

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы физики  
и исследований им. Ландау  
А.В. Рогачев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Теория фазовых переходов
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра проблем теоретической физики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 45 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: В.В. Лебедев, д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

Программа обсуждена на заседании кафедры проблем теоретической физики 26.04.2021

## Аннотация

В рамках курса будет изучена теория флуктуационных явлений, связанных с макроскопическими степенями свободы. Наряду с критическими явлениями, имеющими место вблизи фазовых переходов второго рода и критических точек, будут рассмотрены различные фазы конденсированного состояния, где флуктуации играют важную роль. Также будет изложена теория динамических флуктуаций, которая применяется как к равновесным, так и к неравновесным системам.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- изучение теории флуктуационных явлений, связанных с макроскопическими степенями свободы. Наряду с критическими явлениями, имеющими место вблизи фазовых переходов второго рода и критических точек, рассматриваются различные фазы конденсированного состояния, где флуктуации играют важную роль;
- изучение теории динамических флуктуаций, которая применяется как к равновесным, так и к неравновесным системам.

#### Задачи дисциплины

- познакомить студентов с основными понятиями и идеями в этой области, с постановкой задач и подходами к их решениям. Предполагается, что прослушав этот курс, студенты смогут читать и понимать текущую научную периодику в этой области.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области своей профессиональной деятельности и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений

ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия по теме дисциплины.

уметь:

- пользоваться развитыми в рамках дисциплины методами исследования, решать задачи по теме дисциплины.

владеть:

- математическим и понятийным аппаратом и методами исследований, составляющими содержание дисциплины.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Теория Ландау.	1	4		4
2	Теория возмущений.	1	4		4
3	Паркетные диаграммы.	1	3		3

4	Ренорм-группа, эpsilon-разложение.	1	3		3
5	Слабая кристаллизация.	1	4		4
6	Тепловые флуктуации в смектиках.	1	4		4
7	Двумерные ферромагнетики.	1	3		3
8	Физика мембран.	1	4		4
9	Фазовый переход БКТ.	1	4		4
10	Критическая динамика.	1	3		3
11	Проблема KPZ.	2	3		3
12	Двумерная гидродинамика.	1	3		3
13	Пассивный скаляр.	2	3		3
Итого часов		15	45		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

##### 1. Теория Ландау.

Параметр порядка. Разложение Ландау. Теория среднего поля. Низкотемпературная фаза.

##### 2. Теория возмущений.

Разложение по параметру взаимодействия. Теория возмущений при температуре ниже температуры фазового перехода. Масштабирование.

##### 3. Паркетные диаграммы.

Флуктуационные поправки в четырехмерном пространстве. Перенормировка величин. Тройная точка.

##### 4. Ренорм-группа, эpsilon-разложение.

Интегрирование по быстрым переменным. Уравнения ренорм-группы. Масштабирование в терминах эpsilon-разложения.

##### 5. Слабая кристаллизация.

Функционал Ландау. Флуктуационные явления. Фазовые диаграммы с флуктуациями.

##### 6. Тепловые флуктуации в смектиках.

Функционал Ландау. Структурный фактор. Уравнения ренорм-группы. Дислокации.

##### 7. Двумерные ферромагнетики.

Флуктуации направления намагниченности. Уравнения ренорм-группы. Предел большого числа компонент намагниченности.

##### 8. Физика мембран.

Энергия мембраны в жидкости. Флуктуации формы мембраны. Уравнения ренорм-группы.

## 9. Фазовый переход БКТ.

Генератор для корреляционных функций вихря. Уравнения ренорм-группы. Парная корреляционная функция вихря и теплоемкости.

## 10. Критическая динамика.

Эффективное действие и представление интеграла по траектории. Диаграммная техника Уальда. Уравнения ренорм-группы.

## 11. Проблема KPZ.

Уравнение KPZ (Kardar-Parisi-Zhang) и флуктуации. Уравнения ренорм-группы и масштабирование. Преобразование Коула-Хопфа.

## 12. Двумерная гидродинамика.

Уравнение Навье-Стокса, силы Ланжевена. Свободно подвешенные пленки. Гашение флуктуаций гидродинамических мод.

## 13. Пассивный скаляр.

Модель Крайхнана, стационарная статистика. Эволюция пассивного скаляра. Распределение вероятностей длин полимеров.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска, при необходимости медиапроектор, экран.

