

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Алгебраическая топология
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра фундаментальной математики
курс:	2
квалификация:	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

3 (осенний) - Зачет

4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Программу составил: А.В. Ершов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры фундаментальной математики 28.03.2025

Аннотация

Алгебраическая топология является фундаментом для значительной части современной математики, а также источником многих ее идей. Предмет алгебраической топологии можно кратко описать как изучение категории топологических пространств путем построения на ней гомотопически инвариантных функторов в какую-либо алгебраическую категорию, что позволяет сводить геометрические задачи (например, задачи о классификации) к "алгебраическим". Классическими примерами таких функторов являются фундаментальная группа и группы гомологий и когомологий топологических пространств. Зачастую использование уже этих простейших инвариантов позволяет получать нетривиальные результаты (пример: теорема Брауэра о неподвижной точке), доказывать гомотопическую неэквивалентность данных пространств.

Методы алгебраической топологии многократно продемонстрировали свою эффективность как в различных задачах геометрии (погружение многообразий в евклидово пространство, гладкие структуры на многообразиях, классификация многообразий в рамках различных версий теории кобордизмов, ...), так и в других областях (классификация вещественных алгебр с делением, Квилленовское построение алгебраической K-теории, приведшее к открытию новых фундаментальных связей между алгеброй и гомотопической категорией, многочисленные применения топологических инвариантов в современной физике, ...). Во 2-й половине прошлого века были установлены глубокие связи алгебраической топологии с анализом, наиболее ярким примером которых явилась теорема Атьи-Зингера об индексе эллиптического оператора на компактном многообразии. Кроме того, понятия и методы теории векторных расслоений и K-теории играют очень важную роль в ряде разделов современной математики и физики.

Учитывая вышесказанное, курс по алгебраической топологии представляется необходимым при подготовке современных специалистов по алгебре, геометрии и теоретической физике. Он является синтетическим курсом, опирающимся на знание алгебры, общей топологии и дифференциальной геометрии, и в свою очередь развивает идеи упомянутых предметов. Например, без использования средств алгебраической топологии трудно представить переход от изучения локальных свойств многообразий (обычно происходящем в курсах по теории гладких многообразий и дифференциальной геометрии) к исследованию глобальных свойств последних, а ведь часто именно глобальные свойства играют в геометрической задаче принципиальную роль. Кроме того, данный курс может послужить хорошей иллюстрацией того, как работают различные алгебраические методы (такие как гомологическая алгебра и теория категорий).

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Данный курс ставит целью познакомить слушателей как со стандартным классическим подходом к данному предмету, так и дать представление о его более современных методах и идеях.

Задачи дисциплины

Сформировать у слушателей представление о задачах и методах алгебраической топологии, о ее связях с гомологической алгеброй.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности

ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основные классические понятия и результаты Алгебраической топологии.

уметь:

пользоваться классическими методами Алгебраической топологии для решения задач.

владеть:

аппаратом классической Алгебраической топологии .

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Сингулярные симплексы и цепи. Сингулярные гомологии.	2	2		2
2	Категории, функторы и естественные преобразования.	2	2		2
3	Гомотопическая инвариантность сингулярных гомологий.	2	2		2
4	Кросс-произведение гомологий	2	2		2
5	Относительные гомологии. Длинная точная последовательность гомологий.	2	2		2
6	Вырезание и его применение.	2	2		2
7	Аксиомы Эйленберга-Стинрода.	2	2		2
8	Клеточные пространства и их гомологии.	2	2		2

9	Гомологии с коэффициентами. Теорема об универсальных коэффициентах.	2	2		2
10	Ацикличные модели и теорема Кюннета.	2	2		2
11	Сингулярные когомологии.	2	2		2
12	Произведения в когомологиях.	2	2		2
13	Локальные коэффициенты и ориентация.	3	3		3
14	Двойственность Пуанкаре.	3	3		3
15	Пределы, копределы и сопряженные функторы.	3	3		4
16	Гомотопическая категория	3	3		4
17	Локально тривиальные расслоения	3	3		4
18	Расслоения	3	3		4
19	Корасслоения	3	3		4
20	Расслоенные и корасслоенные последовательности	3	3		5
21	Слабые эквивалентности и теоремы Уайтхеда	3	3		5
22	Представимость когомологий. Теория препятствий	3	3		5
23	Векторные расслоения и К-теория.	3	3		5
24	Классифицирующее пространство группы. Симплициальные множества и классифицирующие пространства	3	3		5
Итого часов		60	60		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Сингулярные симплексы и цепи. Сингулярные гомологии.

