

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Проректор по учебной работе и  
довузовской подготовке**

**А.А. Воронов**

|                            |  |
|----------------------------|--|
|                            | <b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>   |
| <b>по дисциплине:</b>      | Аналитическая геометрия  |
| <b>по направлению:</b>     | Прикладные математика и физика   |
| <b>профиль подготовки:</b> | Биофизика и биоинформатика<br>Физтех-школа Биологической и Медицинской Физики<br>кафедра высшей математики |
| <b>курс:</b>               | 1  |
| <b>квалификация:</b>       | бакалавр   |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 3

Программу составили:

Д.В. Беклемишев, д-р пед. наук, профессор

А.Н. Бурмистров, канд. физ.-мат. наук, доцент

П.А. Кожевников, канд. физ.-мат. наук, доцент

О.К. Подлипский, канд. физ.-мат. наук, доцент

И.А. Чубаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

## Аннотация

Курс "Аналитическая геометрия" ориентирован на студентов первого курса бакалавриата.

В курсе "Аналитическая геометрия" изучаются основы аналитической геометрии, а также ряд разделов алгебры.

Первая часть курса посвящена изучению векторов, их свойств. Вводятся понятия базиса, системы координат, скалярного, векторного и смешанного произведения.

Во второй части курса изучаются алгебраические линии на плоскости и поверхности в пространстве. Изучается геометрия прямых и плоскостей, решаются позиционные задачи. Рассматриваются линии и поверхности второго порядка, их основные свойства.

Третья часть курса посвящена изучению аффинных и ортогональных преобразований плоскости. Вводится понятие группы. Развивается теория матриц и их определителей. Изучается обратная матрица. Рассматриваются

системы линейных уравнений для случая, когда матрица системы - невырожденная квадратная. Выводятся формулы Крамера.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Ознакомление слушателей с основами аналитической геометрии и подготовка к изучению других математических курсов – дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, уравнений математической физики, функционального анализа, аналитической механики, теоретической физики, методов оптимального управления и др.

### Задачи дисциплины

- ☐ Приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области векторной алгебры, матричной алгебры;
- ☐ подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- ☐ приобретение навыков в применении методов аналитической в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции   | Индикаторы достижения компетенции  |
|--|--|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач              | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи  |
|  | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи  |
|  | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки   |
|  | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки   |
| УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни | УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития |

## 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- ☐ Определение вектора и операций с векторами (скалярное, векторное и смешанное произведение), их свойства и формулы, связанные с этими операциями;
- ☐ уравнения прямых линий, плоскостей, линий и поверхностей второго порядка;
- ☐ свойства линий и поверхностей второго порядка;
- ☐ свойства аффинных и ортогональных преобразований плоскости.

уметь:

- ☐ Применять векторную алгебру к решению геометрических и физических задач;
- ☐ решать геометрические задачи методом координат, применять линейные преобразования к решению геометрических задач;
- ☐ производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты.

владеть:

- ☐ Общими понятиями и определениями, связанными с векторами: линейная независимость, базис, ориентация плоскости и пространства;
- ☐ ортогональной и аффинной классификацией линий и поверхностей второго порядка.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| №                     | Тема (раздел) дисциплины            | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. |          |                 |                |
|-----------------------|-------------------------------------|---|----------|-----------------|----------------|
|                       |                                     | Лекции  | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1                     | Векторная алгебра                   | 8   | 8        |                 | 8              |
| 2                     | Метод координат                     | 4   | 4        |                 | 8              |
| 3                     | Прямая и плоскость                  | 8   | 8        |                 | 8              |
| 4                     | Линии и поверхности второго порядка | 6   | 8        |                 | 13             |
| 5                     | Преобразования плоскости            | 4   | 2        |                 | 8              |
| Итого часов           |                                     | 30  | 30       |                 | 45             |
| Подготовка к экзамену |                                     | 30 час.   |          |                 |                |
| Общая трудоёмкость    |                                     | 135 час., 3 зач.ед.   |          |                 |                |

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

###### 1. Векторная алгебра

1.1. Понятие о линейных пространствах и их основных свойствах. Матрицы. Операции сложения и умножения матриц на числа. Определители квадратных матриц 2-го и 3-го порядков.

1.2. Направленные отрезки и действия над ними. Операции сложения направленных отрезков и умножения их на числа. Их свойства. Векторное пространство. Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность операций с векторами.

1.3. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис, координаты векторов в базисе. Координатное представление векторов. Операции с векторами в координатном представлении. Изменение координат вектора при замене базиса. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов в координатной форме.

1.4. Ортогональные проекции векторов и их свойства. Скалярное произведение, его свойства, выражение в координатах. Формулы для определения расстояния между двумя точками и угла между двумя направлениями.