## 6.Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Флуктуационные эффекты в макрофизике [Текст] : [курс лекций для вузов] / В. В. Лебедев .— М. : МЦНМО, 2004 .— 256 с.
2. Теоретическая физика [Текст] : в 10 т. Т. 5, Ч. 1 : Статистическая физика : учеб. пособие для ун-тов / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц ; под ред. Л. П. Питаевского .— 5-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2001, 2002, 2005, 2010 .— 616 с.
3. R. Kubo, Thermodynamics, North-Holland, Amsterdam, 1968.
4. R. Ellis, Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics, Springer Verlag, 1985.
5. A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B 241, 333 (1984).

### Дополнительная литература

1. Теоретическая физика [Текст] : в 10 т. Т. 9, Ч. 2 : Статистическая физика. Теория конденсированного состояния : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц .— М. : Физматлит, 2000-2005 .— 496 с.
2. Квантовая электродинамика [Текст] : учеб. пособие для студентов физ. спец. ун-тов / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский .— 4-е изд., испр. — М. : Физматлит, 1989, 2001, 2002, 2006 .— 720 с.
3. Теоретическая физика [Текст] : в 10 т. Т. 6 : Гидродинамика : учеб. пособие для вузов : рек. М-вом образования Рос. Федерации / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц ; под ред. Л. П. Питаевского .— 5-е изд., стереотип. — 3-е изд., перераб. — М. : Физматлит, 1986, 1988, 2003, 2006 .— 736 с.
4. Квантовые поля [Текст] / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков - М.Физматлит,2005
5. Введение в квантовую теорию поля [Текст] : [учебник для вузов] / М. Пескин, Д. Шредер ; пер. с англ. под ред. А.А. Белавина, А. В. Беркова .— М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001 .— 784 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

сайт [chair.itp.ac.ru](http://chair.itp.ac.ru)

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Представление материала на доске и/или при помощи медиапроектора. Возможно использование ПО для символьных и/или численных вычислений.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента в соответствии с данными в рабочей программе. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,
- при необходимости подготовку к практическим занятиям, коллоквиумам, экзамену.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

Для более глубокого овладения материалом студент может ознакомиться со следующей литературой:

1. Р. Бэкстер, Точно решаемые модели в статистической механике, Москва, Мир, 1985.
2. Abrikosov A. A., Khalatnikov I. M., and Landau L. D., Nuovo Cimento, Suppl., 3, 80 (1956).
3. H. W. Wyld, Ann. Phys. (N.Y.) 14, 134 (1961).
4. Л. Д. Ландау, К теории фазовых переходов, ЖЭТФ 7, 19-32 (1937); ЖЭТФ 7, 627-632 (1937); L. D. Landau, Phys. Z. Sowjet., 11, 26 (1937).
5. В. Н. Попов, Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, Атомиздат, Москва, 1976.
6. А. А. Славнов и Л. Д. Фаддеев, Введение в квантовую теорию калибровочных полей, Москва, Наука, 1978.
7. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков и И. Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Добросвет, 1998.
8. И. М. Халатников, Теория сверхтекучести, Москва, Наука, 1971.
9. А. З. Паташинский и В. Л. Покровский, Флуктуационная теория фазовых переходов, Москва, Наука, 1982.
10. Sh. K. Ma, Modern theory of critical phenomena, Benjamin, New York, 1976.
11. А. П. Леванюк, К теории рассеяния света вблизи точек фазового перехода второго рода, ЖЭТФ, 36, 810-818, 1959.
12. B. D. Josephson, Equation of state near the critical point, J. Phys. C 2, 1113-1115, 1969.

