

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Гармонический анализ
<b>по направлению:</b>	Программная инженерия
<b>профиль подготовки:</b>	Разработка программно-информационных систем высшая школа программной инженерии кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 18 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 108, всего зач. ед.: 3

Программу составили:

Г.Е. Иванов, д-р физ.-мат. наук, профессор

Е.Ю. Редкозубова, канд. физ.-мат. наук, доцент

С.М. Саулин, старший преподаватель

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 09.02.2023

## Аннотация

Гармонический анализ — раздел математики, изучающий свойства функций на основе их представления в виде тригонометрических рядов или интегралов. В курсе рассматриваются классические вопросы теории рядов Фурье: поточечная и равномерная сходимости, интегрирование, порядок убывания коэффициентов, обобщенное суммирование. Приводятся базовые сведения из функционального анализа, рассматриваются банаховы пространства, полные системы в общих евклидовых пространствах. Изучаются интегралы с параметром (в т.ч. и интегралы Эйлера). На их основе вводится преобразование Фурье, рассматриваются его основные свойства.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

формирование систематических знаний о методах математического анализа, расширение и углубление таких понятий как функция и ряд.

#### Задачи дисциплины

- формирование у обучающихся теоретических знаний и практических навыков в теории тригонометрических рядов Фурье и началах функционального анализа;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов математического анализа в естественнонаучных дисциплинах.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные факты теории тригонометрических рядов Фурье суммируемых функций: достаточные условия поточечной и равномерной сходимости;
- теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании, порядке убывания коэффициентов, теорему о суммировании рядов Фурье методом средних арифметических и ее применения;
- определение сходимости в метрических и линейных нормированных пространствах, примеры полных и неполных пространств;
- примеры полных систем в линейных нормированных пространствах;
- основные понятия теории рядов Фурье по ортонормированной системе в бесконечномерном евклидовом пространстве;
- определения собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра, их свойства; теоремы о непрерывности, дифференцировании и интегрировании по параметру несобственных интегралов, их применение к вычислению интегралов;
- достаточное условие представления функции интегралом Фурье;
- преобразование Фурье суммируемой функции и его свойства.

уметь:

- разлагать функции в тригонометрический ряд Фурье, исследовать его на равномерную сходимость, определять порядок убывания коэффициентов Фурье;
- исследовать полноту систем в функциональных пространствах;
- исследовать сходимость и равномерную сходимость несобственных интегралов с параметром, дифференцировать и интегрировать их по параметру;
- представлять функции интегралом Фурье; выполнять преобразования Фурье.

владеть:

- мышлением, методами доказательств математических утверждений;
- навыками работы с рядами и интегралами Фурье в различных формах;
- навыками применения изученной теории в математических и физических приложениях;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Экстремумы функций многих переменных.	4	4		3
2	Кратный интеграл Римана.	5	5		2
3	Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций.	5	5		2
4	Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических.	2	1		2
5	Метрические и линейные нормированные пространства.	4	4		2
6	Бесконечномерные евклидовы пространства.	4	4		2
7	Тригонометрические ряды Фурье для функций, интегрируемых с квадратом.	2	3		2
8	Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье.	4	4		3
Итого часов		30	30		18
Подготовка к экзамену		30 час.			

Общая трудоёмкость	108 час., 3 зач.ед.
--------------------	---------------------

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

##### 1. Экстремумы функций многих переменных.

Необходимые условия, достаточные условия существования экстремума функции многих переменных. Теорема о неявной функции. Условный экстремум функций многих переменных при наличии связей. Функция Лагранжа. Необходимые условия, достаточные условия существования условного экстремума.

##### 2. Кратный интеграл Римана.

Кратный интеграл Римана. Суммы Римана и суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Свойства интегрируемых функций: линейность интеграла, аддитивность интеграла по множествам, интегрирование неравенств, теоремы о среднем, непрерывность интеграла по множеству. Сведение кратного интеграла к повторному.

##### 3. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций.

Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для суммируемых функций, стремление их коэффициентов к нулю. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Признак Дини сходимости рядов Фурье, следствия из него. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряды Фурье в комплексной форме.

##### 4. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических.

Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

##### 5. Метрические и линейные нормированные пространства.

Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства Неполнота пространства непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах.

##### 6. Бесконечномерные евклидовы пространства.

Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условия для того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированным ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.

##### 7. Тригонометрические ряды Фурье для функций, интегрируемых с квадратом.

Тригонометрические ряды Фурье для функций, суммируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля. Полнота системы полиномов Лежандра.

#### 8. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье.

Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная доской, мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

### 6. Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 т. Т. 2 : Интегралы. Ряды : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.] .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2003, 2009, 2012 .— 504 с.
2. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 т. Т. 3 : Функции нескольких переменных : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев ; под ред. А. Д. Кудрявцева .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2003, 2012 .— 472 с.
3. Лекции по математическому анализу [Текст] / О. В. Бесов, М., Физматлит, 2020
4. Лекции по математическому анализу [Текст] : [в 2 ч.]. Ч. 2, учеб. пособие для вузов / Г. Н. Яковлев, М., Физматлит, 2001  
Иванов, Г. Е.  
Лекции по математическому анализу [Текст]. В 2 ч. Ч. 2 : учеб. пособие для вузов / Г. Е. Иванов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : МФТИ, 2011 .— 188 с.+ pdf- версия. - Предм. указ.: с. 185-187. - 400 экз. - ISBN 978-5-7417-0370-0 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ).

