

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

| | |
|----------------------------|--|
| | Рабочая программа дисциплины (модуля) |
| по дисциплине: | Введение в современную алгебру |
| по направлению: | Прикладные математика и физика |
| профиль подготовки: | Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра фундаментальной математики |
| курс: | 1 |
| квалификация: | магистр |

Семестры, формы промежуточной аттестации:

1 (осенний) - Зачет
2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.
семинары: 60 час.
лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Программу составил: И.В. Каржеманов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры фундаментальной математики 28.03.2025

Аннотация

Данный курс посвящен основным понятиям и методам в современной алгебре. В него включено много практической работы, в том числе самостоятельной, для усвоения материала.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Научить студентов языку и технике современной высшей алгебры, дать примеры ее применений в геометрии, физике и других науках.

Задачи дисциплины

Научить студентов пользоваться языком и техникой теории групп и их представлений, равно как теории колец и модулей, а также способам вычислений их простейших гомологических инвариантов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий | УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними |
| | УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации |
| | УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности |
| ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук | ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук |
| ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий | ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
| | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях |

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основы теории групп, их представлений, а также колец и модулей.

уметь:

определять структуру конечных групп, находить их представления, и то же для полупростых колец.

владеть:

языком и техникой теории групп, их представлений, а также колец и модулей.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|-----------------------|--|---|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Определение группы | 3 | 3 | | 3 |
| 2 | Орбиты | 3 | 3 | | 3 |
| 3 | Нормальные группы | 4 | 4 | | 4 |
| 4 | Вторая и третья теорема о гоморфизме | 4 | 4 | | 4 |
| 5 | Вторая и третья теоремы Силова | 4 | 4 | | 4 |
| 6 | Строение конечнопорожденных абелевых групп. | 4 | 4 | | 4 |
| 7 | Коммутант и разрешимые группы | 4 | 4 | | 4 |
| 8 | Неразрешимость групп S_n и A_n | 4 | 4 | | 4 |
| 9 | Представления конечных групп. Теоремы Машке и Шура. Примеры. | 4 | 4 | | 6 |
| 10 | Характеры представлений | 4 | 4 | | 6 |
| 11 | Коммутативные кольца и идеалы (предварительные сведения) | 4 | 4 | | 6 |
| 12 | Существование максимального идеала | 4 | 4 | | 6 |
| 13 | Делители нуля и локализация | 4 | 4 | | 7 |
| 14 | Нетеровы кольца | 5 | 5 | | 7 |
| 15 | Кольца главных идеалов | 5 | 5 | | 7 |
| Итого часов | | 60 | 60 | | 75 |
| Подготовка к экзамену | | 30 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 225 час., 5 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Определение группы

Определение группы и действия группы на множестве. Примеры.

2. Орбиты

Орбиты, стабилизатор, теорема Лагранжа. Примеры

3. Нормальные группы

Нормальные группы. Первая теорема о гомоморфизме. Примеры

4. Вторая и третья теорема о гоморфизме

Вторая и третья теорема о гоморфизме. Первая теорема Силова

5. Вторая и третья теоремы Силова

Вторая и третья теоремы Силова. Приложения к строению конечных групп. p -группы.

6. Строение конечнопорожденных абелевых групп.

Строение конечнопорожденных абелевых групп. Примеры вычисления.

7. Коммутант и разрешимые группы

Коммутант и разрешимые группы. Основные свойства и теоремы. Примеры.

8. Неразрешимость групп S_n и A_n

Неразрешимость групп S_n и A_n . Приложения к решению уравнений в радикалах.

Семестр: 2 (Весенний)

9. Представления конечных групп. Теоремы Машке и Шура. Примеры.

Представления конечных групп. Теоремы Машке и Шура. Примеры.

10. Характеры представлений

Характеры представлений. Соотношение ортогональности и следствия из нее (теорема Бернсайда и делимость степеней представлений). Примеры.

11. Коммутативные кольца и идеалы (предварительные сведения)

Коммутативные кольца и идеалы (предварительные сведения). Теоремы о гомоморфизме. Построения колец. Примеры.

