освещаются технические детали возможного представления геометрических примитивов в цифровом виде, а также обсуждаются многие классические алгоритмы, актуальность которых обусловлена в первую очередь практическими приложениями).

Дисциплина включает подробное освещение теоретической стороны алгоритмов, разбор и тренировка решений практических задач, а также предполагает самостоятельное изучение студентами материала предмета через решение домашних теоретических и практических задач. Для освоения курса необходимы базовые понимания о понятии алгоритма и работе компьютера; также требуется достаточная подкованность в простейших определениях и терминах дискретной математики.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

- расширенное ознакомление студентов с основными принципами проектирования и анализа алгоритмов и структур данных;
- закрепление навыков обоснования корректности алгоритмов, их практической реализации, теоретической и экспериментальной оценки их временной сложности.

### Задачи дисциплины

- научить формулировать задачи в терминах изученных теорий, выбирать подходящий алгоритм для поставленной задачи;
- научить разрабатывать комбинации алгоритмов для решения поставленных задач, оценивать сложности алгоритмов, выбирать подходящие структуры данных для поставленных задач, реализовывать алгоритмы на языке программирования C++.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-6 Способен разрабатывать алгоритмы и программы, пригодные для практического использования, применять основы информатики и программирования к проектированию, конструированию и тестированию программных продуктов	ОПК-6.1 Знает алгоритмы решения типовых задач, области и способы их применения
	ОПК-6.2 Умеет применять языки программирования для решения прикладных задач
ПК-2 Способен формализовать и алгоритмизировать поставленную задачу	ПК-2.1 Способен формализовать и алгоритмизировать поставленную задачу
	ПК-2.2 Владеет методами и приемами формализации и алгоритмизации задач

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- определения асимптотик в O-нотации;
- определения простейших линейных структур данных (стек, очередь, вектор) и времена обработки запросов в них;
- алгоритм быстрой сортировки;
- определение и практическую необходимость деревьев поиска;
- определения потоков в сети, базовых функций над строками, базовых геометрических объектов;
- алгоритмы для нахождения максимального потока в сети (в т.ч. минимальной стоимости);
- алгоритмы поиска шаблона в тексте;
- способы представления геометрических объектов в памяти компьютера.

уметь:

- оценивать сложность алгоритмов;
- строго доказывать утверждения о корректности алгоритмов;
- применять необходимую технику для решения алгоритмических задач.

владеть:

- разнообразными методами пересечения базовых геометрических примитивов;
- методами доказательства корректности утверждений об алгоритмах;
- приёмами сведения общих задач к более конкретным и простым.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Асимптотики, мастер-теорема	4	4		2
2	Линейные структуры данных	4	4		2
3	Сортировки и порядковые статистики	4	4		2
4	Кучи	4	4		3
5	Деревья поиска	4	4		3
6	Дерево отрезков, дерево Фенвика	4	4		3
7	Хэш-таблицы, фильтры Блума	6	6		3
8	Паросочетания, алгоритм Куна	4	4		2
9	Максимальные потоки в сетях	6	6		2
10	Простейшие строковые алгоритмы	4	4		2
11	Строковые суффиксные структуры	4	4		3
12	Геометрические примитивы	4	4		3
13	Выпуклая оболочка	4	4		3
14	Рандомизированные алгоритмы и комбинаторные игры	4	4		3
Итого часов		60	60		36
Подготовка к экзамену		60 час.			
Общая трудоёмкость		216 час., 6 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

## Семестр: 2 (Весенний)

### 1. Асимптотики, мастер-теорема

Обозначения в O-нотации: o-малое и O-большое, омега-малое и Омега-большое, Тета-большое. Независимость определения O-большого и Омега-большого от начального сдвига. Мастер-теорема, пример применения для рекурренты  $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ .

### 2. Линейные структуры данных

Структуры данных стек, очередь, вектор, дек. Поиск ближайшего большего справа за  $O(n)$  в массиве. Поиск минимума в стеке и очереди. Метод бухгалтерского учёта для доказательства асимптотики времени обработки запросов в векторе.

### 3. Сортировки и порядковые статистики

Задача сортировки. Определение стабильной сортировки. Сортировка слиянием, подсчёт числа инверсий в перестановке. Стабильная сортировка подсчётом, цифровая сортировка LSD. Быстрая сортировка со случайным выбором пивота, поиска k-й порядковой статистики. Дерандомизация: детерминированный алгоритм быстрой сортировки с выбором в качестве пивота медианы массива медиан пятёрок.

