

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор высшей школы
программной инженерии
А.В. Малеев**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория групп
по направлению:	Программная инженерия
профиль подготовки:	Разработка программно-информационных систем высшая школа программной инженерии высшая школа программной инженерии МФТИ - Яндекс
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 48 час.

Всего часов: 108, всего зач. ед.: 3

Программу составил: А.В. Созыкин, канд. техн. наук

Программа обсуждена на заседании высшей школы программной инженерии МФТИ - Яндекс 28.04.2023

Аннотация

Первая тема курса — вводная. Здесь вводятся понятия смежных классов по подгруппе прежде всего для доказательства теоремы Лагранжа и ее следствий. В частности, доказывается малая теорема Ферма и теорема Эйлера.

Вторая тема посвящена изучению гомоморфизмов групп и нормальных подгрупп. Основной результат — теорема о гомоморфизмах, из которой выводятся теоремы об изоморфизмах (или теорема о соответствии, описывающая подгруппы факторгруппы).

Следующая, третья тема — «Действия групп на множестве». Рассмотрены разные определения действия и доказана их эквивалентность. Рассмотрены такие классические действия, как действие группы на себе левыми (правыми) сдвигами, действие сопряжениями. Один из важнейших примеров действий группы в линейном пространстве — это ее представление. Доказана формула орбит и лемма Бернсайда о среднем количестве неподвижных точек действия. Среди приложений этой темы — формула классов и некоторые результаты о p -группах.

Четвертая тема посвящена структурной теории групп. Изучены такие конструкции, как прямое и полупрямое произведения подгрупп. Здесь вводится понятие коммутанта (или производной подгруппы) и связанные с ним классы разрешимых и нильпотентных групп. Приводится критерий разрешимости. Доказывается нетривиальность центра у p -групп.

В следующей, пятой теме, рассматриваются свободные группы и их факторгруппы. Вводится задание группы образующими и определяющими соотношениями. Приведены примеры таких заданий для некоторых известных конечных групп.

Очень важной для понимания теории групп в целом является тема «Теоремы Силова». Эти теоремы — основной инструмент для исследования структуры конечных групп, применяемый для решения многих задач. Показана вложимость p -подгруппы в силовскую.

Наконец, седьмая тема посвящена классификации конечнопорожденных абелевых групп.

Отметим, что идеи и методы теории групп находят применение не только внутри математики. Многие современные разделы физики (например, физика элементарных частиц и квантовая механика) базируются на теории групп.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- ознакомление слушателей с основными понятиями и методами теории групп, формирование у них доказательного и логического мышления, подготовка к изучению других математических курсов — теория колец и полей, теория Галуа и др.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории групп;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов теории групп в топологии, комбинаторике и других разделах математики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-7 Способен применять в практической деятельности основные концепции, принципы, теории и факты, связанные с информатикой	ОПК-7.3 Умеет выявлять узкие места в процессе разработки и предлагать методы и инструменты для его оптимизации
ПК-2 Способен формализовать и алгоритмизировать поставленную задачу	ПК-2.1 Способен формализовать и алгоритмизировать поставленную задачу

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- определения группы, гомоморфизма групп, действия группы на множестве, разрешимой и простой группы, p -группы, а также связанные с ними основные понятия;
- основные конструкции теории групп и их свойства: смежные классы по подгруппе, основные примеры действия группы на множестве, прямое произведение групп, группа автоморфизмов данной группы, коммутант и центр группы, свободные группы, задание группы образующими и соотношениями;
- основные теоретические факты, относящиеся к вышеперечисленным понятиям: теорема Лагранжа, теоремы о гомоморфизмах, формула орбит и лемма Бернсайда, теоремы Силова, теорема о строении конечнопорождённых абелевых групп.

уметь:

- выявлять теоретико-групповую сущность поставленной математической задачи;
- применять основные методы теории групп к решению прикладных задач в разных областях математики;
- производить теоретико-групповые вычисления, находить центр, коммутант группы и её силовские подгруппы, использовать лемму Бернсайда для нахождения числа орбит действия;
- проводить теоретические рассуждения с использованием основных понятий теории групп.

владеть:

- логическим мышлением, методами доказательств математических утверждений;
- методами применения теоретического материала, связанного с основными понятиями теории групп, к решению практических задач с теоретико-групповой подоплёкой;
- методами применения основных примеров действия группы на множестве, классификации конечно порождённых абелевых групп;
- методами исследования группы на разрешимость, включающими использование аппарата силовских подгрупп;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Подгруппы и связанные понятия	4	4		6
2	Гомоморфизмы и нормальные подгруппы	4	5		7
3	Действие группы на множестве	5	5		7
4	Прямое произведение групп, центр, коммутант, разрешимые группы	5	4		6
5	Свободные группы, образующие и соотношения	4	4		6
6	Теоремы Силова	3	5		8
7	Классификация конечнопорождённых абелевых групп	5	3		8
Итого часов		30	30		48
Подготовка к экзамену		0 час.			

Общая трудоёмкость	108 час., 3 зач.ед.
--------------------	---------------------

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Подгруппы и связанные понятия

Понятие группы. Примеры групп. Циклические группы и их подгруппы. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа. Следствия из теоремы Лагранжа: порядок элемента и подгруппы, малая теорема Ферма, теорема Эйлера.

2. Гомоморфизмы и нормальные подгруппы

Гомоморфизмы групп, ядро и образ гомоморфизма. Нормальные подгруппы, факторгруппа. Теоремы о гомоморфизмах.

