

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Асимптотики в комплексной плоскости и их приложения
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра проблем теоретической физики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: К.С. Тихонов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры проблем теоретической физики 24.02.2025

Аннотация

Курс лекций по современным разделам квантовой механики, не входящим в стандартные курсы физических факультетов университетов, но активно используемым в теоретических и экспериментальных исследованиях последних 20-30 лет.

Содержание естественным образом подразделяется на три части: а) продвинутые квазиклассические методы (адиабатическая фаза Берри, туннелирование Ландау-Зинера, точки поворота в комплексной плоскости), б) фейнмановская формулировка квантовой механики через интегрирование по траекториям и описание на этом языке основных квантовомеханических явлений, и в) формализм матрицы плотности (редуцированные матрицы плотности, энтропия запутанности, декогеренция и диссипация в открытых системах).

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Освоение студентами новейших знаний по квантовой механике, не входящих в стандартные курсы физических факультетов, и которые в дальнейшем будут использоваться в теоретических и экспериментальных исследованиях.

Задачи дисциплины

Познакомить студентов с современными понятиями и идеями в этой области, с постановкой задач и подходами к их решениям. Предполагается, что прослушав этот курс, студенты смогут читать и лучше понимать текущую научную периодику в этой области.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его реализации	УК-2.4 Представляет публично результаты проекта (или отдельных его этапов) в форме отчетов, статей, выступлений на научно-практических конференциях, семинарах и т.п.
УК-4 Способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия	УК-4.2 Владеет навыками, необходимыми для написания, письменного перевода и редактирования различных академических текстов (рефератов, эссе, обзоров, статей и т.д.)
	УК-4.3 Способен представлять результаты академической и профессиональной деятельности на различных научных мероприятиях, включая международные
	УК-4.4 Способен использовать современные средства информационно-коммуникационных технологий для академического и профессионального взаимодействия
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.2 Оценивает свою деятельность, соотносит цели, способы и средства выполнения деятельности с её результатами
	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности

ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области своей профессиональной деятельности и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в составе научного коллектива
	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- основные понятия по теме дисциплины.

уметь:

- пользоваться развитыми в рамках дисциплины методами исследования, решать задачи по теме дисциплины.

владеть:

- математическим и понятийным аппаратом и методами исследований, составляющими содержание дисциплины.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Фазы Берри	4	4		7
2	Фейнмановский интеграл по траекториям	4	4		7
3	Матрица плотности	4	4		7
4	Поправки к адиабатическому приближению	6	6		8
5	Декогерентность и матрица плотности	6	6		8
6	Катастрофа ортогональности – 1	6	6		8
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Фазы Берри

Адиабатическая эволюция и геометрическая фаза. Связность Берри спиновой системы и блоховских состояний в кристалле. Связь с движением в потенциале решетки: аномальная скорость волнового пакета. Приложения к аномальному эффекту Холла и квазиклассическому квантованию уровней Ландау.

2. Фейнмановский интеграл по траекториям

Интеграл по путям для амплитуды перехода $K(x, x')$ и уравнение Шредингера. Факторизация решения для $K(x, x')$ для квадратичных потенциалов. Явное вычисление для свободного движения и для гармонического осциллятора (с предэкспонентой). Вычисление функциональных детерминантов методом Гельфанда-Яглома.

3. Матрица плотности

Описание смешанных состояний матрицей плотности. Разложение Шмидта и редуцированные матрицы плотности. Энтропия запутанности.

4. Поправки к адиабатическому приближению

Поправки к адиабатическому приближению. Экспоненциально малые эффекты. Эффект Ландау-Зинера. Квазиклассическое приближение в комплексной плоскости координаты и времени.

5. Декогерентность и матрица плотности

Дефазировка и измерения на языке матрицы плотности. Двухуровневая система и осциллятор, взаимодействующие с тепловой баней. Когерентные состояния. Марковское приближение и Линдбладан.