### 4. Кучи

Определение кучи и запросы, необходимые для обработки. Двоичная куча: операции siftUp и siftDown. Выражение остальных операций через данные. Асимптотика времени работы. Биномиальные деревья и биномиальная куча: скорость работы и преимущества по сравнению с двоичной кучей. Фибоначчиева куча: асимптотика с помощью метода бухгалтерского учёта.

### 5. Деревья поиска

Определение дерева поиска, обрабатываемые запросы. Теоретическая реализация и анализ времени работы деревьев: splay-деревья, AVL-деревья, декартового дерева, B-деревья как частного случая (a, b)-деревья. Практические применения и преимущества каждого типа деревьев.

### 6. Дерево отрезков, дерево Фенвика

Обрабатываемые запросы в дереве отрезков. Отложенные операции. Дерево отрезков снизу. Двумерное дерево отрезков. Динамическое и персистентное дерево отрезков. Дерево Фенвика: булевы операции над битами. Многомерное дерево отрезков, запросы к подотрезкам и подпрямоугольникам.

### 7. Хэш-таблицы, фильтры Блума

Задача хэширования. Определения совершенного и универсального семейства хэш-функций. Вероятность коллизии. Хэш-таблицы с открытой адресацией, хэш-таблицы методом цепочек. Двойное хэширование. Фильтры Блума: применения и реализация.

## Семестр: 3 (Осенний)

### 8. Паросочетания, алгоритм Куна

Определение паросочетания, двудольного графа. Максимальное и наибольшее паросочетание. Теорема Берга, увеличивающие и чередующиеся цепи. Алгоритм Куна, корректность и асимптотика. Реализация. Теорема Дилворта и Мирского. Покрытие частично упорядоченного множества путями. Минимальное вершинное покрытие и максимальное независимое множество

#### 9. Максимальные потоки в сетях

Определение транспортной сети, потока, разреза. Теорема Форда-Фалкерсона. Алгоритм Форда-Фалкерсона, Эдмондса-Карпа. Блокирующий поток, слоистая сеть. Алгоритм Диница. Взвешенная задача, поток минимальной стоимости. Алгоритм поиска максимального потока минимальной стоимости (с использованием алгоритмов Форда-Беллмана и Дейкстры с потенциалами).

#### 10. Простейшие строковые алгоритмы

Зет- и префикс-функция строки. Алгоритмы их нахождения за линейное время. Алгоритм Манакера. Структура данных бор. Алгоритм Ахо-Корасик. Поиск вхождения шаблона в строку и шаблонов в текст. Подсчёт числа вхождений.

#### 11. Строковые суффиксные структуры

Суффиксное дерево и суффиксный автомат. Нахождение числа всех подстрок строки.

#### 12. Геометрические примитивы

Точка, прямая, окружность, отрезок, луч. Представление в памяти компьютера. Скалярное и векторное произведение, две формы выражения. Поиск пересечения двух прямых, прямой и окружности, двух окружностей. Нахождение замечательных точек треугольника: точки пересечения биссектрис, медиан, высот.

#### 13. Выпуклая оболочка

Определение выпуклой оболочки. Алгоритмы Джарвиса, Грэхема, Эндрю. Алгоритм Чена. Поиск объемлющей фигуры минимального периметра или площади.

#### 14. Рандомизированные алгоритмы и комбинаторные игры

Минимальная покрывающая окружность. Непустота пересечения полуплоскостей. Определение игры ним, эквивалентности игр. Теория Шпрага-Гранди об эквивалентности любой справедливой ациклической игры игре ним. Ретроанализ.

### **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

учебная аудитория с доской.

### **6.Перечень рекомендуемой литературы**

#### Основная литература

1. Введение в теорию алгоритмов и структур данных, Электронная версия печатной публикации / М. А. Бабенко, М. В. Левин. — Москва, МЦНМО, 2016
2. Алгоритмы и структуры данных. Новая версия для Оберона, Электронная версия печатной публикации / Н. Вирт. — Москва, ДМК Пресс, 2010

#### Дополнительная литература

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. [http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Дискретная\\_математика,\\_алгоритмы\\_и\\_структуры\\_данных](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Дискретная_математика,_алгоритмы_и_структуры_данных). «Викиконспекты», сайт Санкт-Петербургского Университета ИМТО.
2. <http://e-maxx.ru/>. Maximal algo: личный сайт Максима Иванова, посвященный алгоритмам и структурам данных.
3. <https://codeforces.com/>. Международная платформа онлайн-кон테стов по спортивному программированию на базе СГУ и ИМТО.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Для успешного освоения дисциплины, студент использует следующие программные средства:

- компилятор языка C++.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Программа курса в разделе «самостоятельная работа» обозначает минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- выполнение домашних заданий.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Программная инженерия
<b>профиль подготовки:</b>	Разработка программно-информационных систем высшая школа программной инженерии высшая школа программной инженерии
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

2 (весенний) - Экзамен

3 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** А.Е. Кулапин, преподаватель

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-6 Способен разрабатывать алгоритмы и программы, пригодные для практического использования, применять основы информатики и программирования к проектированию, конструированию и тестированию программных продуктов	ОПК-6.1 Знает алгоритмы решения типовых задач, области и способы их применения
	ОПК-6.2 Умеет применять языки программирования для решения прикладных задач
ПК-2 Способен формализовать и алгоритмизировать поставленную задачу	ПК-2.1 Способен формализовать и алгоритмизировать поставленную задачу
	ПК-2.2 Владеет методами и приемами формализации и алгоритмизации задач

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгоритмы и структуры данных» обучающийся должен:

### знать:

- определения асимптотик в O-нотации;
- определения простейших линейных структур данных (стек, очередь, вектор) и времена обработки запросов в них;
- алгоритм быстрой сортировки;
- определение и практическую необходимость деревьев поиска;
- определения потоков в сети, базовых функций над строками, базовых геометрических объектов;
- алгоритмы для нахождения максимального потока в сети (в т.ч. минимальной стоимости);
- алгоритмы поиска шаблона в тексте;
- способы представления геометрических объектов в памяти компьютера.

### уметь:

- оценивать сложность алгоритмов;
- строго доказывать утверждения о корректности алгоритмов;
- применять необходимую технику для решения алгоритмических задач.

### владеть:

- разнообразными методами пересечения базовых геометрических примитивов;
- методами доказательства корректности утверждений об алгоритмах;
- приёмами сведения общих задач к более конкретным и простым.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Для 2 семестра

1. Пусть  $c > 0$  -- константа. Докажите, что решение рекурренты  $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$  ведёт себя как  $\Omega(n \log n)$ .
2. Разработайте стек, который умеет прибавлять ко всем хранящимся значениям произвольную поправку  $x$  за  $O(1)$ . Иными словами, нужно реализовать операцию увеличения всех чисел в стеке на  $x$ .
3. В  $2n - 1$  ящиках лежат яблоки и апельсины. Требуется выбрать  $n$  ящиков так, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов. Докажите, что такой выбор всегда существует.
4. Двоичная куча с минимумом в корне на  $n$  элементах расположена в памяти в виде массива. По числу  $k$  найдите минимальные  $k$  элементов в куче за  $O(k \log k)$ .

Для 3 семестра

1. Пусть  $G$  -- ациклический ориентированный граф. Предложите алгоритм поиска наименьшего количества вершинно непересекающихся путей, которые покрывают все вершины  $G$ . Асимптотика:  $O(nm)$ , где  $n$  -- число вершин в  $G$ , а  $m$  -- число его рёбер.