#### Дополнительная литература

1. Курс математического анализа [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов : доп. М-вом образования СССР. Т. 1 / С. М. Никольский .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983 .— 464 с.
2. Курс математического анализа [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов : доп. М-вом образования СССР. Т. 2 / С. М. Никольский .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983 .— 448 с.
3. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин .— 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012 .— 572 с.  
Кудрявцев, Л. Д.  
Краткий курс математического анализа [Текст]: в 2 т. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев .— 3-е изд., перераб. — М. : Физматлит, 2005 .— 424 с. -Предм. указ.: с. 420-424. - ISBN 5-9221-0185-4 (в пер.).

### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru/catalogue/1195/?page=0> – электронная библиотека Физтеха, раздел «Анализ. Учебники по элементарному анализу».
2. <http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.
3. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
4. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
5. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
6. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Программная инженерия
<b>профиль подготовки:</b>	Разработка программно-информационных систем высшая школа программной инженерии МФТИ - Яндекс кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

**Разработчики:**

Г.Е. Иванов, д-р физ.-мат. наук, профессор  
Е.Ю. Редкозубова, канд. физ.-мат. наук, доцент  
С.М. Саулин, старший преподаватель

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Гармонический анализ» обучающийся должен:

### знать:

- основные факты теории тригонометрических рядов Фурье суммируемых функций: достаточные условия поточечной и равномерной сходимости;
- теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании, порядке убывания коэффициентов, теорему о суммировании рядов Фурье методом средних арифметических и ее применения;
- определение сходимости в метрических и линейных нормированных пространствах, примеры полных и неполных пространств;
- примеры полных систем в линейных нормированных пространствах;
- основные понятия теории рядов Фурье по ортонормированной системе в бесконечномерном евклидовом пространстве;
- определения собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра, их свойства; теоремы о непрерывности, дифференцировании и интегрировании по параметру несобственных интегралов, их применение к вычислению интегралов;
- достаточное условие представления функции интегралом Фурье;
- преобразование Фурье суммируемой функции и его свойства.

### уметь:

- разлагать функции в тригонометрический ряд Фурье, исследовать его на равномерную сходимость, определять порядок убывания коэффициентов Фурье;
- исследовать полноту систем в функциональных пространствах;
- исследовать сходимость и равномерную сходимость несобственных интегралов с параметром, дифференцировать и интегрировать их по параметру;
- представлять функции интегралом Фурье; выполнять преобразования Фурье.

### владеть:

- мышлением, методами доказательств математических утверждений;
- навыками работы с рядами и интегралами Фурье в различных формах;
- навыками применения изученной теории в математических и физических приложениях;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.



Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Критерий интегрируемости.
2. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле.
3. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.
4. Теоремы Верьерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
5. Неравенство Бесселя.
6. Равенство Парсеваля.
7. Теорема Рисса-Фишера.
8. Преобразование Фурье, обратное преобразование Фурье.

Примеры билетов в файле Билет\_ГА.pdf

#### **Критерии оценивания**

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.

«СОГЛАСОВАНО»  
Проректор по учебной работе  
\_\_\_\_\_ А. А. Воронов  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022

## Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

Дисциплина: **Гармонический анализ**, 2 курс, 3 семестр, экзамен

Кафедра высшей математики

Виды занятий	Сумма баллов
1. Контрольная работа № 1 по 1 заданию	0 – 9
2. Контрольная работа № 2 по 2 заданию	0 – 9
3. Задание № 1 (тетрадь и ее защита)	0 – 3
4. Задание № 2 (тетрадь и ее защита)	0 – 3
5. Проверка теоретических знаний	0 – 3
6. Работа на семинарах	0 – 3
7. Итоговый контроль Экзамен (устный ответ)	0 – 70
<b>ИТОГО</b>	<b>0 – 100</b>

Сумма баллов за устный ответ начисляется по формуле  $N \cdot 7$ , где  $N \geq 3$  – предварительная оценка за устный ответ по десятибалльной шкале. Если  $N=1, 2$ , то итоговая оценка совпадает с  $N$ .

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системы.

Баллы БРС	Оценки	
93 – 100	10	отлично
86 – 92	9	
79 – 85	8	
72 – 78	7	хорошо
65 – 71	6	
58 – 64	5	
51 – 57	4	удовлетворительно
44 – 50	3	
30 – 43	2	неудовлетворительно
0 – 29	1	

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ Г.Е. Иванов

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(национальный исследовательский университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ 1

Дисциплина: ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Представление частичной суммы ряда Фурье по системе  $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  через ядро Дирихле. Принцип локализации Римана.
2. Вычислите  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx$ ,  $\beta > 0$ , методом дифференцирования по параметру.

2 курс, 3 семестр, 20\_\_\_\_\_ уч. г.

Одобрено на заседании кафедры \_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ: \_\_\_\_\_ Заведующий кафедрой ИВАНОВ Г.Е.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(национальный исследовательский университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ 2

Дисциплина: ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Признак Дини и его следствия.

2. Исследуйте равномерную сходимость интеграла  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos x \, dx$  по  $\alpha$  на множествах а)  $(0; 1)$ , б)  $(1; +\infty)$ .

2 курс, 3 семестр, 20\_\_\_\_\_ уч. г.

Одобрено на заседании кафедры \_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ: \_\_\_\_\_ Заведующий кафедрой ИВАНОВ Г.Е.