

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Маломерная топология и алгебраические кривые
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра фундаментальной математики
курс:	2
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: С.Ю. Оревков, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры фундаментальной математики 28.03.2025

Аннотация

В данном курсе предполагается ознакомить слушателей с текущим положением дел в изучении топологических свойств вещественных алгебраических многообразий, в первую очередь плоских кривых (этот круг вопросов часто называют первой частью 16-й проблемы Гильберта).

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение результатов и методов топологии вещественных алгебраических многообразий.

Задачи дисциплины

Сформировать представление о топологических аспектах вещественной алгебраической геометрии.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основные понятия и результаты теории плоских вещественных алгебраических кривых.

уметь:

решать задачи о реализуемости данной конфигурации овалов на проективной плоскости вещественной алгебраической кривой данной степени, а также некоторые другие похожие задачи.

владеть:

методами решения задач по вещественной алгебраической геометрии.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Разбивающие и неразбивающие кривые	2			2
2	Теорема Харнака. Кривые до степени 5	2			2
3	Формулы комплексных ориентаций	2			2
4	Некоторые сведения из четырехмерной топологии	2			2
5	Неравенства Петровского и неравенства Арнольда	2			2
6	Сравнение Гудкова-Рохлина	2			2
7	Построения методом Виро	2			2
8	Классификация плоских кривых до степени 7	2			2
9	Псевдоголоморфные кривые	2			2
10	Группа кос. Квазиположительные косы	3			3
11	Алгебраические тригональные кривые	3			3
12	Псевдоголоморфные тригональные кривые	3			3
13	Применения теории узлов	3			3
Итого часов		30			30
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Разбивающие и неразбивающие кривые

Понятие вещественной алгебраической кривой и ее классификации. Формула рода. Разбивающие и неразбивающие кривые. Комплексные ориентации.

2. Теорема Харнака. Кривые до степени 5

Теорема Харнака. Теорема Безу. Классификация плоских неособых вещественных кривых до степени 5 включительно с точностью до изотопии.

3. Формулы комплексных ориентаций

Формулы Рохлина и Мишачева для комплексных ориентаций. Их приложения.

4. Некоторые сведения из четырехмерной топологии

Некоторые сведения из топологии. Точная последовательность Смита. Сигнатура четырехмерных многообразий. Фактор SP^2 по инволюции комплексного сопряжения.

5. Неравенства Петровского и неравенства Арнольда

Рдвулистные накрытия SP^2 , разветвленные вдоль вещественной алгебраической кривой. Неравенства Петровского и неравенства Арнольда.

6. Сравнение Гудкова-Рохлина

Сравнение по модулю 8 для M -кривых четной степени (сравнение Гудкова-Рохлина).

7. Построения методом Виро

Построение вещественных многообразий методом Виро (методом склеивания карт). Комбинаторный патчворкинг.

8. Классификация плоских кривых до степени 7

Чередование комплексных ориентаций. Классификация неособых вещественных кривых до степени 7 включительно.

9. Псевдоголоморфные кривые

Некоторые факты о псевдоголоморфных кривых (без доказательства).

10. Группа кос. Квазиположительные косы

Группа кос. Квазиположительные косы и их связь с псевдоголоморфными кривыми.

11. Алгебраические тригональные кривые

Применение теоремы существования Римана для классификации вещественных алгебраических тригональных кривых.

12. Псевдоголоморфные тригональные кривые

Алгоритмическое решение задачи квазиположительности в группе кос из трех нитей. Классификация вещественных псевдоголоморфных тригональных кривых.

13. Применения теории узлов

Применения теории узлов (зацеплений). Оценки срезанного рода зацеплений через форму Зейферта и приложения к вещественным алгебраическим кривым. Обобщенная форма Зейферта крашенных зацеплений.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория с меловой доской, медиапроектор, экран.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Гудков Д. А. “Топология вещественных проективных алгебраических многообразий”// УМН, 29:4(178) (1974), 3–79
2. Виро О. Я. “Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией”// Алгебра и анализ, 1:5 (1989), 1–73

Дополнительная литература

1. Orevkov S.Yu. «Riemann existence theorem and construction of real algebraic curves»
Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse // Mathématiques, (6) 12 (2003), no 4, 517-531.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Zoom, Skype

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладные математика и физика
профиль подготовки: Общая и прикладная физика
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
кафедра фундаментальной математики
курс: 2
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Разработчик: С.Ю. Оревков, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Маломерная топология и алгебраические кривые» обучающийся должен:

знать:

основные понятия и результаты теории плоских вещественных алгебраических кривых.

уметь:

решать задачи о реализуемости данной конфигурации овалов на проективной плоскости вещественной алгебраической кривой данной степени, а также некоторые другие похожие задачи.

владеть:

методами решения задач по вещественной алгебраической геометрии.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов:

1. Формулы комплексных ориентаций.
2. Точная последовательность Смита и оценка суммы чисел Бетти по модулю 2 вещественного многообразия через сумму чисел Бетти его комплексификации.
3. Чередование комплексных ориентаций в пучке прямых.
4. Инвариант Брауна – Ван дер Бля квадратичной формы по модулю 2.
5. Вложимость полугруппы положительных кос в группу кос.
6. Построить вещественную кривую данной степени (не больше 7) с данным расположением овалов на проективной плоскости или доказать, что такой кривой не существует.
7. Вычислить матрицу пересечений для двух-трех конкретных циклов на двулистном накрытии.
8. Нарисовать образ вещественной кривой при данном квадратичном преобразовании.
9. Построить вещественную тригональную кривую данной степени с данным послойным расположением овалов на линейчатой поверхности или доказать, что такой кривой не существует.
10. Тот же вопрос о вещественных псевдоголоморфных кривых.

Примеры билетов:

Билет 1.

1. Доказать, что все М-кривые разбивающие, а все (М-1)-кривые – неразбивающие.
2. Теорему Виро о склеивании карт (с доказательством).

Билет 2.

1. Классификация плоских вещественных кривых до степени 5.
2. Алгоритмическое решение задачи квазиположительности кос из трех нитей.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.