6. Катастрофа ортогональности – 1

Многочастичные волновые функции свободных фермионов и внезапное включение локального рассеивателя. Оценка Андерсона для интегралов перекрытия и адиабатическое вычисление. Связь с задачей о поглощении фотона (Fermi-edgesingularity) и с подавлением когерентного туннелирования трением.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска, при необходимости медиапроектор, экран.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Квантовая механика и интегралы по траекториям [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Р. Фейнман, А. Хибс ; пер. с англ. Э. М. Барлита, Ю. Л. Обухова ; под ред. В. С. Барашенкова .— М. : Мир, 1968 .— 382 с.
2. Статистическая механика [Текст] : курс лекций / Р. Фейнман ; пер. с англ. Н. М. Плакиды, Ю. Г. Рудого ; под ред. Д. Н. Зубарева ; 2-е изд. — 2-е изд. — М. : Мир, 1978 .— 408 с.
3. Теоретическая физика [Текст] : в 10 т. Т. 5, Ч. 1 : Статистическая физика : учеб. пособие для ун-тов / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц ; под ред. Л. П. Питаевского .— 5-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2001, 2002, 2005, 2010 .— 616 с.
4. Л.В. Келдыш, ЖЭТФ 47, 1515 (1964).
5. P.C. Martin, E.D. Siggia, and H.A. Rose, Phys. Rev. A 8, 423 (1973).
6. A.O. Caldeira and A.J. Leggett, Ann. Phys. 149, 374 (1983).

Дополнительная литература

1. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля [Текст] = Solitons and instantons/P. Раджараман , -М., Мир, 1985
2. А.М. Поляков, «Калибровочные поля и струны», ИТФ им. Л.Д. Ландау, 1995 (Глава 4).
3. C. Callan and S. Coleman, Phys. Rev. D 16 672 (1977); J. Zittarz and J.S. Langer, Phys. Rev. 148, 741 (1966).
4. R.P. Feynman and F.L. Vernon, Annals of Physics 24, 118 (1963).
5. A. Schmid, J. Low Temp. Phys. 49, 609 (1982).
6. A. Kamenev and A. Levchenko, Advances in Physics 58, 197 (2009) [arXiv:0901.3586].

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Представление материала на доске и/или при помощи медиапроектора.

Возможно использование ПО для символьных и/или численных вычислений, а также проведения вебинаров и занятий онлайн.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента в соответствии с данными в рабочей программе. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,
- при необходимости подготовку к практическим занятиям, коллоквиумам, экзамену.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
Разработчик:	К.С. Тихонов, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его реализации	УК-2.4 Представляет публично результаты проекта (или отдельных его этапов) в форме отчетов, статей, выступлений на научно-практических конференциях, семинарах и т.п.
УК-4 Способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия	УК-4.2 Владеет навыками, необходимыми для написания, письменного перевода и редактирования различных академических текстов (рефератов, эссе, обзоров, статей и т.д.)
	УК-4.3 Способен представлять результаты академической и профессиональной деятельности на различных научных мероприятиях, включая международные
	УК-4.4 Способен использовать современные средства информационно-коммуникационных технологий для академического и профессионального взаимодействия
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.2 Оценивает свою деятельность, соотносит цели, способы и средства выполнения деятельности с её результатами
	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области своей профессиональной деятельности и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания в различных областях науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов

анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в составе научного коллектива
	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях
ПК-3 Способен профессионально работать с исследовательским и испытательным оборудованием (приборами и установками, специализированными пакетами прикладных программ) в избранной предметной области	ПК-3.3 Способен оценивать точность полученных экспериментальных (численных) результатов

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Асимптотики в комплексной плоскости и их приложения» обучающийся должен:

знать:

- основные понятия по теме дисциплины.

уметь:

- пользоваться развитыми в рамках дисциплины методами исследования, решать задачи по теме дисциплины.

