

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Математическая статистика
<b>по направлению:</b>	Программная инженерия
<b>профиль подготовки:</b>	Разработка программно-информационных систем высшая школа программной инженерии кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 48 час.

Всего часов: 108, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: М.П. Савелов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 11.04.2023

## Аннотация

Курс математической статистики является обязательной дисциплиной базовой части. В рамках данной дисциплины студенты проходят следующие темы: сходимости случайных векторов, статистики и оценки, методы нахождения оценок, эффективные оценки, достаточные статистики и оптимальные оценки, байесовские оценки, доверительное оценивание, линейная регрессионная модель, проверка гипотез и равномерно наиболее мощные критерии, критерии, основанные на нормальности, критерии согласия, критерии проверки независимости.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- изучение математических и теоретических основ современного статистического анализа, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области анализа статистических задач прикладной математики, физики и экономики.

#### Задачи дисциплины

- изучение математических основ математической статистики;
- приобретение слушателями теоретических знаний в области современного статистического анализа.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия математической статистики;
- основные подходы к сравнению оценок параметров неизвестного распределения;
- асимптотические и неасимптотические свойства оценок параметров неизвестного распределения;
- основные методы построения оценок с хорошими асимптотическими свойствами: метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод выборочных квантилей;
- понятие эффективных оценок и неравенство информации Рао-Крамера;
- определение и главные свойства условного математического ожидания случайной величины относительно сигма-алгебры или другой случайной величины;
- определение общей линейной регрессионной модели и метод наименьших квадратов;
- многомерное нормальное распределение и его основные свойства;
- базовые понятия теории проверки статистических гипотез;
- лемму Неймана – Пирсона и теорему о монотонном отношении правдоподобия;
- критерий хи-квадрат Пирсона для проверки простых гипотез в схеме Бернулли.

уметь:

- обосновывать асимптотические свойства оценок с помощью применения предельных теорем теории вероятностей;
- строить оценки с хорошими асимптотическими свойствами для параметров неизвестного распределения по заданной выборке из него;
- находить байесовские оценки по заданному априорному распределению;
- вычислять условные математические ожидания с помощью условных распределений;
- находить оптимальные оценки с помощью полных достаточных статистик;
- строить точные и асимптотические доверительные интервалы и области для параметров неизвестного распределения;
- находить оптимальные оценки и доверительные области в гауссовской линейной модели;
- строить равномерно наиболее мощные критерии в случае параметрического семейства с монотонным отношением правдоподобия;
- строить F-критерий для проверки линейных гипотез в линейной гауссовской модели.

владеть:

- основными методами математической статистики построения точечных и доверительных оценок: методом моментов, выборочных квантилей, максимального правдоподобия, методом наименьших квадратов, методом центральной статистики;
- навыками асимптотического анализа статистических критериев;
- навыками применения теорем математической статистики в прикладных задачах физики и экономики.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Вероятностно-статистическая модель.	5	5		8
2	Основная задача математической статистики.	5	5		8
3	Различные виды сходимостей случайных векторов.	5	5		8
4	Статистики и оценки.	5	5		8
5	Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения.	5	5		8
6	F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели.	5	5		8
Итого часов		30	30		48
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		108 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

###### 1. Вероятностно-статистическая модель.

Примеры несмещенных и состоятельных оценок (моменты, дисперсия); смещенных, но состоятельных оценок; несостоятельных, но несмещенных оценок. Оценки функций от параметров. Пример ситуации, в которой не существует несмещенной оценки некоторой функции от параметра.

## 2. Основная задача математической статистики.

Байесовская и минимаксная стратегии. Минимаксность байесовской стратегии с постоянным риском.

## 3. Различные виды сходимостей случайных векторов.

Теоремы об асимптотической нормальности выборочного среднего и медианы в модели симметричного распределения с неизвестным параметром сдвига.

## 4. Статистики и оценки.

Напоминание правила трех сигм и пояснения в терминах этого правила. Пример со «смешанным» нормальным распределением (медиана vs. выборочное среднее).

## 5. Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения.

Оценки максимального правдоподобия (о.м.п.) и их свойства (состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность). О.м.п. для параметра сдвига в распределении Лапласа как пример асимптотически нормальной о.м.п. в нерегулярной модели.

## 6. F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели.

Линейная гауссовская модель и метод наименьших квадратов. Основные свойства многомерного гауссовского закона. Распределение (центральное) хи-квадрат Пирсона и лемма о круговом гауссовском распределении. Линейная гауссовская модель, полные достаточные статистики.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Математическая статистика [Текст] : [учебник для вузов] / А. А. Боровков .— [3-е изд., испр.] .— М. : Физматлит, 2007 .— 704 с.
2. Введение в математическую статистику [Текст] : [учебник для вузов] / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев .— М. : ЛКИ, 2010, 2014, 2015 .— 600 с.
3. Теория вероятностей и математическая статистика, Электронная версия печатной публикации / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. — Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2005

### Дополнительная литература

1. Наглядная математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов / М. Б. Лагутин .— 2-е изд., испр. — М. : Бином. Лаб. знаний, 2009 .— 472 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Программная инженерия
<b>профиль подготовки:</b>	Разработка программно-информационных систем высшая школа программной инженерии МФТИ - Яндекс кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** М.П. Савелов, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математическая статистика» обучающийся должен:

### знать:

- основные понятия математической статистики;
- основные подходы к сравнению оценок параметров неизвестного распределения;
- асимптотические и неасимптотические свойства оценок параметров неизвестного распределения;
- основные методы построения оценок с хорошими асимптотическими свойствами: метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод выборочных квантилей;
- понятие эффективных оценок и неравенство информации Рао-Крамера;
- определение и главные свойства условного математического ожидания случайной величины относительно сигма-алгебры или другой случайной величины;
- определение общей линейной регрессионной модели и метод наименьших квадратов;
- многомерное нормальное распределение и его основные свойства;
- базовые понятия теории проверки статистических гипотез;
- лемму Неймана – Пирсона и теорему о монотонном отношении правдоподобия;
- критерий хи-квадрат Пирсона для проверки простых гипотез в схеме Бернулли.