12. Существование максимального идеала

Существование максимального идеала. Теорема Гильберта о нулях. Примеры.

13. Делители нуля и локализация

Делители нуля и локализация. Примеры и приложения.

14. Нетеровы кольца

Нетеровы кольца. Теорема Гильберта. Примеры и приложения.

15. Кольца главных идеалов

Кольца главных идеалов. Теорема о факториальности. Примеры.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска, при необходимости медиапроектор, экран.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Алгебраическая топология и теория пучков [Текст], монография/Р. Годеман , -М., Изд-во иностр. лит., 1961
- 2, Категории для работающего математика [Текст]/С. Маклейн , -М., Физматлит, 2004
- 3, Гомология [Текст], монография/С. Маклейн , -М., Мир, 1966

Дополнительная литература

1. С.И. Гельфанд, Ю.И. Манин. Методы гомологической алгебры. Том I. - М.: Наука, 1988
2. С.М. Львовский. Введение в когомологии пучков. - М.: МЦНМО, 2000
3. Когомологии групп [Текст]/К. С. Браун , -М., Наука, 1987

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

А.В. Ершов Функторные морфизмы <http://window.edu.ru/resource/166/77166>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Zoom, Skype

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладные математика и физика
профиль подготовки: Общая и прикладная физика
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
кафедра фундаментальной математики
курс: 1
квалификация: магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

1 (осенний) - Зачет
2 (весенний) - Экзамен

Разработчик: И.В. Каржеманов, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий | УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними |
| | УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации |
| | УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности |
| ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук | ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук |
| ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий | ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
| | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях |

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в современную алгебру» обучающийся должен:

знать:

основы теории групп, их представлений, а также колец и модулей.

уметь:

определять структуру конечных групп, находить их представления, и то же для полупростых колец.

владеть:

языком и техникой теории групп, их представлений, а также колец и модулей.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

- Докажите, что фундаментальная группа топологической группы коммутативна.
- Найдите левый сопряженный к функтору из категории ассоциативных k -алгебр с единицей в категорию векторных пространств над k , забывающему умножение.
- Пусть $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ – точная последовательность комплексов. Покажите, что комплекс LM квазиизоморфен конусу $SC(i)$.

4. Пусть G – группа, A – G -модуль. Постройте биекцию между множеством классов эквивалентности расширений группы G при помощи A , индуцирующих данное действие группы G в A и множеством $H^2(G, A)$.
5. Докажите факториальность кольца главных идеалов.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов:

1. Докажите, что фундаментальная группа топологической группы коммутативна.
2. Найдите левый сопряженный к функтору из категории ассоциативных k -алгебр с единицей в категорию векторных пространств над k , забывающему умножение.
3. Пусть $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ – точная последовательность комплексов. Покажите, что комплекс M квазиизоморфен конусу $C(i)$.
4. Пусть G – группа, A – G -модуль. Постройте биекцию между множеством классов эквивалентности расширений группы G при помощи A , индуцирующих данное действие группы G в A и множеством $H^2(G, A)$.
5. Докажите факториальность кольца главных идеалов.
6. Нормальные группы. Первая теорема о гомоморфизме. Примеры
7. Вторая и третья теоремы Силова. Приложения к строению конечных групп. p -группы.
8. Коммутант и разрешимые группы. Основные свойства и теоремы. Примеры.
9. Представления конечных групп. Теоремы Машке и Шура. Примеры.
10. Коммутативные кольца и идеалы (предварительные сведения). Теоремы о гомоморфизме. Построения колец. Примеры.

Примеры билетов:

Билет 1.

1. Докажите, что фундаментальная группа топологической группы коммутативна.
2. Пусть G – группа, A – G -модуль. Постройте биекцию между множеством классов эквивалентности расширений группы G при помощи A , индуцирующих данное действие группы G в A и множеством $H^2(G, A)$.

Билет 2.

1. Найдите левый сопряженный к функтору из категории ассоциативных k -алгебр с единицей в категорию векторных пространств над k , забывающему умножение.
2. Докажите факториальность кольца главных идеалов.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении зачёта и экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Вопрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.