владеть:

- математическим и понятийным аппаратом и методами исследований, составляющими содержание дисциплины.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Представлено в прикрепленном файле.

Критерии оценивания

Обучающемуся ставится оценка в соответствии с продемонстрированным уровнем подготовки; оценивание производится на усмотрения экзаменатора в соответствии с особенностями дисциплины и следующими критериями:

Оценка "отлично" (10 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (9 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (8 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочётами.

Оценка "хорошо" (7 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка "хорошо" (6 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка "хорошо" (5 баллов) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка "удовлетворительно" (4 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка "удовлетворительно" (3 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка "неудовлетворительно" (2 балла) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка "неудовлетворительно" (1 балл) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.

1. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры заданий контрольной работы:

Задача 1. Рассмотрите частицу, совершающую одномерное движение вдоль кольца, через которое проникает магнитный поток. Частица локализована в медленно вращающейся потенциальной яме $U(\phi, t) = U(\phi - \phi_c(t))$, где $\phi_c(t)$ медленно возрастает от $\phi_c(0) = 0$ до $\phi_c(T) = 2\pi$, а форма потенциала: $U(\phi) = -u \cdot \delta(\phi)$. Какую фазу набирает частица в процессе такого вращения? Найдите явно поправку к фазе Ааронова-Бома в пределе глубокой ямы (большие u).

Задача 2. Рассмотрите интеграл по траекториям по вектору $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$:

$$K(\mathbf{r}_2, T; \mathbf{r}_1, 0) = \int_{\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}(T)=\mathbf{r}_2} e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T [m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \epsilon(y\dot{x} - x\dot{y})] dt} \mathcal{D}\mathbf{r}(t).$$

- Покажите, что этот интеграл описывает распространение заряженной частицы в магнитном поле. Найдите частоту движения ω .
- Вычислите этот интеграл, переходя во вращающуюся систему отсчёта. Что происходит с результатом при $t = \pi/\omega$?

Задача 3. Рассмотрите систему двух различных частиц, описываемых следующим Гамильтонианом:

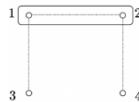
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{kx_1^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} + \alpha x_1 x_2, \quad |\alpha| < k.$$

Предполагая, что система в целом находится в основном состоянии, получите редуцированную матрицу плотности $\rho = \rho(x_2, x_2')$ второго осциллятора. Вычислите энтропию $S(\rho)$.

Задача 4. Рассмотрите двухуровневую систему с зависящим от времени расщеплением $\omega_0(t)$, накачиваемую при постоянной частоте:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega^* e^{i\omega t} \\ \Omega e^{-i\omega t} & \omega_0(t) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрите внедиагональный член этого Гамильтониана как возмущение. Пусть при $t = -\infty$ система приготовлена в основном состоянии и $\omega_0(t) < 0$. В первом порядке по $|\Omega|^2$, найдите вероятность того, что система окажется в возбужденном состоянии невозмущенного Гамильтониана при $t = \infty$. Вычислите получившийся интеграл в приближении стационарной фазы. Предполагая, что стационарная точка встречается только раз за время эволюции, упростите получившееся выражение.



Задача 5. Рассмотрите основное состояние двух фермионов на цепочке, показанной на рисунке. Гамильтониан определяется суммой прыжковых членов одинаковой амплитуды:

$$\hat{H} = \sum_{ij} c_i^\dagger c_j + \text{h.c.}$$

Найдите редуцированную матрицу плотности подсистемы, состоящей из узлов 1 и 2. Найдите энтропию этой подсистемы.

