

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**и.о. директора физтех-школы
физики и исследований им.
Ландау**

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Элементы стохастической динамики
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра проблем физики и астрофизики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: А.С. Ильин, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры проблем физики и астрофизики 04.06.2020

Аннотация

Стохастические динамические системы возникают в самых разных областях—от теоретической физики и астрофизики до экономики и финансовой математики. Слушатели познакомятся с основными идеями и понятиями этой науки, а также освоят минимальный набор инструментов для решения конкретных задач. Изложение будет вестись на относительно элементарном языке корреляционных функций и их производящих функционалов, что позволит в дальнейшем плавно перейти к изучению технически более сложных конструкций квантовой теории поля, статистической физики, финансовой математики и пр. Мы начнём с обсуждения непрерывных случайных величин, плотности вероятности, статистических моментов, характеристических функций и связанных моментов (кумулянтов) случайных векторов, которые позволяют легко и изящно изложить закон больших чисел, ЦПТ и принципы больших отклонений, а также будут использоваться в дальнейшем на курсах квантовой теории поля и статистической физики. Случайная функция (случайный процесс, случайное поле) вводится как естественное обобщение случайного вектора на бесконечномерный случай. Изложение ведётся на языке корреляционных функций и куммулянтов. Мы обсудим понятия корреляционного времени, корреляционного масштаба, дельта-процессов. Подробно изучим Пуассоновский и Гауссовский случайные процессы, теорему Вика, принципы расщепления корреляций, закон больших чисел и ЦПТ для случайных процессов с конечным корреляционным временем. Далее рассмотрим стохастические дифференциальные уравнения с аддитивным шумом (диффузия) и мультипликативным шумом (системы с перемежаемостью). Такие уравнения встречаются во многих областях теоретической физики, экономики и финансовой математики, и составляют базу для интуитивного понимания процессов в более сложных нелинейных стохастических системах. В качестве интересного примера, обсуждается парадоксальное поведение статистических моментов в системах с мультипликативным шумом и поясняется значение редких «катастрофических» событий для жизни таких систем. Далее мы рассмотрим формализм Фейнмана-Каца, который позволяет находить решения параболических дифференциальных уравнений в частных производных с помощью континуального интегрирования по мере Винера. Этот формализм широко используется в современной квантовой теории, поэтому знакомство с ним важно для каждого культурного физика. В процессе изучения этого формализма мы рассмотрим понятия интегралов Ито и Стратоновича. В заключении курса мы рассмотрим технически довольно сложную, но чрезвычайно красивую теорию континуальных произведений случайных матриц. Эти произведения естественным образом возникают при решении линейных матричных стохастических уравнений с мультипликативным шумом и используются в теории турбулентного транспорта, стохастической гидродинамике, экономике.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

получение студентами фундаментальных знаний в области основ стохастической динамики, а также освоение навыков практического применения теоретических знаний при решении широкого круга физических задач.

Задачи дисциплины

- формирование базовых знаний в области теории случайных процессов и стохастической динамики как дисциплин, необходимых для общефизической и общетеоретической подготовки физиков;
- обучение студентов принципам применения языка и методов КТП при решении задач стохастической динамики.
- формирование подходов к выполнению исследований студентами в области статистической теории турбулентности и турбулентного транспорта, магнитной гидродинамики и других областях теоретической физики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации

анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- место и роль общих вопросов науки в научных исследованиях;
- современные проблемы теории случайных процессов и полей, стохастической динамики, теории турбулентности и турбулентного транспорта.
- теоретические модели фундаментальных процессов и явлений в физике и ее приложениях;
- новейшие открытия естествознания;
- постановку проблем стохастической динамики, теории турбулентности и турбулентного транспорта;
- о взаимосвязях и фундаментальном единстве естественных наук.

уметь:

- эффективно использовать на практике теоретические компоненты науки: понятия, суждения, умозаключения, законы;
- представить панораму универсальных методов и законов современного естествознания;
- абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций.

владеть:

- научной картиной мира;
- основными понятиями и методами КТП, теории стохастической динамики, теории турбулентности и турбулентного транспорта;
- навыками самостоятельной работы по решению задач
- математическим моделированием физических задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Введение. Теория вероятности.	2	2		3
2	Случайные процессы и поля.	4	4		6
3	Стохастические уравнения.	4	4		6
4	Уравнение Фоккера-Планка и его обобщения.	4	4		6
5	Теория случайных матричных процессов.	4	4		6
6	Теория турбулентного транспорта.	4	4		6
7	Статистическая теория турбулентности.	4	4		6
8	Теория Ито и стохастическое квантование.	4	4		6
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Введение. Теория вероятности.

Введение. Случайные величины. Плотность вероятности. Характеристическая и Куммулянтная функции.

2. Случайные процессы и поля.

Описание стохастических процессов и полей. Характеристический и куммулянтный функционалы, корреляционные и связанные корреляционные функции. Процессы и поля с конечным корреляционным временем, дельтапроцессы. Гауссовы процессы и поля. Обобщенный закон больших чисел и ЦПТ. Теория больших уклонений. Функция роста.

3. Стохастические уравнения.

Стохастические уравнения. Уравнение Лиувилля и диффузия. Мультипликативный шум. Переменяемость. Формула Фуруцы-Новикова и ее обобщения. Общая теория расщепления корреляций.

4. Уравнение Фоккера-Планка и его обобщения.

Уравнение Фоккера-Планка и его обобщения. Диффузионное и высшие приближения.

5. Теория случайных матричных процессов.

Теория случайных матриц и случайных матричных процессов. Обобщенный закон больших чисел. Индексы Ляпунова и обобщенные показатели Ляпунова. Изотропные дискретные и непрерывные матричные процессы. Изотропные матричные дельтапроцессы. Формулы Ньюмана.