13. K. G. Wilson and J. Kogut, The renormalization group and the  $\epsilon$ -expansion, *Phys. Rep.* 12, 75-199 (1974).
14. H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter*, World Scientific, Singapore, 1989.
15. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon, Oxford, 1996.
16. L. Kadanoff, *Statistical Physics, Statics, Dynamics and Renormalization*, World Scientific, Singapore, 2000.
17. K. G. Wilson and M. E. Fisher, Critical Exponents in 3.99 Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* 28, 240-243 (1972); K. G. Wilson, Feynman-Graph Expansion for Critical Exponents, *Phys. Rev. Lett.* 28, 548-551 (1972).
18. А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, Фазовый переход в одноосных сегнетоэлектриках, *ЖЭТФ*, 56, 2087-2098 (1969).
19. E. I. Kats, V. V. Lebedev, and A. R. Muratov, Weak crystallization theory, *Phys. Rep.*, 228, 1-91 (1993).
20. С. А. Бразовский, Фазовый переход изотропной системы в неоднородное состояние, *ЖЭТФ*, 68, 175-185 (1975) [*Sov. Phys. JETP*, 41, 85 (1975)].
21. G. Grinstein and R. A. Pelcovits, Anharmonic Effects in Bulk Smectic Liquid Crystals and Other "One-Dimensional Solids", *Phys. Rev. Lett.* 47, 856-859 (1981); Nonlinear elastic theory of smectic liquid crystals, *Phys. Rev. A* 26, 915-925, (1982).
22. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Москва, Наука, 1987.
23. A. M. Polyakov, Interaction of goldstone particles in two dimensions. Applications to ferromagnets and massive Yang-Mills fields, *Phys. Lett. B* 59, 79-81 (1975).
24. А. М. Поляков, Калибровочные поля и струны, Из-во ИТФ им. Л. Д. Ландау, 1995.
25. П. Б. Вигман, Точное решение нелинейной -модели в двух измерениях, Письма в *ЖЭТФ*, 41, 79-85 (1985); A. M. Polyakov and P. B. Wiegmann, Theory of nonabelian goldstone bosons in two dimensions, *Phys. Lett. B* 131, 121-126 (1983).
26. J. Meuner, D. Langevin and N. Boccara, *Physics of amphiphilic layers*, Springer Proceedings in Physics, 21, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
27. S. A. Safran and N. A. Clark, *Physics of complex and supermolecular fluids*, Wiley, New York, 1987.
28. D. Nelson, T. Pivian, and S. Weinberg, *Statistical mechanics of membranes and surfaces*, World Scientific, Singapore, 1989.
29. P. B. Canham, The minimum energy as a possible explanation of the concave shape of the human red blood cell, *J. Theor. Biol.* 26, 61-81 (1970).
30. W. Helfrich, Elastic Properties of Lipid Bilayers: Theory and Possible Experiments, *Z. Naturforsch C* 28, 693-703 (1973).
31. P. G. de Gennes and C. Taupin, Microemulsions and the flexibility of oil/water interfaces, *J. Chem. Phys.* 86, 2294-2304 (1982).
32. W. Helfrich, Effect of thermal undulations on the rigidity of fluid membranes and interfaces, *J. de Phys.* 46, 1263-1268 (1985); L. Peliti and S. Leibler, Effects of Thermal Fluctuations on Systems with Small Surface Tension, *Phys. Rev. Lett.* 54, 1690-1693 (1985); D. Föster, On the scale dependence, due to thermal fluctuations, of the elastic properties of membranes, *Phys. Lett. A* 114, 115-120 (1986); H. Kleinert, Thermal softening of curvature elasticity in membranes, *Phys. Lett. A* 114, 263-268 (1986); A. M. Polyakov, Fine structure of strings, *Nucl. Phys. B* 268, 406-412 (1986); H. Kleinert, Size distribution of spherical vesicles, *Phys. Lett. A* 116, 57-62 (1986).
33. В. Л. Березинский, Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии; I Классические системы, *ЖЭТФ*, 59, 907-920 (1970) [*Sov. Phys. JETP* 32, 493 (1971)]; II Квантовые системы, *ЖЭТФ* 61, 1144-1156 (1971) [*Sov. Phys. JETP* 34, 610 (1972)].
34. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, Long range order and metastability in two dimensional solids and superfluids (Application of dislocation theory), *J. Phys. C* 5, L124-126 (1972); Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems, *J. Phys. C* 6, 1181-1203 (1973).
35. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *Progress in Low Temperature Physics*, ed. D. F. Brewer, v. VII B, p. 373 (North-Holland, Amsterdam, 1978).
36. D. R. Nelson, in *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, ed. by E. G. D. Cohen, v. V, p. 53 (North Holland, N. Y., 1980).
37. D. R. Nelson, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, ed. by C. Domb and J. L. Lebowitz, v. 7, p. 1 (Academic, London, 1983).

