

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Аддитивная комбинаторика
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информационные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.А. Глибичук, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

Цель курса - дать основы активно развивающейся науки, которой является аддитивная комбинаторика. Основным объектом изучения аддитивной комбинаторики - сумма двух множеств. В курсе будут покрыты вопросы экстремальной аддитивной теории, которая изучает структуру множеств, у которых сумма мала. Курс покрывает классическую теорему Фреймана, неравенства Плуннеке-Ружи, теорему Воспера, теорему Кнезера и другие вещи, касающиеся в основном экстремальной аддитивной теории.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение аддитивной комбинаторики.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области аддитивной комбинаторики;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области аддитивной комбинаторики;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области аддитивной комбинаторики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы аддитивной комбинаторики;
- современные проблемы соответствующих разделов аддитивной комбинаторики;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач аддитивной комбинаторики.

уметь:

понять поставленную задачу;
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач аддитивной комбинаторики;
 оценивать корректность постановок задач;
 строго доказывать или опровергать утверждение;
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
 точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов аддитивной комбинаторики;
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Группы полиномиального роста.		10		6
2	Группы, порождённые автоматами.		15		6
3	Классификация автоматных групп с двумя состояниями и алфавитом $\{0, 1\}$.		10		6
4	Метод Нильсена.		15		6
5	Неравенство Плюннеке.		10		6
Итого часов			60		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Группы полиномиального роста.

Рост сложности группы.

2. Группы, порождённые автоматами.

Действия на корневых деревьях.

3. Классификация автоматных групп с двумя состояниями и алфавитом $\{0, 1\}$.

Теорема Балога-Семереди-Гауэрса. Старшие энергии, структурные теоремы.

4. Метод Нильсена.

Его геометрическая интерпретация.

5. Неравенство Плюнке.

Простейшие соотношения между размерами сумм множеств.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, О. С. Федько ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2012 .— 248 с.
2. Комбинаторика и информация [Текст]. Ч. 2, Информационные модели / В. К. Леонтьев ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ,2016
3. Комбинаторика и теория вероятностей [Текст] / А. М. Райгородский - М.МФТИ,2012
4. Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский ; Летняя школа "Современная математика", Дубна, июль 2008 г. — М. : МЦНМО, 2011 .— 28 с.
5. Основы комбинаторики и теории чисел [Текст] : сборник задач : учеб. пособие для вузов / А. А. Глибчук [и др.] .— Долгопрудный : Изд. Дом "Интеллект", 2015 .— 104 с.

Дополнительная литература

1. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2007 .— 144 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

<http://web.stanford.edu/class/ee364b/lectures.html>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и физика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информационные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	<u>2</u>
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.А. Глибичук, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Аддитивная комбинаторика» обучающийся должен:

знать:

фундаментальные понятия, законы аддитивной комбинаторики;
современные проблемы соответствующих разделов аддитивной комбинаторики;
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
основные свойства соответствующих математических объектов;
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач аддитивной комбинаторики.

уметь:

понять поставленную задачу;
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач аддитивной комбинаторики;
оценивать корректность постановок задач;
строго доказывать или опровергать утверждение;
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов аддитивной комбинаторики;
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль

Вопрос 1. Неравенство треугольника Ружи.

Вопрос 2. Аддитивная энергия. Оценки на аддитивную энергию. Доказательство утверждения о том, что множество с маленькой суммой имеет большую аддитивную энергию.

Задача 1. Given an arbitrary abelian group G . For any subgroup $H \leq G$ and any subset S denote $S/H := \{s + H : s \in S\} \subseteq G/H$. Suppose that A и B are arbitrary nonempty subsets of the group G and $H = H(A + B)$. Prove that either $|A + B| > |A| + |B|$, or $|(A + B)/H| = |A/H| + |B/H| - 1$.

Задача 2. Выведите из теоремы Кнезера следующее утверждение: Пусть $m > 2$ и A, B непустые подмножества $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Если $0 \notin B$ и $(b, m) = 1$ для любого элемента $b \in B \setminus \{0\}$, то $|A + B| > \min\{m, |A| + |B| - 1\}$. Эта теорема была доказана И. Човлой и носит его имя. Задача 3. Для любых непустых конечных подмножеств A и B произвольной абелевой группы G доказать, что эквивалентны следующие утверждения: 1) $|A + B| = |A||B|$. 2) $|A \cdot B| = |A||B|$. 3) $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 + b_1 = a_2 + b_2\}| = |A||B|$. 4) $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 b_1 = a_2 b_2\}| = |A||B|$. 5) $|A \cdot (x + B)| = |A|$ для любых $x \in A + B$. 6) $|A \cdot (B + y)| = |A|$ для любых $y \in A + B$. 7) $(A \cdot A) \cap (B \cdot B) = \{0\}$.

Задача 4. Рассмотрим два произвольных конечных подмножества A, B произвольного поля F , состоящих по меньшей мере из двух элементов. Докажите, что для произвольного ненулевого элемента $c \in F$ неравенство $|A + cB| < |A||B|$ выполнено тогда и только тогда, когда найдутся элементы $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$, такие, что $c = a_1 - a_2 \cdot b_2 \cdot b_1^{-1}$. Напомним, что множество $cB = \{c\} \cdot B = \{c \cdot b : b \in B\}$.

Задача 5. Рассмотрим произвольное конечное поле F и любое его подполе $P \subseteq F$. Докажите, что для произвольных ненулевых элементов $c, d \in F = F \setminus \{0\}$ множество $A = c + dP$ удовлетворяет равенствам $|A + A| = |A|$ и $|A \cdot A| = |A|$ одновременно тогда и только тогда, когда $c \in dP$.

Задача 6. Докажите, что некоторое подмножество A поля F ($|A| > 2, |F| > 2$) удовлетворяет равенствам $|A \cdot A| = |A|$ и $|A + A| = |A|$ одновременно тогда и только тогда, когда A есть мультипликативный сдвиг некоторого подполя $P \subseteq F$, то есть существуют элемент $c \in F$, такие, что $A = cP$.

Задача 7. Пусть p — произвольное простое число и c_1, c_2, \dots, c_k — любые ненулевые коэффициенты из \mathbb{Z}_p . Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1 x_1 + c_2 x_2^2 + \dots + c_k x_k^k$. Докажите, что сравнение $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv n \pmod{p}$ разрешимо для любого n .

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Введение. Простейшие соотношения между размерами сумм множеств. Неравенство Плуннеке. Универсальные множества.
2. Структура множеств с малым удвоением. Леммы о покрытиях. Теорема Фреймана в группах с кручением.
3. Анализ Фурье на абелевых группах. Равномерные множества первого порядка. Теорема Рота.
4. Лемма регулярности Семереди. Теорема Ружи-Семереди о треугольниках.
5. Большие тригонометрические суммы.
6. Свойства множеств Бора.
7. Почти периодичность сверток характеристических функций. Арифметические прогрессии в суммах множеств.
8. Теорема Фреймана, полиномиальная гипотеза Боголюбова — современные оценки.
9. Теорема Балог-Семереди-Гауэрса. Старшие энергии, структурные теоремы.
10. Конструкция Беренда множеств без решений аффинных уравнений. Верхние оценки.
11. Нормы Гауэрса, равномерные множества старших порядков.
12. Теорема Семереди-Троттер, выпуклые множества. Суммы произведений : вещественный случай.

Темы для курсовых работ:

1. Суммы произведений: конечные поля, равномерная распределенность мультипликативных подгрупп.
2. Проблема Какея.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.