6. Теория турбулентного транспорта.

Турбулентный транспорт пассивного скаляра и магнитного поля. Влияние молекулярной и магнитной диффузии. Эффект насыщения высших моментов. Турбулентное динамо.

7. Статистическая теория турбулентности.

Статистическая теория турбулентности. Корреляционные и структурные функции скорости. Функционал Хопфа. Уравнение Бюргерса как простейшая бифрактальная модель турбулентности. Уравнение Навье-Стокса. Теория K41, каскад, диссипативная аномалия. Мультифрактальность.

8. Теория Ито и стохастическое квантование.

Интегралы Ито и Стратановича, формализм Фейнмана-Каца, стохастическое квантование.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система), доской.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Динамика стохастических систем [Текст] : курс лекций / В. И. Кляцкин .— Научное изд. — М. : Физматлит, 2003 .— 240 с.
2. Стохастические дифференциальные уравнения : Введение в теорию и приложения [Текст] / Б. Оксендаль ; пер. с 5-го испр. англ. изд. Н. И. Королевой, А. И. Матасова ; под ред. В. Б. Колмановского - М.Мир,2003

Дополнительная литература

1. Введение в теорию случайных процессов [Текст] : учеб. пособ. для студ. вузов / И. И. Гихман, А. В. Скороход .— 2-е изд. — М. : Наука, 1977 .— 567 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://scitation.aip.org/>, <http://www.sciencemag.org>.
Электронный архив <http://arxiv.org/>.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На отдельных лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладные математика и физика
профиль подготовки: Общая и прикладная физика
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
кафедра проблем физики и астрофизики
курс: 1
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Разработчик: А.С. Ильин, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Элементы стохастической динамики» обучающийся должен:

знать:

- место и роль общих вопросов науки в научных исследованиях;
- современные проблемы теории случайных процессов и полей, стохастической динамики, теории турбулентности и турбулентного транспорта.
- теоретические модели фундаментальных процессов и явлений в физике и ее приложениях;
- новейшие открытия естествознания;
- постановку проблем стохастической динамики, теории турбулентности и турбулентного транспорта;
- о взаимосвязях и фундаментальном единстве естественных наук.

уметь:

- эффективно использовать на практике теоретические компоненты науки: понятия, суждения, умозаключения, законы;
- представить панораму универсальных методов и законов современного естествознания;
- абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций.

владеть:

- научной картиной мира;
- основными понятиями и методами КТП, теории стохастической динамики, теории турбулентности и турбулентного транспорта;
- навыками самостоятельной работы по решению задач
- математическим моделированием физических задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры задач из домашнего задания:

1. Получить выражение для одноточечной функции распределения процесса w , описываемого стохастическим уравнением $\dot{w} = b w + \sqrt{k} \xi$, где ξ - гауссов дельтакоррелированный шум.
2. Получить обобщенную формулу Фуруцы-Новикова
3. Пусть $\lambda > 0$, $O(t), t = 1, 2, \dots$ – Последовательность независимых матриц вращения с равномерно распределенным углом вращения θ . $A(t) = O^{-1}(t) \text{Diag}(-\lambda, \lambda) O(t)$, $t = 1, 2, \dots$. Получить выражение для Ляпуновского спектра матричного процесса $A(t)$.
4. Найти Уравнение Фоккера-Планка для системы с мультипликативным шумом.
5. Получить низший уровень УШ для осциллятора методом стохастического квантования.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Контрольные вопросы:

1. Случайные величины.
2. Плотность вероятности.
3. Характеристическая и Куммулянтная функции.
4. Характеристический и куммулянтный функционалы, корреляционные и связанные корреляционные функции.
5. Процессы и поля с конечным корреляционным временем, дельтапроцессы.
6. Гауссовы процессы и поля.
7. Обобщенный закон больших чисел и ЦПТ.
8. Теория больших уклонений.
9. Функция роста.
10. Уравнение Лиувилля и диффузия.
11. Формула Фуруцы-Новикова и ее обобщения.
12. Уравнение Фоккера-Планка и его обобщения.
13. Обобщенный закон больших чисел.
14. Индексы Ляпунова и обобщенные показатели Ляпунова.
15. Формулы Ньюмана.
16. Эффект насыщения высших моментов в теории турбулентного транспорта.
17. Турбулентное динамо.

Пример контрольного задания:

1. Получить выражение для одноточечной функции распределения процесса w , описываемого стохастическим уравнением $\dot{w} = b w + \sqrt{k} \xi$, где ξ - гауссов дельтакоррелированный шум.
2. Получить обобщенную формулу Фуруцы-Новикова/
3. Пусть $\lambda > 0$, $O(t), t = 1, 2, \dots$ – последовательность независимых матриц вращения с равномерно распределенным углом вращения θ и $A(t) = O^{-1}(t) \text{Diag}(-\lambda, \lambda) O(t)$, $t = 1, 2, \dots$. Получить выражение для Ляпуновского спектра матричного процесса $A(t)$.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет 1.

1. Случайные величины.
2. Плотность вероятности.

Билет 2.

1. Характеристическая и Куммулянтная функции.
2. Характеристический и куммулянтный функционалы, корреляционные и связанные корреляционные функции.

Билет 3.

1. Процессы и поля с конечным корреляционным временем, дельтапроцессы.
2. Гауссовы процессы и поля.

Билет 4.

1. Обобщенный закон больших чисел и ЦПТ.
2. Теория больших уклонений.

Билет 5.

1. Процесс Винера.
2. Формула Фейнмана-Каца.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен проводится по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.