

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Комбинаторная геометрия
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информационные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: В.Л. Дольников, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

Комбинаторная геометрия (дискретная геометрия) — раздел математики, в котором изучаются геометрические объекты с точки зрения комбинаторики (дискретной математики). То есть мы рассматриваем конечное число (или счетное число) геометрических объектов и пытаемся понять их свойства. Эта область математики связана с теорией графов, теорией чисел и многими другими разделами геометрии и комбинаторики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение основных понятий комбинаторной геометрии.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области комбинаторной геометрии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области комбинаторной геометрии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических ис-следований в области комбинаторной геометрии.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его реализации	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области своей профессиональной деятельности и их практическую значимость

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории комбинаторной геометрии;
современные проблемы соответствующих разделов комбинаторной геометрии;
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
основные свойства соответствующих математических объектов;
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач комбинаторной геометрии.

уметь:

понять поставленную задачу;

использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач комбинаторной геометрии;

оценивать корректность постановок задач;

строго доказывать или опровергать утверждение;

самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;

самостоятельно видеть следствия полученных результатов;

точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);

навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;

культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов комбинаторной геометрии;

предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Каноническое расслоение над пространством Грассмана.		12		
2	Основные понятия и определения выпуклой геометрии.		12		
3	Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства.		12		
4	Применения теоремы Хелли.		12		
5	Теорема Борсука–Улама в простейшем случае.		12		45
Итого часов			60		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Каноническое расслоение над пространством Грассмана.

Соединение точек на плоскости графом с небольшим числом пересечений с любой прямой, теорема Шазеля–Вельцля.

2. Основные понятия и определения выпуклой геометрии.

Теорема Каратеодори и теорема Хелли.

3. Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства.

Теорема «о бутерброде». Кривая моментов и её обобщения, полиномиальный вариант теоремы о бутерброде.

4. Применения теоремы Хелли.

Неравенство Юнга, теорема о центральной точке.

5. Теорема Борсука–Улама в простейшем случае.

Техника минимизации и её применения. Цветная теорема Каратеодори и цветная теорема Хелли. Теорема Тверберга.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, О. С. Федько ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— М. : МФТИ, 2012 .— 248 с.
2. Геометрия [Текст] : [учебник для вузов] / В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров .— 2-е изд., испр. — М. : Изд-во МЦНМО, 2007 .— 328 с.

Дополнительная литература

1. Проблема Секефальви-Надя в комбинаторной геометрии [Текст]/В. Г. Болтянский, Э. Д. Баладзе, -М., Наука : Физматлит, 1997

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информационные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
Разработчик:	В.Л. Дольников, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его реализации	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области своей профессиональной деятельности и их практическую значимость

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Комбинаторная геометрия» обучающийся должен:

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории комбинаторной геометрии;
современные проблемы соответствующих разделов комбинаторной геометрии;
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
основные свойства соответствующих математических объектов;
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач комбинаторной геометрии.

уметь:

понять поставленную задачу;
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач комбинаторной геометрии;
оценивать корректность постановок задач;
строго доказывать или опровергать утверждение;
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов комбинаторной геометрии;
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль

1. Реализуйте локальные методы улучшения треугольной дискретной поверхности. В каких случаях её можно свести к сетке Делоне?

2. Как распределить точки на сфере, чтобы как объём выпуклой оболочки был максимальным?
3. С помощью дескриптора теплопроводности реализуйте сглаживание поверхности. Какие свойства поверхности можно извлечь с его помощью?
4. Сколько компонент у разложения Гельмгольца-Ходжа векторного поля? Какими свойствами они обладают?
5. Определите потоки (векторные поля) главных кривизн на дискретной поверхности и введите локальные координаты вдоль них.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Основные понятия и определения выпуклой геометрии.
2. Теорема Каратеодори и теорема Хелли.
3. Применения теоремы Хелли: неравенство Юнга, теорема о центральной точке.
4. Техника минимизации и её применения. Цветная теорема Каратеодори и цветная теорема Хелли. Теорема Тверберга.
5. Степень отображения и некоторые её применения. Топологическая лемма об отображении симплекса в себя. Деление меры на выпуклые части заданного размера. Теорема Кнастера–Кураковского–Мазуркевича и теорема Брауэра о неподвижной точке. Усиления цветной теоремы Каратеодори.
6. Теорема Борсука–Улама в простейшем случае.
7. Теорема «о бутерброде». Кривая моментов и её обобщения, полиномиальный вариант теоремы о бутерброде.
8. Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства.
9. Теорема Семереди–Троттера о числе инцидентности точек и прямых. Оценки на множество сумм и множество произведений вещественных чисел.
10. Соединение точек на плоскости графом с небольшим числом пересечений с любой прямой, теорема Шазеля–Вельцля.
11. Теорема Дольникова о пересечениях гиперплоскостями и хроматическое число графа Кнезера. Обобщения теоремы Борсука–Улама для действия группы из двух элементов.
12. Каноническое расслоение над пространством Грассмана, теорема Дольникова о трансверсали и теорема о центральной трансверсали.
13. Обобщения теоремы Борсука–Улама для действия групп простого порядка. Топологическая теорема Тверберга и деление мер на равные части на прямой.
14. Когомологии Чеха, лемма о нерве покрытия и топологическая теорема Хелли.

Примеры билетов

Билет 1:

1. Теорема Каратеодори и теорема Хелли.
2. Теорема «о бутерброде». Кривая моментов и её обобщения, полиномиальный вариант теоремы о бутерброде.

Билет 2:

1. Когомологии Чеха, лемма о нерве покрытия и топологическая теорема Хелли.
2. Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений

- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.