### уметь:

- обосновывать асимптотические свойства оценок с помощью применения предельных теорем теории вероятностей;
- строить оценки с хорошими асимптотическими свойствами для параметров неизвестного распределения по заданной выборке из него;
- находить байесовские оценки по заданному априорному распределению;
- вычислять условные математические ожидания с помощью условных распределений;
- находить оптимальные оценки с помощью полных достаточных статистик;
- строить точные и асимптотические доверительные интервалы и области для параметров неизвестного распределения;
- находить оптимальные оценки и доверительные области в гауссовской линейной модели;
- строить равномерно наиболее мощные критерии в случае параметрического семейства с монотонным отношением правдоподобия;
- строить F-критерий для проверки линейных гипотез в линейной гауссовской модели.

### владеть:

- основными методами математической статистики построения точечных и доверительных оценок: методом моментов, выборочных квантилей, максимального правдоподобия, методом наименьших квадратов, методом центральной статистики;
- навыками асимптотического анализа статистических критериев;
- навыками применения теорем математической статистики в прикладных задачах физики и экономики.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе выполнения студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течение учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умение решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Основная задача математической статистики. Параметрическая статистика. Оценки («статистики»). Вариационный ряд и порядковые статистики. Напоминание о распределении порядковых статистик.
2. Несмещенность и состоятельность оценок. Примеры несмещенных и состоятельных оценок (моменты, дисперсия); смещенных, но состоятельных оценок; несостоятельных, но несмещенных оценок. Оценки функций от параметров. Пример ситуации, в которой не существует несмещенной оценки некоторой функции от параметра.
3. Эмпирическая функция распределения. Ее несмещенность и состоятельность по отношению к теоретической функции распределения.
4. Функция штрафа (потерь) и функция риска. Байесовская и минимаксная стратегии. Минимаксность байесовской стратегии с постоянным риском.
5. Байесовская оценка в схеме Бернулли. Минимаксная оценка в схеме Бернулли (статистика Ходжеса – Лемана). Сравнение статистики Ходжеса – Лемана с выборочным средним.
6. Асимптотическая нормальность оценки. Теоремы об асимптотической нормальности выборочного среднего и медианы в модели симметричного распределения с неизвестным параметром сдвига.
7. Относительная асимптотическая эффективность. Напоминание правила трех сигм и пояснения в терминах этого правила. Пример со «смешанным» нормальным распределением (медиана vs. выборочное среднее).
8. Условия регулярности и неравенство Рао – Крамера (случай несмещенной оценки). Информация Фишера. Эффективные и сверхэффективные оценки.
9. Метод моментов. Состоятельность оценки.
10. Метод максимального правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия (о.м.п.) и их свойства (состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность). О.м.п. для параметра сдвига в распределении Лапласа как пример асимптотически нормальной о.м.п. в нерегулярной модели.
11. О.м.п. в стандартных моделях (биномиальная, нормальная, Коши и др.).
12. Достаточные статистики в дискретном случае. Критерий факторизации. Примеры.
13. Условное математическое ожидание относительно разбиения. Условные плотности. Свойства условного математического ожидания (б/д в «непрерывном» случае, но с доказательством в случае условного математического ожидания относительно разбиения).
14. Достаточные статистики в общем случае: общий критерий факторизации как определение. Примеры.
15. Экспоненциальное семейство. Пессимистическая теорема (б/д).
16. Теорема Колмогорова – Блекуэлла – Рао об улучшении несмещенной оценки.
17. Полные статистики. Критерий полноты и достаточности для экспоненциального семейства (б/д).



18. Теорема Гливенко – Кантелли (формулировка). Общая задача о равномерной сходимости в законах больших чисел. Задача о треугольниках на плоскости. Размерность Вапника – Червоненкиса. Пример с пространством и открытыми полупространствами. Две теоремы Вапника – Червоненкиса (б/д). Теорема Гливенко – Кантелли как частный случай теоремы Вапника – Червоненкиса. Теорема о треугольниках как частный случай теоремы Вапника – Червоненкиса.
19. Статистика Колмогорова и ее независимость от вида непрерывной функции распределения (только строго монотонный случай). Асимптотическая теорема Колмогорова (б/д).
20. Точные и асимптотические доверительные интервалы. Односторонние и двусторонние интервалы.
21. Квантили распределений. Напоминание распределения хи-квадрат. Распределение Стьюдента.
22. Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения: для среднего при известной дисперсии, для дисперсии при известном среднем и для одновременно неизвестных среднего и дисперсии.
23. Доверительные интервалы для квантилей.
24. Критерий согласия Колмогорова.
25. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона.
26. Сравнение двух простых гипотез. Ошибки первого и второго рода.
27. Случай абсолютно непрерывных распределений: отношение правдоподобия и теорема Неймана – Пирсона.
28. Критерий однородности Смирнова для двух независимых выборок.
29. Критерий однородности хи-квадрат для нескольких независимых выборок.
30. Проверка равенства средних у двух нормальных выборок с известными дисперсиями; с неизвестными дисперсиями. Проверка равенства дисперсий у двух нормальных выборок с неизвестными средними. Распределение Фишера.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения дифференциального зачета обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.