

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Аналитическая геометрия
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Физика и педагогика
	Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
	кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

лекции: 45 час.

семинары: 45 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 180, всего зач. ед.: 4

Количество контрольных работ, заданий: 3

Программу составил: П.А. Кожевников, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

## Аннотация

В курсе "Аналитическая геометрия" изучаются основы аналитической геометрии, а также смежных разделов алгебры. В первой части курса изучается аналитическая геометрия прямых и плоскостей, а также линий и поверхностей второго порядка. Развивается теория матриц (операции, линейная зависимость, ранг) и определителей, а также систем линейных уравнений. Далее изучаются базовые свойства основных алгебраических структур (группы, кольца, поля).

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Ознакомление слушателей с основами аналитической геометрии и подготовка к изучению других математических курсов – дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, уравнений математической физики, функционального анализа, аналитической механики, теоретической физики, методов оптимального управления и др.

#### Задачи дисциплины

- Приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области векторной алгебры, матричной алгебры;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов аналитической в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- Методические основы изучения и использования математических утверждений;
- основы учебного курса.

уметь:

- Изучать, использовать и применять определения, теоремы;
- изучать и формировать системы математических знаний;
- доказывать основные теоремы курса;
- решать стандартные задачи на применение изученных утверждений.

владеть:

- Четким представлением о курсе.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Введение	1	1		4
2	Векторы и системы координат	7	7		9
3	Многочлены	3	3		5
4	Прямые и плоскости. Кривые второго порядка, поверхности	5	5		7
5	Матрицы и системы линейных уравнений	11	11		13
6	Группы	7	7		8
7	Кольца и поля	8	8		9
8	Определитель	3	3		5
Итого часов		45	45		60
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		180 час., 4 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

##### 1. Введение

Матрицы и детерминанты малых размеров. Системы линейных уравнений. Множества. Логика. Индукция.

##### 2. Векторы и системы координат

1. Линейные операции с векторами и их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Изменение координат при замене базиса.

2. Скалярное произведение, его свойства. Проекция вектора на направление. Выражение скалярного произведения в ортонормированном и произвольном базисе. Вычисление длины вектора и угла между векторами.

3. Левые и правые тройки векторов. Ориентированный объём параллелепипеда (смешанное произведение). Свойства смешанного произведения. Выражение смешанного произведения в произвольном базисе. Критерий компланарности.

4. Векторное произведение, его свойства, выражение в правом ортонормированном базисе. Вычисление площадей, перпендикуляр к паре векторов. Двойное векторное произведение.

5. Общая декартова система координат, прямоугольная система координат. Замена декартовой системы координат, формулы перехода. Полярная, цилиндрическая, сферическая системы координат.

##### 3. Многочлены

1. Степень многочлена. Сложение, умножение, деление с остатком.

2. Корни многочлена. Теорема Безу. Кратность корня, число корней с учетом кратности не превосходит степени. Формальное и функциональное равенство многочленов. Теорема Виета.
3. Многочлены от нескольких переменных. Степень, ее инвариантность относительно линейной замены. Лемма о старшем члене.
4. Понятие уравнения множества. Алгебраические множества (линии и поверхности); пересечение и объединение алгебраических множеств. Порядок, сохранение порядка при переходе к другой системе координат. Пересечение алгебраического множества с прямой и с плоскостью.

#### 4. Прямые и плоскости. Кривые второго порядка, поверхности

1. Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность. Линейное неравенство. Пучок прямых. Формула расстояния от точки до прямой.
2. Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Линейное неравенство. Пучок плоскостей. Формула расстояния от точки до плоскости.
3. Прямая в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух прямых. Формулы для расстояния от точки до прямой (в пространстве) и между скрещивающимися прямыми.
4. Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Теоремы о фокусах и директрисах. Касательные. Оптическое свойство.
5. Цилиндрические, конические поверхности, поверхности вращения. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды. Прямолинейные образующие.