38. P. Minnhagen, The two-dimensional Coulomb gas, vortex unbinding, and superfluid-superconducting films, *Rev. Mod. Phys.* 59, 1001-1066 (1987).
39. Z. Gulacsi, M. Gulacsi, Theory of phase transitions in two-dimensional systems, *Adv. Phys.* 47, 1-89 (1998).
40. B. I. Halperin and D. R. Nelson, Theory of Two-Dimensional Melting, *Phys. Rev. Lett.* 41, 121-124 (1978); 41, 519 (1978); A. P. Young, Melting and the vector Coulomb gas in two dimensions, *Phys. Rev. B* 19, 1855-1866 (1979); D. R. Nelson and B. I. Halperin, Dislocation-mediated melting in two dimensions, *Phys. Rev. B* 19, 2457-2484 (1979).
41. K. J. Strandburg, Two-dimensional melting, *Rev. Mod. Phys.* 60, 161-207 (1988).
42. D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, Universal Jump in the Superfluid Density of Two-Dimensional Superfluids, *Phys. Rev. Lett.* 39, 1201-1205 (1977).
43. B. I. Halperin and P. C. Hohenberg, Theory of dynamic critical phenomena, *Rev. Mod. Phys.* 49, 435-479, 1977.
44. P. C. Martin, E. D. Siggia, and H. A. Rose, Statistical Dynamics of Classical Systems, *Phys. Rev. A* 8, 423-437 (1973).
45. C. de Dominicis, *J. Phys. (Paris) Colloq* 37, C1-247 (1976).
46. H. K. Janssen, Lagrangian for Classical Field and Renormalization Group Calculations of Dynamical Critical Properties, *Z. Phys. B* 23, 377-380 (1976).
47. C. de Dominicis and L. Peliti, Field-theory renormalization and critical dynamics above : Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems, *Phys. Rev. B* 18, 353-376 (1978).
48. M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, Dynamic Scaling of Growing Interfaces, *Phys. Rev. Lett.* 56, 889-892, 1986.
49. G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, Vortices in high-temperature superconductors, *Rev. Mod. Phys.* 66, 1125-1388 (1994).
50. D. Forster, D. R. Nelson, and M. J. Stephen, Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid, *Phys. Rev. A* 16, 732-749 (1977).
51. Е. И. Кац и В. В. Лебедев, Динамика жидких кристаллов, Москва, Наука, 1988; E. I. Kats and V. V. Lebedev, *Fluctuational Effects in the Dynamics of Liquid Crystals*, Springer-Verlag, N.Y., 1993.
52. A. Groisman and V. Steinberg, Elastic turbulence in a polymer solution flow, *Nature* 405, 53-55 (2000); Stretching of Polymers in a Random Three-Dimensional Flow, *Phys. Rev. Lett.* 86, 934-937 (2001); Efficient mixing at low Reynolds numbers using polymer additives, *Nature* 410, 905-907 (2001).
53. G. K. Batchelor, Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. Part 1. General discussion and the case of small conductivity, *JFM* 5, 113-133 (1959).
54. G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
55. R. H. Kraichnan, Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence, *Phys. Fluids* 11, 945-953 (1968).
56. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Statistics of a passive scalar advected by a large-scale two-dimensional velocity field: Analytic solution. *Phys. Rev. E* 51, 5609-5627 (1995).
57. B. I. Shraiman and E. D. Siggia, Scalar turbulence, *Nature* 405, 639-646 (2000).
58. G. Falkovich, K. Gawdzki, and M. Vergassola, Particles and fields in fluid turbulence, *Rev. Mod. Phys.* 73, 913-975 (2001).
59. В. И. Кляцкин, Динамика стохастических систем, Москва, Физматлит, 2002.
60. U. Frisch, *Turbulence: the Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, New York (1995).
61. A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, MIT Press, Cambridge Mass. (1975).
62. B. I. Shraiman and E. D. Siggia, Anomalous Scaling and Small Scale Anisotropy of a Passive Scalar in Turbulent Flow, *CRAS* 321, Ser. II, 279-284 (1995); K. Gawdzki and A. Kupiainen, Anomalous Scaling of the Passive Scalar, *Phys. Rev. Lett.* 75, 3834-3837 (1995); M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov and V. Lebedev, Normal and anomalous scaling of the fourth-order correlation function of a randomly advected passive scalar, *Phys. Rev. E* 52, 4924-4921 (1995).
63. B. I. Shraiman, E. D. Siggia, Lagrangian path integrals and fluctuations in random flow Boris I. Shraiman, *Phys. Rev. E* 49, 2912-2927 (1994).
64. M. Chertkov, Polymer Stretching by Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* 84, 4761-4764 (2000); E. Balkovsky, A. Fouxon, and V. Lebedev, Turbulent Dynamics of Polymer Solutions, *Phys. Rev. Lett.* 84, 4765-4768 (2000).
65. R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, 2nd ed. Vol. 2, Wiley, New York, 1987.