2. Модифицируйте алгоритм Куна так, чтобы его время работы составляло  $O(am)$ , где  $a$  -- размер максимального паросочетания, а  $m$  -- число рёбер графа.
3. Докажите теорему о декомпозиции потока: если в сети  $G$  течёт некий поток  $f$ , то его можно разбить на несколько путей из  $s$  в  $t$ , а также на несколько (замкнутых) циклов.
4. Как реализовать алгоритм Ахо--Корасик на динамически расширяющемся множестве строк? Используйте идею разложения  $n$  по степеням двойки.
5. Предложите алгоритм нахождения пересечения двух выпуклых многоугольников за  $O(nm)$ , если  $n$  -- это количество сторон в первом из них, а  $m$  -- во втором.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. По данному числу  $n$  найдите все пары целых положительных чисел  $(a, b)$ , такие что  $a \leq b \leq n$ , и  $a \mid b$ . Оцените асимптотическое поведение числа таких пар.
2. Число 0 записано в  $n$ -разрядной двоичной системе. К нему  $2^{\{n\}} - 1$  раз прибавляется единица. Будем считать, что время, необходимое на прибавление единицы, равно количеству единиц в двоичной записи числа, которые становятся нулями. Оцените среднюю сложность всех таких операций. Какие операции являются самыми дешёвыми, а какие -- самыми дорогими?
3. Предложите метод хранения минимального значения в очереди с помощью структуры `deque`. Если к очереди поступило  $n$  запросов, время работы программы должно составлять  $O(n)$ .
4. Напомним, что процедура `Partition(A, x)` переупорядочивает элементы массива  $A$  так, что сначала идут все элементы, не превосходящие  $x$ , в некотором порядке, а затем -- все элементы, большие  $x$ . Покажите, как реализовать `Partition(A, x)` с привлечением  $O(1)$  дополнительной памяти.
5. Сведите задачу поиска максимального паросочетания в двудольном графе к поиску максимального потока в некоторой сети. Сравните время работы алгоритмов Форда--Фалкерсона и Эдмондса--Карпа. Можно ли проделать то же в произвольном (необязательно двудольном) графе?
6. На фабрику поступило  $n$  заказов, реализация  $i$ -го из которых принесёт ей прибыль в  $a_{\{i\}}$  рублей. Каждый заказ для производства требует некоторого набора инструментов. Пусть всего зависимостей “заказ--инструмент” ровно  $k$ . Инструменты можно переиспользовать, то есть задействовать в нескольких заказах. Однако в данный момент на фабрике вообще нет инструментов, так что покупка  $j$ -го из них обойдётся в  $b_{\{j\}}$  рублей. Конечно, от приёма каких-то заказов или покупки каких-то инструментов фабрика может отказаться. Какие заказы следует реализовать для максимизации прибыли (с учётом затрат на инструменты)?
7. Задан полный взвешенный двудольный граф, в обеих долях которого находится по  $n$  вершин. Предложите алгоритм поиска самого дешёвого совершенного паросочетания.
8. С помощью суффиксного автомата найдите количество различных подстрок строки  $s$  за время, линейное от её длины.
9. Пусть из  $n$  объектов только один обладает хорошим свойством. Смоделируем выбор с возвращением: на каждом шаге выбирается случайный равновероятный объект. Если он не обладает хорошим свойством, предмет кладётся обратно в кучу. В противном случае игра останавливается. Определите математическое ожидание числа шагов до конца игры.
10. Поток минимальной стоимости. Корректность алгоритма, асимптотика. Применение алгоритмов Форда-Беллмана и Дейкстры (с потенциалами).

Примеры экзаменационных билетов:

1. а) Поиск минимального вершинного покрытия с доказательством корректности.  
б) Теоремы Карзанова. Леммы для первой теоремы (б/д), вывод из них самой теоремы. Вторая теорема -- б/д. Единичные сети и алгоритм Хопкрофта-Карпа.
2. а) Поиск окружности минимального радиуса, покрывающей данное множество точек.  
б) Зет-функция: определение, линейный алгоритм построения и доказательство корректности. Поиск всех вхождений шаблона  $s$  в текст  $t$ .
3. а) Алгоритм Ахо--Корасик: поиск всех вхождений шаблона  $s$  (в котором допускается не более  $k$  вхождений) в текст  $t$ .  
б) Поток минимальной стоимости. Корректность алгоритма, асимптотика. Применение алгоритмов Форда-Беллмана и Дейкстры (с потенциалами).

4. а) Нижняя оценка на число сравнений в сортировке, основанной на сравнениях.
- б) Лемма о корректности siftDown и siftUp.
5. а) Удаление в куче (по указателю и по значению).
- б) Двумерное дерево отрезков снизу: прибавление в точке и сумма в прямоугольнике.
6. а) Фибоначчиева куча: операций decreaseKey. Асимптотика и корректность.
- б) Фильтры Блума: асимптотика и корректность.

#### Критерии оценивания

##### отлично

- 10 Полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы, код оформлен в едином удобочитаемом стиле
- 9 Полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы
- 8 Полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач

##### хорошо

- 7 Полностью решены все задачи. Допущены несущественные ошибки.
- 6 Полностью решено большинство задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.
- 5 Полностью решено две трети задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

##### удовлетворительно

- 4 Полностью решено более половины задач. В остальных задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.
- 3 Полностью решено более половины задач.

##### неудовлетворительно

- 2 Решено менее половины задач.
- 1 Не решено ни одной задачи.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Итоговый контроль проводится в формате устного и письменного экзаменов.

Обучающийся решает задачи и защищает их у семинариста. Процесс защиты заключается в демонстрации кода решения задачи и объяснения его работы.

Неправильно решенная задача или задача, имеющая ошибки, отправляется на доработку с возможностью повторной защиты. Количество повторных защит регламентируется преподавателем (семинаристом).

Защита может выполняться удаленно с использованием электронной почты, внешним репозиторием системы контроля версий и др.