#### 5. Матрицы и системы линейных уравнений

1. Сложение матриц, умножение матрицы на число. Транспонирование. След матрицы.
2. Линейные комбинации, линейная оболочка систем векторов-столбцов (или матриц). Линейная зависимость. Ранг. Базисная подсистема. Основная теорема о рангах. Стандартный и треугольный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Строчный и столбцовый ранг матрицы. Оценка ранга суммы матриц.
3. Умножение матриц, его свойства. Суммирование, его тензорная запись. Отсутствие коммутативности умножения. Единичная матрица. Обратимые матрицы. Ранг произведения.
4. Элементарные преобразования строк и столбцов. Элементарные матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному (улучшенному ступенчатому) виду методом Гаусса.
5. Элементарные преобразования строк не меняют линейных соотношений между столбцами. Инвариантность строчного и столбцового ранга при элементарных преобразованиях. Теорема о ранге матрицы.
6. Невырожденные матрицы. Критерий обратимости. Алгоритм нахождения обратной матрицы элементарными преобразованиями. Базисный минор.
7. СЛУ. Разные виды заданий: матричное уравнение, линейная комбинация столбцов, матрица коэффициентов и расширенная матрица. Критерий совместности Кронекера-Капелли.
8. Однородные СЛУ, фундаментальная система решений (ФСР) и общее решение однородной СЛУ. Структура общего решения СЛУ. Алгоритм решения СЛУ методом Гаусса. Мощность ФСР.
9. Восстановление СЛУ по множеству решений. Любая линейная оболочка - множество решений некоторой однородной СЛУ.

#### 6. Группы

1. Понятия полугруппы и группы. Абелевы группы. Аддитивная и мультипликативная форма записи. Порядок группы. Определения изоморфизма, гомоморфизма. Прямое произведение (прямая сумма). Обратимые элементы полугруппы. Подгруппы. Порождающие множества.
2. Примеры: числа по сложению и умножению; матрицы по сложению и умножению. Группы преобразований. Понятие действия группы на множестве. Понятие о представлении группы.
3. Порядок элемента. Циклические группы, их классификация. Количество порождающих элементов в  $(\mathbb{Z}_n, \{+\})$  равно  $\varphi(n)$ . Подгруппы циклической группы.

4. Симметрическая группа  $S_n$ . Независимые циклы. Число инверсий, четность перестановки. Знакопеременная подгруппа  $A_n$ .

5. Левые смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа, ее следствия: порядок элемента --- делитель порядка группы; описание групп простого порядка; теоремы Ферма и Эйлера (в теории чисел).

## 7. Кольца и поля

1. Теория делимости в  $\mathbb{Z}$ . Простые числа. НОД. Алгоритм Евклида, линейное представление НОД. Разложение на простые множители и его единственность. Китайская теорема об остатках.

2. Арифметика по модулю  $n$ . Кольцо  $\mathbb{Z}_n$ .  $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_m$  при  $(k,m)=1$ .  $\mathbb{Z}_n$  - поле тогда и только тогда, когда  $n$  - простое. Характеристика поля.

3. Поле комплексных чисел, сопряжение. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая запись. Умножение, возведение в степень, обращение. Извлечение корней. Группа корней  $n$ -й степени из 1. Матрицы с комплексными коэффициентами.

4. Кольцо  $\mathbb{F}[X]$  многочленов над полем. Неприводимые многочлены, НОД. Разложение на неприводимые сомножители и его единственность. Неприводимые многочлены над  $\mathbb{C}$  и над  $\mathbb{R}$ .

## 8. Определитель

1. Детерминант (определитель) матрицы как полилинейная и кососимметричная функция столбцов. Явная формула (через элементы матрицы).

2. Изменение определителя при элементарных преобразованиях столбцов. Определитель треугольной матрицы. Критерий обратимости --  $\neq 0$ . Определитель транспонированной матрицы.

3. Определитель произведения матриц. Определитель матрицы с углом нулей. Разложение определителя по строке, столбцу.

4. Правило Крамера для решения СЛУ (с невырожденной матрицей коэффициентов), формула обратной матрицы.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. Ч. 2 : Линейная алгебра : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2009, 2012 .— 368 с.
2. Курс алгебры [Текст] / Э. Б. Винберг - МЦНМО, 2017
3. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, учебник /Д. В. Беклемишев. Санкт-Петербург, Лань, 2020

### Дополнительная литература

1. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособ. ; рек. Уч.-метод. сов. МФТИ / В. И. Чехлов ; М-во образования РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2000 .— 260 с.
2. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 3-е изд. — М. : Физматлит, 2004 .— Ч. 2 : Линейная алгебра. - 2004. - 368 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.math.mipt.ru>

<http://lib.mipt.ru>

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладные математика и физика  
**профиль подготовки:** Физика и педагогика  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
кафедра высшей математики  
**курс:** 1  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** П.А. Кожевников, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Аналитическая геометрия» обучающийся должен:

### знать:

- Методические основы изучения и использования математических утверждений;
- основы учебного курса.