66. J. L. Lumley, Drag reduction by additives, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1, 367-384 (1969); Drag reduction in turbulent flow by polymer additives, *J. Polymer Sci.: Macromolecular Reviews* 7, 263-290 (1973).
67. E. Balkovsky and A. Fouxon, Universal long-time properties of Lagrangian statistics in the Batchelor regime and their application to the passive scalar problem, *Phys. Rev. E* 60, 4164-4174 (1999).
68. H. Furstenberg, Noncommuting Random Products, *Trans. Am. Math. Soc.* 108, 377 (1963).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** В.В. Лебедев, д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

# 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области своей профессиональной деятельности и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов
---	---

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория фазовых переходов» обучающийся должен:

### знать:

- основные понятия по теме дисциплины.

### уметь:

- пользоваться развитыми в рамках дисциплины методами исследования, решать задачи по теме дисциплины.

### владеть:

- математическим и понятийным аппаратом и методами исследований, составляющими содержание дисциплины.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

П

### Критерии оценивания

Обучающемуся ставится оценка в соответствии с продемонстрированным уровнем подготовки; оценивание производится на усмотрения экзаменатора в соответствии с особенностями дисциплины и следующими критериями:

Оценка "отлично" (10 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (9 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (8 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочётами.

Оценка "хорошо" (7 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка "хорошо" (6 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка "хорошо" (5 баллов) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка "удовлетворительно" (4 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка "удовлетворительно" (3 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка "неудовлетворительно" (2 балла) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка "неудовлетворительно" (1 балл) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении оценивания знаний обучающемуся предоставляется время на подготовку на усмотрение экзаменатора. Опрос обучающегося по билету не должен превышать одного астрономического часа. Оценивание знаний производится в соответствии с вышеуказанными критериями в соответствии с содержанием дисциплины.

## Теория фазовых переходов

**Примеры задач (с решениями) для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

### 1 Линейные эволюционные уравнения

*Найти решение задачи Коши для уравнения  $\partial_t x + \gamma x = \phi$  при нулевых начальных условиях и  $\phi = \exp(-\alpha t)$ ,  $\alpha > 0$ . Как выглядит решение при  $\alpha \rightarrow \gamma$ ?*

Решение. Используем выражение через функцию Грина:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t ds \exp(-\gamma t + \gamma s - \alpha s) \\ &= \frac{1}{\gamma - \alpha} [\exp(-\alpha t) - \exp(-\gamma t)]. \end{aligned} \quad (1)$$

В пределе  $\alpha \rightarrow \gamma$  находим  $x = t \exp(-\gamma t)$ .

### 2 Статические линейные поля

*Найти функцию Грина операторов  $\hat{L}_1 = (d/dx + x)(d/dx - x)$  и  $\hat{L}_2 = (d/dx - x)(d/dx + x)$  на интервале  $(-l, +l)$  с нулевыми граничными условиями.*

Решение. Сначала мы должны найти решения  $f$  однородного уравнения. Для оператора  $\hat{L}_1$  мы должны решить уравнение  $(d/dx - x)f = \exp(-x^2/2)$ , где правая часть удовлетворяет уравнению  $(d/dx + x)\exp(-x^2/2) = 0$ . Уравнение на  $f$  решается методом вариации постоянной. Левое и правое решение, обращающиеся в ноль при  $x = -l$  и  $x = l$ , имеют вид

$$\begin{aligned} u(x) &= \exp(x^2/2) \int_{-l}^x dy \exp(-y^2), \\ v(x) &= -\exp(x^2/2) \int_x^l dy \exp(-y^2). \end{aligned}$$

Вронскиан этих решений равен

$$W = \int_{-l}^l dy \exp(-y^2),$$

он не зависит от координаты. Функция Грина строится теперь в соответствии с формулой лекции.