Определение сингулярных гомологий.

2. Категории, функторы и естественные преобразования.

Язык теории категорий.

3. Гомотопическая инвариантность сингулярных гомологий.

Гомотопии, цепные гомотопии, звездные области. Доказательство гомотопической инвариантности сингулярных гомологий.

4. Кросс-произведение гомологий

Кросс-произведение и его свойства.

5. Относительные гомологии. Длинная точная последовательность гомологий.

Относительные гомологии. Длинная точная последовательность гомологий, ассоциированная с короткой точной последовательностью цепных комплексов. Точная последовательность пары.

6. Вырезание и его применение.

Аксиома вырезания. Вычисление гомологий сфер.

7. Аксиомы Эйленберга-Стиррода.

Аксиомы Эйленберга-Стиррода, их следствия (теорема Майера-Вьеториса). Доказательства.

8. Клеточные пространства и их гомологии.

Определения и примеры клеточных пространств. Клеточный комплекс.

9. Гомологии с коэффициентами. Теорема об универсальных коэффициентах.

Гомологии с коэффициентами. Функтор Tor . Основная теорема гомологической алгебры. Доказательство теоремы об универсальных коэффициентах.

10. Ациклические модели и теорема Кюннета.

Метод ациклических моделей. Теорема Эйленберга-Зильбера. Теорема Кюннета.

11. Сингулярные когомологии.

Определение сингулярных когомологий. Когомологии с коэффициентами. Теорема об универсальных коэффициентах. Аксиомы Эйленберга-Стиррода для когомологий.

12. Произведения в когомологиях.

Произведения в когомологиях и их свойства.

13. Локальные коэффициенты и ориентация.

Определение системы локальных коэффициентов. Ориентация многообразий. Теорема об ориентации.

14. Двойственность Пуанкаре.

Формулировка и доказательство теоремы двойственности Пуанкаре.

Семестр: 4 (Весенний)

15. Пределы, копределы и сопряженные функторы.

Категорные пределы и копределы, сопряженные функторы. Декартово замкнутые категории. Категория компактно порожденных пространств.

16. Гомотопическая категория

Гомотопическая категория. Базисные точки. Функторы петель и надстройки.

17. Локально тривиальные расслоения

Локально тривиальные расслоения: определение и примеры.

18. Расслоения

Расслоения в смысле Гуревича. Фундаментальный группоид. Гомотопическая инвариантность пуллбэка расслоения.

19. Корасслоения

Корасслоения: определение и свойства.

20. Расслоенные и корасслоенные последовательности

Канонические факторизации отображений. Конус отображения. Последовательность Баррата-Пуппе и ее свойства.

21. Слабые эквивалентности и теоремы Уайтхеда

Гомотопические эквивалентности, слабые эквивалентности. Теоремы Уайтхеда.

22. Представимость когомологий. Теория препятствий

Пространства Эйленберга-Маклейна, примеры. Фундаментальный класс. Представимость функтора когомологий. Элементы теории препятствий.

23. Векторные расслоения и K-теория.

Векторные расслоения: определение. Классифицирующее пространство. Группа Гротендика, (комплексная) K-теория. Понятие о периодичности Ботта. K-теория как обобщенная теория когомологий.