1.5. Ориентированные тройки векторов. Векторное произведение, его свойства, выражение в ортонормированном базисе. Геометрический смысл векторного произведения. Взаимный базис. Выражение векторного произведения в произвольном базисе.

1.6. Смешанное произведение векторов, его свойства, выражение в произвольном и ортонормированном базисах. Геометрический смысл смешанного произведения. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Формула двойного векторного произведения. Вывод формулы двойного векторного произведения.

## 2. Метод координат

2.1. Общая декартова и прямоугольная системы координат. Изменение координат точки при замене системы координат. Матрица перехода и ее свойства. Формулы перехода между прямоугольными системами координат на плоскости. Полярная, цилиндрическая и сферическая системы координат. Формулы перехода между ними и прямоугольной системой координат.

## 3. Прямая и плоскость

3.1. Прямая на плоскости и в пространстве. Векторные и координатные способы задания прямой на плоскости и в пространстве. Плоскость в пространстве. Способы задания плоскости в пространстве. Позиционные и метрические задачи о прямых и плоскостях в пространстве. Перевод одной формы описания прямых и плоскостей в пространстве в другую форму. Пучок прямых. Пучок и связка плоскостей. Линейные неравенства.

## 4. Линии и поверхности второго порядка

4.1. Координатное задание линий на плоскости, поверхностей в пространстве. Алгебраические линии и поверхности. Инвариантность порядка алгебраических линий на плоскости при замене декартовой системы координат. Координатное задание линий в пространстве. Инвариантность порядка алгебраических линий и поверхностей в пространстве при замене декартовой системы координат. Координатное задание фигур на плоскости и тел в пространстве.

4.2. Алгебраические линии 2-го порядка на плоскости. Их ортогональная классификация. Приведение уравнения линии 2-го порядка к каноническому виду. Центральные линии. Сопряженные диаметры. Асимптотические направления. Инварианты.

4.3. Эллипс, гипербола и парабола. Их свойства. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе. Уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат.

4.4. Эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды. Их основные свойства. Прямолинейные образующие. Цилиндры и конусы. Поверхности вращения. Классификация и канонические уравнения алгебраических поверхностей 2-го порядка.

## 5. Преобразования плоскости

5.1. Отображения и преобразования плоскости. Композиция (произведение) отображений. Обратное отображение. Взаимно однозначное отображение. Линейные преобразования плоскости и их свойства. Координатное представление линейных преобразований плоскости.

5.2. Аффинные преобразования и их геометрические свойства. Главные направления аффинного преобразования и их нахождение. Геометрический смысл модуля и знака определителя матрицы аффинного преобразования. Аффинная классификация линий 2-го порядка на плоскости.

5.3. Ортогональные преобразования и их свойства. Разложение аффинного преобразования в произведение ортогонального и двух сжатий. Понятие о группе. Группа аффинных преобразований плоскости и ее подгруппы.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев .— 12-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2008, 2009 .— 312 с.
2. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— М. : МЦНМО, 2012 .— Ч. 1 : Основы алгебры. - 2012. - 272 с.
3. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МФТИ, 2006 .— 272 с.
4. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МФТИ, 2006 .— 298 с.
5. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособ. ; рек. Уч.-метод. сов. МФТИ / В. И. Чехлов ; М-во образования РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М : МФТИ, 2000 .— 260 с.
6. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособие / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под ред. Д. В. Беклемишева .— 2-е изд., перераб. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001 .— 496 с.
7. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : Основные структуры алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2009, 2012 .— 272 с.

#### Дополнительная литература

1. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. Ч. 2 : Линейная алгебра : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2009, 2012 .— 368 с.

#### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://www.math.mipt.ru>

<http://lib.mipt.ru>

#### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

|                            |  |
|----------------------------|--|
| <b>по направлению:</b>     | Прикладные математика и физика   |
| <b>профиль подготовки:</b> | Биофизика и биоинформатика<br>Физтех-школа Биологической и Медицинской Физики<br>кафедра высшей математики |
| <b>курс:</b>               | 1  |
| <b>квалификация:</b>       | бакалавр   |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

**Разработчики:**

Д.В. Беклемишев, д-р пед. наук, профессор  
А.Н. Бурмистров, канд. физ.-мат. наук, доцент  
П.А. Кожевников, канд. физ.-мат. наук, доцент  
О.К. Подлипский, канд. физ.-мат. наук, доцент  
И.А. Чубаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции   | Индикаторы достижения компетенции  |
|--|--|
| УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач              | УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи  |
|  | УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи  |
|  | УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки   |
|  | УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки   |
| УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни | УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития |

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Аналитическая геометрия» обучающийся должен:

### знать:

- ☐ Определение вектора и операций с векторами (скалярное, векторное и смешанное произведение), их свойства и формулы, связанные с этими операциями;
- ☐ уравнения прямых линий, плоскостей, линий и поверхностей второго порядка;
- ☐ свойства линий и поверхностей второго порядка;
- ☐ свойства аффинных и ортогональных преобразований плоскости.