Примеры задач для домашнего задания:

Задача 1. Рассмотрите гармонический осциллятор с частотой ω , взаимодействующий с резервуаром, описываемым оператором $L = a$. Предполагая, что система приготовлена в суперпозиции когерентных состояний (определите нормировочный множитель C):

$$|\psi_0\rangle = C (|\alpha_0\rangle + |\beta_0\rangle)$$

вычислите матрицу плотности спустя время t . Матрицу плотности удобно искать в следующем виде:

$$\hat{\rho}_t = C (|\alpha_t\rangle \langle \alpha_t| + |\beta_t\rangle \langle \beta_t| + c_t |\alpha_t\rangle \langle \beta_t| + c_t^* |\beta_t\rangle \langle \alpha_t|).$$

Опишите спадание когерентности (характеризуемое $|c(t)|$) и потерю энергии. Какой из этих процессов быстрее, если исходно состояния хорошо разделены в фазовом пространстве, $|\alpha_0 - \beta_0| \gg 1$?

Задача 2. Рассмотрите запутанное состояние двух частиц

$$|\chi\rangle = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}}$$

и смешанное состояние тех же частиц:

$$\hat{\rho} = \frac{|0\rangle_A \langle 0|_A |0\rangle_B \langle 0|_B + |1\rangle_A \langle 1|_A |1\rangle_B \langle 1|_B}{2}.$$

Возможно ли отличить эти два состояния посредством локальных измерений? (измерений, которые касаются наблюдаемых только одной из подсистем). Для полного решения, вычислите редуцированные матрицы плотности для подсистемы B для каждого из состояний.

Задача 3. Вычислите Шмидтовское разложение

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\chi_i\rangle_A |\chi_i\rangle_B,$$

по ортонормированным наборам χ_{iA}, χ_{iB} следующих состояний:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle), \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

Используя полученное Шмидтовское разложение, выпишите редуцированные матрицы плотности для каждого из состояний и двух подсистем.

Задача 4. Рассмотрите операторы, определенные по фермионным операторам с следующим образом ($q > 0$):

$$b_q^+ = \frac{1}{\sqrt{n_q}} \sum_k c_{k+q}^+ c_k, \quad b_q = \frac{1}{\sqrt{n_q}} \sum_k c_{k-q}^+ c_k.$$

Покажите, что эти операторы удовлетворяют бозонным коммутационным соотношениям:

$$[b_q, b_{q'}] = [b_q^+, b_{q'}^+] = 0$$

Задача 5. Используя технику бозонизации, вычислите функцию отклика спектра фотоэмиссии:

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{\nu} \delta(\omega + E_0 - E_{\nu}) |\langle \psi_{\nu} | \psi_0 \rangle|^2,$$

где $|\psi_0\rangle$ -- основное состояние Гамильтониана

$$\hat{H}_0 = \sum_k \epsilon_k \hat{c}_k^+ \hat{c}_k$$

а $|\psi_{\nu}\rangle$ -- собственные состояния Гамильтониана с локальным возмущением:

$$\hat{H}_{\nu} = \hat{H}_0 + \sum_{kk'} V_{kk'} c_k^+ c_{k'} = \hat{H}_0 + \frac{V}{N} \sum_{kk'} c_k^+ c_{k'},$$

Может оказаться удобным вычислить $P(t)$ и затем выполнить Фурье-преобразование.

2. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Контрольные вопросы:

- 1) Фаза Берри на примере двухуровневой системы
- 2) Шмидтовское разложение и редуцированная матрица плотности
- 3) Бозонизация Ферми-газа и Катастрофа Ортогональности
- 4) Эффект Ландау-Зинера: квазиклассическое решение
- 5) Надбарьерное отражение в периодическом потенциале
- 6) Адиабатическая накачка
- 7) Двухуровневая система, взаимодействующая с резервуаров:
- 8) бозонизация и перенормировка
- 9) Внезапная встряска Ферми-газа: временной отклик
- 10) Фаза Берри и аномальная скорость волнового пакета

Примеры экзаменационных билетов:

Билет 1

- 1) Фаза Берри на примере двухуровневой системы
- 2) Шмидтовское разложение и редуцированная матрица плотности

Билет 2

- 1) Бозонизация Ферми-газа и Катастрофа Ортогональности
- 2) Эффект Ландау-Зинера: квазиклассическое решение