24. Классифицирующее пространство группы. Симплициальные множества и классифицирующие пространства

Симплициальные множества, их геометрическая реализация. Нерв категории, классифицирующее пространство категории. Группоид Чеха и классифицирующее отображение.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска, медиапроектор, экран.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Haynes Miller Lectures on Algebraic Topology
2. J.P. May A concise Course in Algebraic Topology
3. James F. Davis, Paul Kirk Lecture Notes in Algebraic Topology

Дополнительная литература

1. M Aguilar, S. Gitler, C. Prieto Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint
2. А. Хатчер Алгебраическая топология
3. А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс Курс гомотопической топологии

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Zoom, Skype

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладные математика и физика
профиль подготовки: Общая и прикладная физика
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
кафедра фундаментальной математики
курс: 2
квалификация: магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

3 (осенний) - Зачет

4 (весенний) - Экзамен

Разработчик: А.В. Ершов, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгебраическая топология» обучающийся должен:

знать:

основные классические понятия и результаты Алгебраической топологии.

уметь:

пользоваться классическими методами Алгебраической топологии для решения задач.

владеть:

аппаратом классической Алгебраической топологии .

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов (11 семестр):

1. Выведите теорему Майера-Вьеториса из аксиомы вырезания
2. Опишите клеточную структуру многообразия Грассмана
3. Докажите теорему Эйленберга-Зильбера с помощью метода ациклических моделей.
4. Докажите, что любое отображение есть композиция корасслоения и гомотопической эквивалентности. Как выглядит двойственное утверждение для расслоений?
5. Что такое гомотопический слой отображения? В чем состоит его универсальное свойство?
6. Объясните, почему вычисление кохомологических операций сводится к вычислению кохомологий пространств Эйленберга-Маклейна.
7. Докажите сопряженность функтора геометрической реализации и функтора сингулярного симплициального множества.
8. Посчитайте гомологии и кохомологии вещественного проективного пространства с разными коэффициентами.
9. Посчитайте гомологии произведения $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}P^3$ с целыми коэффициентами. Объясните полученный результат.
10. Пусть $S^{p+q} \rightarrow S^p \times S^q$ --- некоторое непрерывное отображение. Какое отображение оно индуцирует в старших кохомологиях?

Перечень контрольных вопросов (12 семестр):

1. Вычислите кольцо кохомологий $\mathbb{C}P^n$.
2. Для n -мерного клеточного пространства X задайте биекцию между $H^n(X, \mathbb{Z})$ и $[X, S^n]$.
3. Аксиомы Эйленберга-Стинрода. Доказательство аксиомы вырезания.
4. Пространства Эйленберга-Маклейна, примеры. Фундаментальный класс. Представимость функтора кохомологий. Элементы теории препятствий.
5. Понятие о периодичности Ботта. К-теория как обобщенная теория кохомологий.
6. Нерв категории, классифицирующее пространство категории. Группоид Чеха и классифицирующее отображение.
7. Произведения в кохомологиях и их свойства.
8. Локально тривиальные расслоения: определение и примеры.
9. Гомотопическая инвариантность пулбэка расслоения.
10. Теоремы Уайтхеда.

Примеры билетов (11 семестр):

Билет 1.

1. Аксиомы Эйленберга-Стинрода. Доказательство аксиомы вырезания.
2. Посчитайте гомологии и кохомологии вещественного проективного пространства с разными коэффициентами.

Билет 2.

1. Корасслоения и их свойства. Докажите, что если $A \rightarrow X$ --- корасслоение и $g: A \rightarrow B$ --- произвольное отображение, то $B \rightarrow B \cup_g X$ --- корасслоение.
2. Для n -мерного клеточного пространства X задайте биекцию между $H^n(X, \mathbb{Z})$ и $[X, S^n]$.

Примеры билетов (12 семестр):

Билет 1.

1. Нерв категории, классифицирующее пространство категории. Группоид Чеха и классифицирующее отображение.
2. Произведения в кохомологиях и их свойства.

Билет 2.

1. Гомотопическая инвариантность пуллбэка расслоения.
2. Теоремы Уайтхеда.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен проводится в устной форме по билетам.

В каждом билете представлено два теоретических вопроса.

При проведении зачёта и экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку.

Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.