

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор высшей школы  
программной инженерии  
А.В. Малеев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Дополнительные главы математического анализа и линейной алгебры
<b>по направлению:</b>	Программная инженерия
<b>профиль подготовки:</b>	Разработка программно-информационных систем высшая школа программной инженерии высшая школа программной инженерии МФТИ - Яндекс
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 48 час.

Всего часов: 108, всего зач. ед.: 3

Программу составил: А.В. Созыкин, канд. техн. наук

Программа обсуждена на заседании высшей школы программной инженерии МФТИ - Яндекс 28.04.2023

## Аннотация

В современных задачах работы с данными возникают математические вопросы, не рассматриваемые в наших фундаментальных обязательных курсах. На факультативе мы познакомимся с результатами из линейной алгебры и вокруг нее, непосредственно важными для приложений. Прежде всего, имеются в виду приложения к анализу данных и машинному обучению, а также вычислительным методам, статистике и экономике. Первые вопросы, на которые мы узнаем ответы: Как обратить прямоугольную матрицу? У каких многочленов график самый компактный? Каким методом решать систему из миллиона уравнений с миллионом неизвестных? Как можно измерять векторы и линейные операторы?

В программе курса: псевдообратные матрицы (они возникают в модели линейной регрессии и в задачах вычислений), итерационные методы (и их связи с моделью случайного блуждания на графе и приложениями к интернет-поиску), матричные разложения и методы понижения размерности (в связи с алгоритмами машинного обучения), а также матричные нормы и основы теории возмущений (для оценки погрешности матричных вычислений), задачу линейного программирования (в связи с задачами оптимизации и линейной производственной моделью), задачи интерполяции и аппроксимации.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

- показать на многочисленных примерах эффективность применения методов математического анализа и линейной алгебры, изученного студентами на 1 курсе;
- выучить методы программной реализации предложенных алгоритмов. Решение задачи должно начинаться с построения математической модели, затем строится алгоритм численной (часто компьютерной) реализации и написание кода. На семинарах будет уделено внимание эффективности написания кодов и их отладки. Важную роль в профессиональной работе играет работа с графиками: их анализ, проверка правильности и эффективности алгоритма и качественные выводы из графиков.

### Задачи дисциплины

- выработать у студентов навыки использования основных понятий и результатов спектральной теории операторов для дальнейшего применения в учебной работе и профессиональной деятельности.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-7 Способен применять в практической деятельности основные концепции, принципы, теории и факты, связанные с информатикой	ОПК-7.3 Умеет выявлять узкие места в процессе разработки и предлагать методы и инструменты для его оптимизации
ПК-2 Способен формализовать и алгоритмизировать поставленную задачу	ПК-2.1 Способен формализовать и алгоритмизировать поставленную задачу

## 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- основные свойства линейных конечно-разностных уравнений и систем произвольного порядка. Умеет по корням характеристического уравнения определить асимптотику решения на бесконечности. Умеет программно реализовать модели, основанные на решении линейных и нелинейных конечно-разностных систем;
- основные свойства линейных нормированных пространств. Умеет доказывать основную теорему аппроксимации;
- основные свойства гильбертовых пространств;
- простейшие типы вырожденных критических точек. Владеет понятием свойства системы, выполняющегося в общем положении и понятием коразмерности вырождения.

уметь:

- доказывать неравенства Гельдера и Минковского;
- построить ортогональный базис в пространстве функций;
- сформулировать лемму вложения Соболева;
- программно реализовать алгоритм построения коэффициентов аппроксимирующей рациональной функции;
- построить на комплексной плоскости изолинии погрешности аппроксимации Паде - Эрмита;
- доказывать основную теорему алгебры и теорему Безу. Умеет по корням многочлена восстанавливать его коэффициенты;
- написать код программы, реализующий метод Герона;
- по матрице Гессе определить тип критической точки гладкой функции нескольких переменных и написать код для поиска корней системы уравнений методом Ньютона – Рафсона;
- применять инвариантные дифференциальные операторы к функциям и векторным полям на многомерных пространствах;
- программно реализовать алгоритм построения интерполяционного многочлена и оценить константу Лебега (усиление амплитуды шумов при интерполяции с данной сетки) и компактные алгоритмы приближенного вычисления с высоким порядком точности производных и в точках самой сетки, и в промежуточных точках, а также решение задачи интерполяции. Умеет оценивать обратимость соответствующих матриц;
- строить собственные базисы для дифференциальных операторов с постоянными и кусочно-постоянными коэффициентами при разных вариантах граничных условий. Умеет раскладывать функции по собственным базисам (в ряды Фурье).