Аналогично решается задача для оператора  $\hat{L}_2$ . В этом случае правое и левое решения имеют вид

$$\begin{aligned} u(x) &= \exp(-x^2/2) \int_{-l}^x dy \exp(y^2), \\ v(x) &= -\exp(-x^2/2) \int_x^l dy \exp(y^2). \end{aligned}$$

Их вронскиан равен

$$W = \int_{-l}^l dy \exp(y^2),$$

он не зависит от координаты. Функция Грина строится теперь в соответствии с формулой лекции.

### 3 Специальные функции

*Найти асимптотическое поведение интеграла*

$$f(t) = \int_0^\infty dx J_0(x) \exp(-t/x)$$

при малых и больших  $t$ .

Решение. При  $t = 0$  экспонента равна единице и мы находим  $f(0) = 1$ . Поправка получается разложением экспоненты по  $t$ , первый член которого равен  $-t/x$ . В результате мы получаем логарифмический интеграл по  $x$ , который сверху обрезается на  $x: 1$ , где функция  $J_0(x)$  начинает отклоняться от единицы, а снизу на  $x: t$ , где перестает работать разложение экспоненты. Таким образом, при малых  $t$

$$f \approx 1 - t \ln \frac{1}{t}.$$

При больших  $t \gg 1$  интеграл определяется большими же  $x \gg 1$ . Поэтому в качестве  $J_0(x)$  можно использовать асимптотическое выражение функции Бесселя. В результате находим

$$f(t) \approx \operatorname{Re} \int_0^\infty dx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp(ix - i\pi/4 - t/x).$$

Этот интеграл может быть вычислен методом перевала. В данном случае перевальная точка  $x_0 = e^{i\pi/4} \sqrt{t}$ . Используя выражение для седлового интеграла, находим

$$f \approx \sqrt{2} \exp(-\sqrt{2t}) \cos(\sqrt{2t}).$$

### 4 Динамические линейные поля

*Найти зависимость от времени смещения поверхности воды  $u$ , если в начальный момент времени (при  $t = 0$ )  $u = \operatorname{Re} (1 + ix)^{-1/2}$ ,  $\partial_t u = 0$  и движение поверхности можно описывать в рамках гравитационных волн.*

Решение. Производя одномерное Фурье-преобразование, находим при  $t = 0$

$$\tilde{u} = (\pi/|q|)^{1/2} \exp(-|q|).$$

Комбинация решений, которая равна  $(\pi/|q|)^{1/2} \exp(-|q|)$  при  $t = 0$  и производная которой по времени равна нулю при  $t = 0$  имеет вид

$$\tilde{u} = (\pi/|q|)^{1/2} \exp(-|q|) \cos(\sqrt{g|q|} t),$$

где мы использовали закон дисперсии гравитационных волн  $\omega = \sqrt{g|q|}$ . Теперь мы должны вычислить обратное Фурье-преобразование

$$u = \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{dq}{\pi} e^{-iqx} (\pi/q)^{1/2} \exp(-q) \cos(\sqrt{gq} t).$$

Переходя к переменной  $\sqrt{q}$  и вычисляя получившийся интеграл, находим

$$u = \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{1+ix}} \exp\left(-\frac{gt^2}{4(1+ix)}\right).$$

## 5 Автономные нелинейные системы

*Как выглядит фазовый портрет системы, которая описывается релаксационным уравнением с двумя переменными и  $F = xy^2$ ?*

Решение. Релаксационные уравнения с функцией  $F = xy^2$  имеют вид

$$dx/dt = -y^2, \quad dy/dt = -2xy.$$

Траектории (характеристики), которые можно найти из соотношения  $dy/dx = 2x/y$ , являются гиперболами  $x^2 = y^2/2 + C$ , где  $C$  -- произвольная константа. Если  $x > |y|/\sqrt{2}$ , то траектории приближаются к оси  $X$  и остаются вблизи фиксированной точки, в противном случае траектории уходят от фиксированной точки.

