

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Методы решения некорректных обратных задач
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра прикладной геофизики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: Н.В. Дубиня, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры прикладной геофизики 15.03.2021

Аннотация

Курс посвящен методам решения некорректных задач математической физики, в частности, математической геофизики. В случае невозможности непосредственных измерений характеристик изучаемых объектов геологической среды экспериментатору приходится решать так называемые обратные задачи. По косвенной информации об исследуемом объекте нужно установить природу тех или иных сигналов. В геофизической практике существенно дешевле построить математическую модель явления с помощью теории некорректных задач, чем заниматься бурением глубоких скважин. В процессе освоения курса слушатели познакомятся с основными принципами теории некорректных задач, типами постановок, различными регуляризирующими алгоритмами. Большое внимание будет уделено проблемам интерпретации больших и сверхбольших объемов данных о геопотенциальных полях и функции, описывающей рельеф земной поверхности. Обучающиеся смогут применять для решения линейных и нелинейных обратных задач так называемый метод интегральных представлений, который позволяет наиболее полно учитывать априорную информации о геологической среде, обрабатывать разнородные и разноточные данные.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Целью дисциплины является подготовка специалистов в области математической геофизики и геоинформатики в эпоху суперкомпьютеров, параллельных вычислений и больших массивов данных. Методы, применяемые в геоинформатике, позволяют адекватно интерпретировать огромные массивы непрерывно меняющихся данных о рельефе земной поверхности (данные спутниковой альтиметрии и т.п.), решать геоморфологические задачи, создавать аналитические аппроксимации потенциальных полей Земли. Математическая геофизика основана на классических математических методах и подходах, разработанных исследователями в области математического анализа, дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), функционального анализа. Важнейшим «структурным элементом» математической геофизики является теория некорректных задач. Специфика геофизической практики требует развития методов регуляризации, адаптации уже существующих алгоритмов к решению задач интерпретационного характера, создания новых подходов и концепций.

Задачи дисциплины

Обеспечить высокий уровень математической культуры обучающихся, который является совершенно необходимым условием успешного решения сложных задач интерпретационного характера в условиях резкого роста объема информации об окружающей среде. Знание теории обратных и некорректных задач, в особенности приложений этой теории к геофизике, позволит будущим специалистам не только анализировать уже имеющуюся информацию о природных и антропогенных факторах, но и планировать новые эксперименты и экспедиции с максимальной степенью энерго- и ресурсосбережения.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук

ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в составе научного коллектива
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.1 Понимает принципы работы используемого оборудования (специализированных пакетов прикладных программ)
	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Понятие корректных и некорректных задач математической физики

уметь:

Строить регуляризирующие алгоритмы

владеть:

Методами численного решения обратных задач

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Определение некорректных задач	1	1		1
2	Элементы теории линейных операторов	1	1		1
3	Примеры некорректно поставленных задач	1	1		1
4	Понятие регуляризирующего алгоритма	1	1		1
5	Некорректные задачи на компактах	1	1		1
6	Задачи минимизации. Постановка экстремальных задач	1	1		1
7	Выпуклые функционалы	1	1		1
8	Разрешимость задачи выпуклого программирования	1	1		1
9	Сведения о матрицах	1	1		1
10	Метод наименьших квадратов	1	1		1
11	Итерационные методы минимизации функционалов	1	1		1
12	Численные методы решения некорректных задач. Компактные множества специального вида	1	1		1
13	Регуляризирующий алгоритм А.Н.Тихонова	1	1		1
14	Интегральные уравнения Фредгольма	1	1		1
15	Метод линейных интегральных представлений	1	1		1
Итого часов		15	15		15
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		45 час., 1 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Определение некорректных задач

Понятие корректно поставленной по Адамару задачи. Метрические, нормированные и линейные пространства. Скалярное произведение. Гильбертовы пространства.

2. Элементы теории линейных операторов

Свойства операторов. Определение линейного оператора.

Ограниченные и неограниченные операторы. Вполне непрерывные операторы.

3. Примеры некорректно поставленных задач

Примеры некорректно поставленных задач. Уравнения Фредгольма 1 типа. Уравнения Вольтерра 1 и 2 типов. Суммирование рядов Фурье. Нахождение производных приближенно заданной функции.

4. Понятие регуляризирующего алгоритма

Понятие регуляризирующего алгоритма. Регуляризируемые задачи. Условно регуляризируемые задачи. Сравнение регуляризирующих алгоритмов.

5. Некорректные задачи на компактах

Некорректные задачи на компактах. Определение компакта. Понятие квазирешения. Виды квазирешений.

6. Задачи минимизации. Постановка экстремальных задач

Задачи минимизации. Постановка экстремальных задач. Разрешимость задачи оптимизации. Выпуклые множества.

7. Выпуклые функционалы

Выпуклые функционалы. Выпуклые комбинации элементов векторного пространства. Надграфик функционала. Сильно выпуклые и строго выпуклые функционалы.

8. Разрешимость задачи выпуклого программирования

Разрешимость задачи выпуклого программирования. Теорема Вейерштрасса. Критерии выпуклости и сильной выпуклости.

9. Сведения о матрицах

Сведения о матрицах. Вырожденные матрицы. Плохо обусловленные системы линейных алгебраических уравнений. Особенности матриц систем, возникающих при решении задач интерпретационного характера в геофизике.

10. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов. Определение. Функциональные пространства, рассматриваемые при применении метода наименьших квадратов. Метод псевдообращения. Минимизирующие последовательности.

11. Итерационные методы минимизации функционалов

Итерационные методы минимизации функционалов. Градиентные и безградиентные методы. Метод сопряженных градиентов. Метод скорейшего спуска. Метод Розенброка. Метод случайного поиска.

12. Численные методы решения некорректных задач. Компактные множества специального вида

Численные методы решения некорректных задач. Компактные множества специального вида. Истокпредставимость решения. Метод расширяющихся компактов. Нахождение решения обратной задачи на последовательности компактов.

13. Регуляризирующий алгоритм А.Н.Тихонова

Регуляризирующий алгоритм А.Н.Тихонова. Метод обобщенной невязки. Несовместные некорректные задачи.

14. Интегральные уравнения Фредгольма

Интегральные уравнения Фредгольма. Постановка задачи. Интегральные уравнения Фредгольма с неперiodическим ядром. Способы решения методом расширяющихся компактов интегральных уравнений Фредгольма с неперiodическим ядром, возникающих при решении задач сейсмического каротажа.

15. Метод линейных интегральных представлений

Метод линейных интегральных представлений. Локальная и региональная версии метода. S-F- R-аппроксимации потенциальных полей и рельефа в рамках метода линейных интегральных представлений. Модифицированные аппроксимации.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Проектор для демонстрации презентаций.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Численные методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов [и др.] .— М. : Наука, 1990 .— 230 с.
2. Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст]/М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский , -М., Наука, 1980
3. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В.Фомин .— 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012 .— 572 с.
4. Ряды Фурье [Текст]/Г. П. Толстов, -М., Наука, 1980
5. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. Наука. 1978. 206 с.

Дополнительная литература

1. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. А.Г.Ягола. Ван Янфей. И.Э.Степанова. В.Н.Титаренко. М. Бином. Лаб. Знаний. 2014, 214 с.
2. Степанова И.Э., Раевский Д.Н. «Модифицированный метод S-аппроксимаций. Региональный вариант» // Физика Земли. 2015. № 2. С.1–11 DOI:10.7868/S0002333715020106
3. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант). //Физика Земли, 2002, Т.38, № 2, с.3-19.
4. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант). //Физика Земли, 2002, Т.38, № 7, с.3-12.
5. Степанова И.Э. Об интегральном уравнении обратной трехмерной задачи потенциала // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, № 4. С. 77-84.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладные математика и физика
профиль подготовки: Общая и прикладная физика
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
кафедра прикладной геофизики
курс: 1
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: Н.В. Дубиня, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в составе научного коллектива
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.1 Понимает принципы работы используемого оборудования (специализированных пакетов прикладных программ)
	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Методы решения некорректных обратных задач» обучающийся должен:

знать:

Понятие корректных и некорректных задач математической физики

уметь:

Строить регуляризирующие алгоритмы

владеть:

Методами численного решения обратных задач

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Решить задачи на свойства метрических пространств: доказать, что в произвольном метрическом пространстве выполняется второе неравенство треугольника).
2. Привести примеры метрик и определить, является ли метрикой предложенная преподавателем функция.
3. Проверить сходимость функций в различных функциональных пространствах.
4. Сравнить различные нормы линейного оператора A .
5. Сравнить различные нормы матриц.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов:

1. Дать определение корректной по Адамару задачи.
2. Дать определение регуляризирующего алгоритма (оператора).
3. Привести примеры некорректных задач. Объяснить, почему интегральное уравнение Фредгольма 2 рода может быть решено в рамках корректной постановки.
4. Описать несколько градиентных и безградиентных методов минимизации функционалов. Сколько точек минимума может быть а) у выпуклого функционала; б) у сильно выпуклого функционала и в) у строго выпуклого функционала.
5. Дать определение положительно полуопределенной матрицы и плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений.
6. Изложить основные принципы метода интегральных представлений. Указать область применения этого метода.
7. Дать определение уравнения типа свертки с неперiodическим ядром. Сформулировать обратную задачу сейсмического каротажа.
8. Что такое несовместные обратные задачи. Дать определение и привести примеры.

Примеры контрольных заданий:

1. Дайте определение открытого и замкнутого множества.
2. Может ли некоторое множество A метрического пространства M быть открытым и замкнутым одновременно?
3. Постройте пример, когда из сходимости в среднем не следует не только равномерная, но даже и поточечная сходимость.

4. Докажите, что единичный шар в произвольном линейном нормированном пространстве является выпуклым множеством.
5. Что представляет собой а) выпуклая комбинация двух кругов; б) выпуклая комбинация круга и треугольника?
6. Докажите, что сумма выпуклого и сильно выпуклого функционалов с непустой областью определения является сильно выпуклым функционалом.

Критерии оценивания

Оценка "отлично" (10 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (9 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (8 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочётами.

Оценка "хорошо" (7 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка "хорошо" (6 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка "хорошо" (5 баллов) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка "удовлетворительно" (4 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка "удовлетворительно" (3 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка "неудовлетворительно" (2 балла) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка "неудовлетворительно" (1 балл) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачёт проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении зачёта обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.