владеть:

- понятием свойства системы, выполняющегося в общем положении и понятием коразмерности вырождения;
- основными понятиями теории метрических пространств, сходимости, непрерывных отображений. Знать различные примеры метрических пространств. Уметь доказывать теорему о существовании и единственности сжимающего отображения в полном метрическом пространстве и применять ее к конкретным примерам, в том числе с помощью программных кодов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Корни многочленов. Итерационные методы поиска корней и бассейны притяжения	3	3		4
2	Функции нескольких переменных. Условные экстремумы	3	3		5
3	Пространства функций. Собственные функции и их приложения	3	3		5

4	Конечно-разностные уравнения и системы	3	3		5
5	Случайные блуждания и игры	3	3		4
6	Интерполяция и устойчивость к шумам	3	3		5
7	Ряды Тейлора и аппроксимация Паде	3	3		5
8	Компактные разностные схемы	3	3		5
9	Квадратурные формулы	3	3		5
10	Введение в комплексный анализ	3	3		5
Итого часов		30	30		48
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		108 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

##### 1. Корни многочленов. Итерационные методы поиска корней и бассейны притяжения

Алгебраические операции над многочленами. Извлечение корня из комплексного числа. Корни многочленов. Многочлены с действительными коэффициентами. Простейшие итерационные методы решения систем линейных уравнений. Элементы общей теории итерационных методов. Метод Якоби решения задач на собственные значения. Исследование сходимости метода Якоби

##### 2. Функции нескольких переменных. Условные экстремумы

Матрица Якоби. Экстремумы и стационарные (критические) точки гладких функций нескольких переменных. Матрица Гессе. Для каких функций можно гарантировать ее симметричность. Теорема о неявной функции. Метод Ньютона – Рафсона для численного решения систем нелинейных уравнений.

Условные экстремумы. Условные экстремумы функций многих переменных. Метод множителей Лагранжа.

##### 3. Пространства функций. Собственные функции и их приложения

Линейные пространства, конечномерные и бесконечномерные. Пространства функций. Нормированные пространства. Гильбертовы пространства. Пространства Соболева. Базисы в пространстве функций: ряды Фурье и ортогональные полиномы. Собственные функции и собственные числа дифференциальных операторов.

##### 4. Конечно-разностные уравнения и системы

Динамика численности популяции. Последовательность Фибоначчи. Конечно-разностные уравнения, линейные и нелинейные. Задача Коши. Конечно-разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Случай кратных корней.

##### 5. Случайные блуждания и игры

Вероятность выигрыша. Среднее время игры. Зависимость от размера ставки в одном гейме. Игра с возможностью ничьей. Случай инерции проигрыша. Задача блужданий на решетке и уравнение Лапласа. Марковские цепи.

##### 6. Интерполяция и устойчивость к шумам

Интерполяция Лагранжа. Базис в пространстве многочленов заданной степени. Достоинства и недостатки использования многочлена высокого порядка. Константа Лебега

## 7. Ряды Тейлора и аппроксимация Паде

Аппроксимация гладкой функции рядом Тейлора. Граница области сходимости ряда Тейлора с центром в нуле для функции  $e^x$ . Пример Коши. Аппроксимация Паде – Эрмита гладкой функции и ее преимущества

## 8. Компактные разностные схемы

Компактные разностные схемы для приближенного вычисления производных от функций, заданных на дискретной сетке. Метод компактной интерполяции. Компактные разностные схемы на двумерных сетках.

## 9. Квадратурные формулы

Квадратурные формулы для приближенного вычисления интегралов от функции на отрезке: прямоугольников, трапеций, Симпсона, Гаусса

## 10. Введение в комплексный анализ

Комплексные числа. Комплексные числа, алгебраические операции над комплексными числами. Операция сопряжения, модуль комплексного числа. Геометрическая интерпретация. Тригонометрическая форма комплексного числа. Уравнение Лапласа и гармонические функции. Теорема о среднем.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Математический анализ, учебное пособие / Ю. М. Протасов. — Москва, Флинта, 2017.— URL: <https://e.lanbook.com/book/99976> (дата обращения: 14.01.2021). - Полный текст (Режим доступа : из сети МФТИ / Удаленный доступ)

Рекомендуемая литература для самостоятельного изучения:

Дифференциальные и разностные уравнения : какие явления они описывают и как их решать: учеб. пособия для вузов, Гордин, В. А., 2016

### Дополнительная литература

Рекомендуемая литература для самостоятельного изучения:

Исчисление конечных разностей : учеб. пособие для ун-тов, Гельфонд, А. О., 1967

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

- Общероссийский математический портал Math-Net.Ru

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Программная инженерия
<b>профиль подготовки:</b>	Разработка программно-информационных систем высшая школа программной инженерии МФТИ - Яндекс высшая школа программной инженерии
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	А.В. Созыкин, канд. техн. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-7 Способен применять в практической деятельности основные концепции, принципы, теории и факты, связанные с информатикой	ОПК-7.3 Умеет выявлять узкие места в процессе разработки и предлагать методы и инструменты для его оптимизации
ПК-2 Способен формализовать и алгоритмизировать поставленную задачу	ПК-2.1 Способен формализовать и алгоритмизировать поставленную задачу

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дополнительные главы математического анализа и линейной алгебры» обучающийся должен:

### знать:

- основные свойства линейных конечно-разностных уравнений и систем произвольного порядка. Умеет по корням характеристического уравнения определить асимптотику решения на бесконечности. Умеет программно реализовать модели, основанные на решении линейных и нелинейных конечно-разностных систем;
- основные свойства линейных нормированных пространств. Умеет доказывать основную теорему аппроксимации;
- основные свойства гильбертовых пространств;
- простейшие типы вырожденных критических точек. Владеет понятием свойства системы, выполняющегося в общем положении и понятием коразмерности вырождения.

### уметь:

- доказывать неравенства Гельдера и Минковского;
- построить ортогональный базис в пространстве функций;
- сформулировать лемму вложения Соболева;
- программно реализовать алгоритм построения коэффициентов аппроксимирующей рациональной функции;
- построить на комплексной плоскости изолинии погрешности аппроксимации Паде - Эрмита;
- доказывать основную теорему алгебры и теорему Безу. Умеет по корням многочлена восстанавливать его коэффициенты;
- написать код программы, реализующий метод Герона;
- по матрице Гессе определить тип критической точки гладкой функции нескольких переменных и написать код для поиска корней системы уравнений методом Ньютона – Рафсона;
- применять инвариантные дифференциальные операторы к функциям и векторным полям на многомерных пространствах;
- программно реализовать алгоритм построения интерполяционного многочлена и оценить константу Лебега (усиление амплитуды шумов при интерполяции с данной сетки) и компактные алгоритмы приближенного вычисления с высоким порядком точности производных и в точках самой сетки, и в промежуточных точках, а также решение задачи интерполяции. Умеет оценивать обратимость соответствующих матриц;
- строить собственные базисы для дифференциальных операторов с постоянными и кусочно-постоянными коэффициентами при разных вариантах граничных условий. Умеет раскладывать функции по собственным базисам (в ряды Фурье).

### владеть:



- понятием свойства системы, выполняющегося в общем положении и понятием коразмерности вырождения;
- основными понятиями теории метрических пространств, сходимости, непрерывных отображений. Знать различные примеры метрических пространств. Уметь доказывать теорему о существовании и единственности сжимающего отображения в полном метрическом пространстве и применять ее к конкретным примерам, в том числе с помощью программных кодов.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль состоит из сдачи слушателями задач для самостоятельного решения и проведения контрольных работ.

Вариант контрольной работы по теме "Многочлены".

1. Найти Н.О.Д. двух многочленов.
2. Отделить действительные корни заданного многочлена.
3. Вычислить многочлен, обратный данному с использованием расширенного алгоритма Евклида.

Вариант контрольной работы по теме "Собственные числа и вектора".

1. Найти матрицу линейного преобразования в смежном базисе.
2. Найти собственные числа и собственные вектора линейного преобразования.
3. Проверить, являются ли две заданные матрицы подобными.

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Примерный перечень вопросов к дифференцированному зачету:

1. Дать определение поля.
2. Перечислить известные Вам свойства внешнего произведения полилинейных форм.
3. Смешанное произведение трех векторов, его основные свойства и вычисление. Геометрический смысл.
4. Прямая в пространстве. Различные уравнения прямой линии: общие уравнения, канонические уравнения, уравнения прямой, проходящей через две точки, параметрические уравнения.
5. Наибольшее и наименьшее значения функций, дифференцируемой на отрезке.
6. Первообразная функции. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов.
7. Основные методы интегрирования. Метод непосредственного интегрирования.
8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку параллельной или перпендикулярно заданной прямой.
9. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной непрерывными кривыми, с помощью определенного интеграла.
10. Решить графически уравнение (систему уравнений).

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонне систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференциального зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.