## 6 Приближенные решения

*Найти нулевой и первый по  $\varepsilon$  члены решения уравнения  $\partial_x u + \gamma u + \varepsilon x u = 0$  с граничным условием  $u(0) = 1$ . Сравнить его с точным решением этого уравнения.*

Решение. Пренебрегая членом с  $\varepsilon$ , находим решение  $u_0 = \exp(-\gamma x)$ , которое удовлетворяет граничному условию. Подставляя это выражение в член с  $\varepsilon$ , находим уравнение для поправки  $u_1$ :  $\partial_x u_1 + \gamma u_1 + \varepsilon x \exp(-\gamma x) = 0$ . Решение этого уравнения, которое удовлетворяет граничному условию  $u_0 + u_1 = 1$ , имеет вид  $u_1 = -(1/2)\varepsilon x^2 \exp(-\gamma x)$ . Точное решение уравнения можно найти разделением переменных, оно имеет вид  $u = \exp(-\gamma x - \varepsilon x^2/2)$ . Поправка  $u_1$  является первым членом разложения этого решения по  $\varepsilon$ .

## 7 Нелинейные полевые уравнения

*Вывести соотношение Таланова.*

Решение. Вычислим первую производную от  $I$  по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I &= i \int d\mathbf{r} \mathbf{r}^2 (\psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^*) \\ &= 2idN + 4i \int d\mathbf{r} \psi (\mathbf{r} \nabla) \psi^*. \end{aligned}$$

Здесь  $d$  -- размерность пространства. Продифференцируем  $I$  еще раз по времени, учитывая, что  $N$  -- интеграл движения, то есть производная от него равна нулю:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} I &= -4 \int d\mathbf{r} [\Delta \psi (\mathbf{r} \nabla) \psi^* - \psi (\mathbf{r} \nabla) \Delta \psi^*] \\ &\quad - 8 \int d\mathbf{r} [\psi |\psi|^2 (\mathbf{r} \nabla) \psi^* - \psi (\mathbf{r} \nabla) (\psi^* |\psi|^2)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Выражение в квадратных скобках во втором слагаемом в (2) есть  $-(\mathbf{r}\nabla)|\psi|^4/2$ , так что это слагаемое в целом равно:

$$4 \int d\mathbf{r}(\mathbf{r}\nabla)|\psi|^4 = -4d \int d\mathbf{r}|\psi|^4.$$

Интегрирование по частям в первом слагаемом в (2) приведет его к виду:

$$-8 \int d\mathbf{r}\psi\Delta\psi^* = 8 \int d\mathbf{r}|\nabla\psi|^2.$$

## 8 Специальные случаи

*Найти форму антисимметричного фронта для уравнения  $\partial_t u + 3u^2\partial_x u - \partial_x^3 u = 0$ .*

Решение. Данное уравнение симметрично относительно преобразований  $u \rightarrow -u$  и  $t \rightarrow -t$ ,  $x \rightarrow -x$ . Поэтому оно допускает решение в виде распространяющегося фронта  $u(t, x) = w(x - Vt)$ , где функция  $w$  антисимметрична:  $w(x) = -w(-x)$ . Мы будем искать именно такое решение. Подстановка  $u(t, x) = w(x - Vt)$  в приведенное уравнение дает соотношение  $-V\partial_x w + 3w^2\partial_x w - \partial_x^3 w = 0$ , которое приводит к первому интегралу  $-Vw + w^3 - \partial_x^2 w = C$ . Для антисимметричного решения, когда  $w$  выходит на равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку значения при  $x \rightarrow \pm\infty$ , константа  $C = 0$ . Поэтому предельные значения  $w$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  равны  $\pm\sqrt{V}$ . Уравнение  $-Vw + w^3 - \partial_x^2 w = 0$  имеет первый интеграл

$$(\partial_x w)^2 + Vw^2 - w^4/2 = V^2/2,$$

значение которого  $(V^2/2)$  определяется предельными значениями  $w$ . Найденное уравнение первого порядка имеет решение

$$w = \pm\sqrt{V} \tanh[\sqrt{V/2}(x - x_0)],$$

где  $x_0$  -- произвольная константа. Найденное решение описывает движение фронта со скоростью  $V$  и шириной  $1/\sqrt{V}$ , асимптотические значения поля  $u$  равны  $\pm\sqrt{V}$ .

