

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Случайные графы. Часть 1
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информационные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составили:

Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Курс посвящен классической теории случайных графов. Изучаются общая теория случайных подмножеств, распределения числа малых подграфов в случайном графе, эволюция случайного графа, вопросы о связности случайного графа.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение основных понятий теории случайных графов.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области случайных графов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области случайных графов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области случайных графов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов
	ПК-3.1 Понимает принципы работы используемого оборудования (специализированных пакетов прикладных программ)

специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.2 Способен проводить эксперимент (моделирование) с использованием исследовательского оборудования (пакетов прикладных программ)
--	--

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории случайных графов;  
современные проблемы соответствующих разделов случайных графов;  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных графов.

уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных графов;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных графов;  
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Модели случайных графов		6		3
2	Пороговые вероятности для монотонных свойств		4		2
3	Пуассоновская теорема для числа малых подграфов в случайном графе		4		3
4	Эволюция случайного графа. Случай сильно разреженного графа		4		2
5	Теорема о гигантской компоненте в случайном графе		4		2
6	Теоремы о максимальной сложности компоненты внутри фазового перехода		8		3
Итого часов			30		15

Подготовка к экзамену	0 час.
Общая трудоёмкость	45 час., 1 зач.ед.

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

##### 1. Модели случайных графов

Теория случайных подмножеств конечных множеств Асимптотическая эквивалентность биномиальной и равномерной моделей

##### 2. Пороговые вероятности для монотонных свойств

Малые подграфы в случайном графе, пороговая вероятность наличия фиксированного графа в случайном

##### 3. Пуассоновская теорема для числа малых подграфов в случайном графе

Центральная предельная теорема для числа малых подграфов в случайном графе.

##### 4. Эволюция случайного графа. Случай сильно разреженного графа

Унициклические компоненты в разреженном случайном графе

##### 5. Теорема о гигантской компоненте в случайном графе

Структура случайного графа внутри фазового перехода

##### 6. Теоремы о максимальной сложности компоненты внутри фазового перехода

Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин фиксированной степени в случайном графе

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

#### 6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Модели случайных графов [Текст]/А. М. Райгородский, -М., МЦНМО, 2016
2. Модели случайных графов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский ; Летняя школа "Современная математика", Дубна, июль 2008 г. — М. : МЦНМО, 2011 .— 136 с.

Дополнительная литература

1. Графы. Алгоритмы на языке С [Текст] / В. В. Прут ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ,2017

#### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информационные технологии Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчики:**

Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов
	ПК-3.1 Понимает принципы работы используемого оборудования (специализированных пакетов прикладных программ)
	ПК-3.2 Способен проводить эксперимент (моделирование) с использованием исследовательского оборудования (пакетов прикладных программ)

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Случайные графы. Часть 1» обучающийся должен:

### знать:

фундаментальные понятия, законы, теории случайных графов;  
 современные проблемы соответствующих разделов случайных графов;  
 понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
 основные свойства соответствующих математических объектов;  
 аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных графов.

### уметь:

понять поставленную задачу;  
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных графов;  
 оценивать корректность постановок задач;  
 строго доказывать или опровергать утверждение;  
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
 точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

**владеть:**

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);  
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных графов;  
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры задач для домашнего задания.

1) В случайном процессе  $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\Gamma}(m), m=0, \dots, N)$  для возрастающего свойства  $Q$  определим  $m^*_{\text{cal } Q} = \min\{m: \tilde{\Gamma}(m) \geq \text{cal } Q\}$ . Докажите, что  $\widehat{m}$  является пороговой функцией для  $\text{cal } Q$  тогда и только тогда, когда  $m^*_{\text{cal } Q} = \Theta_{\text{sf } P}(\widehat{m})$ , т.е. для любой положительной функции  $w(n) \rightarrow \infty$  выполнено

$$\text{sf } P\left(\frac{1}{w(n)\widehat{m}}\right) \leq m^*_{\text{cal } Q} \leq w(n)\widehat{m} \rightarrow 1.$$

1.

$$\text{sf } P\left(\frac{1}{w(n)\widehat{m}}\right) \leq m^*_{\text{cal } Q} \leq w(n)\widehat{m} \rightarrow 1.$$