### уметь:

- Изучать, использовать и применять определения, теоремы;
- изучать и формировать системы математических знаний;
- доказывать основные теоремы курса;
- решать стандартные задачи на применение изученных утверждений.

### владеть:

- Четким представлением о курсе.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы, отражаются в электронной системе контроля и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течение учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умение решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

\*Прикрепляется БРС по изучаемому предмету.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся



1. Вычислите. Являются ли строки этого определителя линейно зависимыми? Если да, укажите эту линейную зависимость.
2. В треугольнике ABC медианы АВ и ВК пересекаются в точке О. Найдите координаты векторов АМ и ВО в базисе СА, СВ.
3. Запишите уравнение прямой  $[r, \vec{a}] = b$  в векторно-параметрическом виде.
4. Укажите какой-нибудь нормальный вектор прямой на плоскости, имеющей в прямоугольной системе координат угловой коэффициент К.
5. Является ли кривая, заданная уравнением  $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y = 0$ , центральной? Найдите координаты ее центра. Определите тип кривой.
6. Пусть А и В – две квадратные матрицы одного размера. Обязаны ли совпадать ранги матриц АВ и ВА?
7. Запишите общее решение уравнения  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  в виде суммы частного решения и произвольной линейной комбинации фундаментальной системы решений.
8. Образуется ли линейное пространство с обычными операциями сложения и умножения на число:
  - а) множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке  $[a, b]$ ;
  - б) множество функций, определенных на  $[a, b]$  и таких, что  $f(a) = 0$ .

Примеры экзаменационных билетов:

Билет 1.

- 1) Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь линейной зависимости с коллинеарностью или компланарностью векторов.
- 2) На эллипсе  $x^2 + 3y^2 = 3$  найти точку М, ближайшую к прямой  $x + y = 10$ . Вычислить расстояние от точки М до этой прямой. Система координат декартова прямоугольная.

Билет 2.

- 1) Скалярное произведение и его свойства. Ортогональные проекции. Выражение скалярного произведения в координатах. Биортогональный базис.
- 2) При каком значении параметра  $\alpha$  точки  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(3, 4, 5)$ ,  $C(1, -1, 4)$ ,  $D(2, 3, \alpha)$  лежат в одной плоскости? Написать общее уравнение плоскости при найденном значении параметра. Система координат общая декартова.

## Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется один час (астрономический) на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

## Балльно-рейтинговая система оценки знаний

Дисциплина: «Аналитическая геометрия», 1 курс, 1 семестр, экзамен

Кафедра: высшей математики

№	Виды занятий	Сумма баллов
1.	Контрольная работа № 1 по сдаче 1 задания	0 — 6
2.	Контрольная работа № 2 по сдаче 2 задания	0 — 6
3.	Контрольная работа № 3 по сдаче 3 задания	0 — 6
4.	Задание № 1	0 — 2
5.	Задание № 2	0 — 2
6.	Задание № 3	0 — 2
7.	Проверка теоретических знаний	0 — 3
8.	Работа на семинарах	0 — 3
9.	Итоговый контроль. Экзамен (устный ответ)	0 — 70
	<b>ИТОГО</b>	<b>0 — 100</b>

**Результативная работа на практикуме 0 — 3 балла.** Если при учете этого вида работы итоговая сумма за работу в семестре превосходит 30 баллов, то считать ее равной 30 баллам.

Сумма баллов за устный ответ начисляется по формуле  $N \cdot 7$ , где  $N > 2$  — предварительная оценка за устный ответ по десятибалльной шкале. Если  $N = 1, 2$ , то итоговая оценка совпадает с  $N$ .

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системе.

Баллы БРС	Оценки	
93 — 100	10	отлично
86 — 92	9	
79 — 85	8	
72 — 78	7	хорошо
65 — 71	6	
58 — 64	5	
51 — 57	4	удовлетворительно
44 — 50	3	
30 — 43	2	неудовлетворительно
0 — 29	1	

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».