## 9 Интегральные уравнения

*Найти решение уравнения Фредгольма второго рода на интервале  $(-\infty, +\infty)$  для случая  $K = \exp(-t^2 - s^2)$ ,  $g(t) = t^2$ .*

Решение. В данном случае ядро представляется в виде произведения функций  $K = y(t)x(s)$ ,  $x(t) = y(t) = \exp(-t^2)$ . Вычисляя  $\Phi$  и  $M$  в соответствии с формулами лекции, находим

$$\Phi = \sqrt{\pi}/2, \quad M = \sqrt{\pi/2}, \quad C = \frac{\sqrt{\pi}}{2-\sqrt{2\pi}\lambda},$$

$$f = t^2 + \frac{\sqrt{\pi}\lambda}{2-\sqrt{2\pi}\lambda} \exp(-t^2).$$

## 10 Теория групп

На какие неприводимые представления раскладывается тензорное произведение  $S = D \times D$ , где  $D$  -- двумерное представление группы симметрии квадрата  $\mathbb{D}_4$ ?

Решение. Характеры четырех одномерных представлений группы симметрии квадрата  $\mathbb{D}_4$  имеют вид  $\chi_1(g) = (1,1,1,1,1,1,1,1)$ ,  $\chi_2(g) = (1,1,1,1,-1,-1,-1,-1)$ ,  $\chi_3(g) = (1,-1,1,-1,1,1,-1,-1)$ ,  $\chi_4(g) = (1,-1,1,-1,-1,-1,1,1)$  и характеры двумерного представления равны  $\chi_5(g) = (2,0,-2,0,0,0,0,0)$ . Поскольку  $S$  является тензорным произведением двух двумерных представлений, его характеры могут быть вычислены, как квадраты  $\chi_5(g)$ , то есть  $\chi_S(g) = (4,0,4,0,0,0,0,0)$ . Вычисляя теперь соответствующие суммы, мы находим, что представление  $S$  раскладывается на одно одномерное представление 1, одно одномерное представление 2, одно одномерное представление 3, и одно одномерное представление 4. Двумерного же представления в разложении  $S$  нет.

### Экзаменационные вопросы:

1. Теория Ландау
2. Теория возмущений
3. Паркетные диаграммы
4. Ренорм-группа, эpsilon-разложение
5. Слабая кристаллизация
6. Тепловые флуктуации в смектиках
7. Двумерные ферромагнетики
8. Физика мембран
9. Фазовый переход БКТ
10. Критическая динамика
11. Проблема KPZ
12. Двумерная гидродинамика
13. Пассивный скаляр

### Пример варианта письменной части экзамена:

**Задача 1 (2).** Как ведет себя амплитуда колебаний  $a$  на больших временах для нелинейного маятника, который описывается уравнением

$$\partial_t^2 x + x = -\varepsilon x^2 (\partial_t x)^3,$$

где  $0 < \varepsilon = 1$ ?

**Задача 2 (2).** Найти решение уравнения Бюргерса  $\partial_t u + u \partial_x u = \partial_x^2 u$  с начальным условием

$$u = -\frac{2\exp x}{1+\exp x}.$$

Указание: воспользуйтесь преобразованием Коула-Хопфа.

**Задача 3 (4).** Действие для скалярного поля  $\phi(x, t)$  имеет вид

$$S = \int dt dx \left[ \frac{(\partial_t \phi)^2}{2} - \frac{(\partial_x \phi)^2}{2} + \frac{m^2 \phi^2}{2} - \frac{\lambda \phi^4}{4} \right],$$

где  $m > 0$  и  $\lambda > 0$  некоторые константы.

(1) Получите уравнение движения, которое следует из условия экстремума этого действия.

(1) Найдите законы сохранения энергии и импульса, которые связаны с инвариантностью действия относительно выбора начала отсчета времени и сдвига начала координат.

(2) Найдите стационарное решение уравнения движения, если известно, что  $\phi \rightarrow \pm m/\sqrt{\lambda}$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Задача 4 (2).** Найти решение уравнения Фредгольма второго рода

$$f(t) - \lambda \int_a^b ds K(t, s) f(s) = g(t),$$

на интервале  $(-\infty, +\infty)$  для случая

$$K = \exp(-|t| - |s|), \quad g(t) = t^2.$$

**Задача 5 (2).** Найти двумерное представление группы симметрии, порождающими элементами которого являются перестановка двух чисел и изменение знака каждого из них. Проверить выполнение соотношения

$$\sum_g |\chi(g)|^2 = |\mathbb{G}|.$$

## Пример билетов устной части:

Билет 1.

1. Теория Ландау
2. Тепловые флуктуации в смектиках

Билет 2.

1. Теория возмущений
2. Критическая динамика