2) Докажите, что в равномерной модели случайных подмножеств для монотонного свойства  $\text{cal } Q$  существует точная пороговая функция тогда и только тогда, когда

$$\frac{m^*_{\text{cal } Q}}{m(1/2; n)} \rightarrow 1.$$

$$\text{sf } P\left(\frac{1}{w(n)\widehat{m}}\right) \leq m^*_{\text{cal } Q} \leq w(n)\widehat{m} \rightarrow 1.$$

3). Пусть  $X$  – число пар непересекающихся треугольников в случайном графе  $G(n, p)$ . Пусть  $np \rightarrow c > 0$ . Найдите предельное распределение случайной величины  $X$  с ростом  $n$ .

4). Пусть  $G = \{1, \dots, n\}$ . Найдите пороговую вероятность в  $G(n, p)$  для свойства содержать арифметическую прогрессию длины  $k$ .

5) Пусть  $np \rightarrow c$ ,  $c > 1$ . Докажите, что с вероятностью, стремящейся к 1, гигантская компонента является единственной сложной компонентой в случайном графе  $G(n, p)$ .

6) Докажите, что в модели  $G(\lambda)$  максимальный размер древесной компоненты имеет порядок  $\Theta_{\text{sf } P}(n^{2/3})$ , т.е. для любой  $w(n) \rightarrow 0$  в случайном графе найдется древесная компонента размера не меньше  $n^{2/3} w(n)$ .

Формула оценки

Студент решает задачи из домашнего задания, каждая задача дает 0,5 балла к оценке. Зачет проходит в форме письменного опроса на знание формулировок и определений из программы курса, в рамках задания можно набрать 4 балла.

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Модели случайных графов. Классические модели: биномиальная и равномерная. Графовые случайные процессы. Общая теория случайных подмножеств, биномиальная и равномерная модели.



2. Монотонные свойства конечных подмножеств. Примеры. Лемма о монотонности вероятности обладания монотонным свойством для случайного подмножества. Выпуклые свойства, примеры.
3. Асимптотическая эквивалентность моделей  $\Gamma(p)$  и  $\Gamma(m)$ : одинаковое асимптотическое поведение вероятности обладания свойством для случайных подмножеств в этих моделях. Две леммы и итоговое следствие для монотонных свойств.
4. Пороговые вероятности и пороговые функции обладания монотонными свойствами случайным подмножеством. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства  $Q$ . Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств.  
Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры.
5. Малые подграфы в случайном графе  $G(n, p)$ . Функция  $m(G)$ , сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа  $G(n, p)$ , изоморфных данному фиксированному графу  $G$ . Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа  $G(n, p)$ , изоморфного данному фиксированному графу  $G$ .
6. Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами. Примеры таких случайных величин. Плотность и относительная компактность семейства вероятностных мер в метрическом пространстве. Теорема Прохорова, следствие из нее. Многомерный метод моментов.
7. Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа  $G(n, p)$ , изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу  $G$ . Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы. Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа  $G(n, p)$ , изоморфных данному фиксированному графу  $G$ .
8. Эволюция случайного графа  $G(n, p)$ . Случай  $np \rightarrow 0$ : максимальный размер и структура компонент связности. Предельные теоремы для числа компонент фиксированного размера.
19. Эволюция случайного графа  $G(n, p)$ . Случай  $np = c \in (0, 1)$ : теорема о максимальном размере компоненты связности. Сложные и унициклические компоненты в таком графе — предельные теоремы для числа таких компонент. Общее число вершин в унициклических компонентах.
10. Эволюция случайного графа  $G(n, p)$ . Случай  $np = c > 1$ . Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Уравнение для нахождения вероятности вырождения. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса. Теорема о размере максимальной связной компоненты случайного графа. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты.
11. Эволюция случайного графа  $G(n, p)$ . Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа. Лемма об отсутствии сложных компонент маленького размера. Ограниченность максимальной сложности компоненты в случайном графе. Следствие: количество, размер и сложность сложных компонент.
12. Свойства первого порядка в случайных графах.
13. Законы нуля или единицы.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.