3. Действие группы на множестве

Действие группы на множестве, его свойства. Точность действия. Орбиты действия. Стационарные подгруппы (стабилизаторы). Формула орбит. Примеры действия группы на множестве. Теорема Кэли о подгруппах симметрической группы. Центризатор элемента, нормализатор подгруппы.

Лемма Бернсайда о среднем количестве неподвижных элементов.

Группа автоморфизмов, нормальность подгруппы внутренних автоморфизмов.

4. Прямое произведение групп, центр, коммутант, разрешимые группы

Прямое произведение групп. Критерий разложимости группы в прямое произведение.

Центр группы, его свойства. Нециклическая факторгруппа по центру. Центр p -группы.

5. Свободные группы, образующие и соотношения

Свободная группа, её факторгруппы. Задание группы образующими и определяющими соотношениями.

Простые группы. Простота группы A_5 .

Коммутант группы. Разрешимые группы.

6. Теоремы Силова

Силовские подгруппы конечной группы. Теоремы Силова: существование силовских подгрупп, их сопряжённость, их количество. Вложимость любой p -подгруппы в силовскую. Основные применения теорем Силова.

7. Классификация конечнопорождённых абелевых групп

Конечно порождённые абелевы группы. Абелевы группы без кручения, их ранги и базисы. (Конечно порождённая) свободная абелева группа. Периодическая часть абелевой группы. Классификация конечно порождённых абелевых групп. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная доской, мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Теория групп, Электронная версия печатной публикации / А. Г. Курош. — Москва, Физматлит, 2011

Дополнительная литература

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru/catalogue/1235/> – электронная библиотека Физтеха, раздел «Теория групп».
2. <http://lib.mipt.ru/catalogue/1619/> – электронная библиотека Физтеха, раздел «Симметрия и группы».
3. <http://lib.mipt.ru/catalogue/1252/> – электронная библиотека Физтеха, раздел «Алгебра. Учебники».
4. <http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.
5. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
6. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
7. <http://benran.ru> – библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
8. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Maple, Mathcad, Scilab и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

Доп. литература: Богопольский О.В. Введение в теорию групп. Москва– Ижевск: ИКИ, 2002.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Программная инженерия
профиль подготовки:	Разработка программно-информационных систем высшая школа программной инженерии МФТИ - Яндекс высшая школа программной инженерии
курс:	4
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	А.В. Созыкин, канд. техн. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-7 Способен применять в практической деятельности основные концепции, принципы, теории и факты, связанные с информатикой	ОПК-7.3 Умеет выявлять узкие места в процессе разработки и предлагать методы и инструменты для его оптимизации
ПК-2 Способен формализовать и алгоритмизировать поставленную задачу	ПК-2.1 Способен формализовать и алгоритмизировать поставленную задачу

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория групп» обучающийся должен:

знать:

- определения группы, гомоморфизма групп, действия группы на множестве, разрешимой и простой группы, p -группы, а также связанные с ними основные понятия;
- основные конструкции теории групп и их свойства: смежные классы по подгруппе, основные примеры действия группы на множестве, прямое произведение групп, группа автоморфизмов данной группы, коммутант и центр группы, свободные группы, задание группы образующими и соотношениями;
- основные теоретические факты, относящиеся к вышеперечисленным понятиям: теорема Лагранжа, теоремы о гомоморфизмах, формула орбит и лемма Бернсайда, теоремы Силова, теорема о строении конечнопорождённых абелевых групп.

уметь:

- выявлять теоретико-групповую сущность поставленной математической задачи;
- применять основные методы теории групп к решению прикладных задач в разных областях математики;
- производить теоретико-групповые вычисления, находить центр, коммутант группы и её силовские подгруппы, использовать лемму Бернсайда для нахождения числа орбит действия;
- проводить теоретические рассуждения с использованием основных понятий теории групп.

владеть:

- логическим мышлением, методами доказательств математических утверждений;
- методами применения теоретического материала, связанного с основными понятиями теории групп, к решению практических задач с теоретико-групповой подоплёкой;
- методами применения основных примеров действия группы на множестве, классификации конечно порождённых абелевых групп;
- методами исследования группы на разрешимость, включающими использование аппарата силовских подгрупп;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Для каких групп G и элементов $g, h \in G$ отображение $\phi: G \rightarrow G$, заданное формулой $\phi(x) = gx^{-1}h$, является а) гомоморфизмом; б) автоморфизмом?
2. Дана перестановка $\sigma = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11 / 7\ 6\ 3\ 11\ 8\ 1\ 2\ 9\ 5\ 4\ 10$. Найти а) её порядок и чётность; б) её централизатор в S_{11} ; в) мощность её орбиты при действии группой A_{11} на S_{11} сопряжениями.
3. Сколько существует гомоморфизмов из $Z_4 \times Z_5$ в S_5 ?
4. Найдите количество матриц 3×3 над полем Z_p , если матрицы, отличающиеся перестановками строк и столбцов, считаются одинаковыми.
5. Пусть $G = GL_2(Z_3)$. Докажите, что а) G не изоморфна никакой подгруппе в S_5 ; б) G изоморфна некоторой подгруппе в A_{10} .
6. Разрешимые группы. Эквивалентность разных определений. Связь с разрешимостью подгрупп и факторгрупп.
7. Докажите, что любая силовская подгруппа прямого произведения двух конечных групп является произведением силовских подгрупп в сомножителях.
8. Центр группы, его свойства.
9. Разрешима ли свободная группа с тремя порождающими элементами?
10. Нецикличность факторгруппы по центру. Группы порядка p^2 .

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении дифференциального зачета обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения дифференциального зачета обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.