### уметь:

- ☐ Применять векторную алгебру к решению геометрических и физических задач;
- ☐ решать геометрические задачи методом координат, применять линейные преобразования к решению геометрических задач;
- ☐ производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты.

### владеть:

- ☐ Общими понятиями и определениями, связанными с векторами: линейная независимость, базис, ориентация плоскости и пространства;
- ☐ ортогональной и аффинной классификацией линий и поверхностей второго порядка.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы, отражаются в электронной системе контроля и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течение учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умение решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

\*Прикрепляется БРС по изучаемому предмету.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Вычислите. Являются ли строки этого определителя линейно зависимыми? Если да, укажите эту линейную зависимость.
2. В треугольнике ABC медианы АВ и ВК пересекаются в точке О. Найдите координаты векторов АМ и ВО в базисе СА, СВ.
3. Запишите уравнение прямой  $[r, \vec{a}] = b$  в векторно-параметрическом виде.
4. Укажите какой-нибудь нормальный вектор прямой на плоскости, имеющей в прямоугольной системе координат угловой коэффициент К.
5. Является ли кривая, заданная уравнением  $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y = 0$ , центральной? Найдите координаты ее центра. Определите тип кривой.
6. Пусть А и В – две квадратные матрицы одного размера. Обязаны ли совпадать ранги матриц АВ и ВА?
7. Запишите общее решение уравнения  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  в виде суммы частного решения и произвольной линейной комбинации фундаментальной системы решений.
8. Образует ли линейное пространство с обычными операциями сложения и умножения на число:
  - а) множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке  $[a, b]$ ;
  - б) множество функций, определенных на  $[a, b]$  и таких, что  $f(a) = 0$ .

##### Примеры экзаменационных билетов

###### Билет № 1

- 1) Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь линейной зависимости с коллинеарностью или компланарностью векторов.
- 2) На эллипсе  $x^2 + 3y^2 = 3$  найти точку М\$, ближайшую к прямой  $x + y = 10$ . Вычислить расстояние от точки М\$ до этой прямой. Система координат декартова прямоугольная.

###### Билет № 2

- 1) Скалярное произведение и его свойства. Ортогональные проекции. Выражение скалярного произведения в координатах. Биортогональный базис.
- 2) При каком значении параметра  $\alpha$  точки  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(3, 4, 5)$ ,  $C(1, -1, 4)$ ,  $D(2, 3, \alpha)$  лежат в одной плоскости? Написать общее уравнение плоскости при найденном значении параметра. Система координат общая декартова.

##### Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;



оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется один час (астрономический) на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

## Балльно-рейтинговая система оценки знаний

Дисциплина: «Аналитическая геометрия», 1 курс, 1 семестр, экзамен

Кафедра: высшей математики

| №  | Виды занятий                              | Сумма баллов   |
|----|---|----------------|
| 1. | Контрольная работа № 1 по сдаче 1 задания | 0 — 6          |
| 2. | Контрольная работа № 2 по сдаче 2 задания | 0 — 6          |
| 3. | Контрольная работа № 3 по сдаче 3 задания | 0 — 6          |
| 4. | Задание № 1                               | 0 — 2          |
| 5. | Задание № 2                               | 0 — 2          |
| 6. | Задание № 3                               | 0 — 2          |
| 7. | Проверка теоретических знаний             | 0 — 3          |
| 8. | Работа на семинарах                       | 0 — 3          |
| 9. | Итоговый контроль. Экзамен (устный ответ) | 0 — 70         |
|    | <b>ИТОГО</b>                              | <b>0 — 100</b> |

**Результативная работа на практикуме 0 — 3 балла.** Если при учете этого вида работы итоговая сумма за работу в семестре превосходит 30 баллов, то считать ее равной 30 баллам.

Сумма баллов за устный ответ начисляется по формуле  $N \cdot 7$ , где  $N > 2$  — предварительная оценка за устный ответ по десятибалльной шкале. Если  $N = 1, 2$ , то итоговая оценка совпадает с  $N$ .

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системе.

| Баллы БРС | Оценки |                     |
|-----------|--------|---------------------|
| 93 — 100  | 10     | отлично             |
| 86 — 92   | 9      |                     |
| 79 — 85   | 8      |                     |
| 72 — 78   | 7      | хорошо              |
| 65 — 71   | 6      |                     |
| 58 — 64   | 5      |                     |
| 51 — 57   | 4      | удовлетворительно   |
| 44 — 50   | 3      |                     |
| 30 — 43   | 2      | неудовлетворительно |
| 0 — 29    | 1      |                     |

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».