

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Комплексная геометрия
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра квантовой теории поля, теории струн и математической физики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: В.А. Стукопин, д-р физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры квантовой теории поля, теории струн и математической физики
27.03.2025

Аннотация

Курс посвящён изучению основных структур и методов комплексной геометрии с целью применения их в современной физике, в первую очередь в теории струн. Центральная часть курса – теория кэлеровых многообразий, теория Ходжа и элементарное введение в теорию многообразий Калаби-Яу.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- изучение структур комплексной геометрии.

Задачи дисциплины

- овладение методами комплексной геометрии и умением их применять в современной физике.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-4 Способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия	УК-4.1 Способен вести обмен деловой информацией в устной и письменной формах на государственном языке Российской Федерации и не менее чем на одном иностранном языке
	УК-4.2 Владеет навыками, необходимыми для написания, письменного перевода и редактирования различных академических текстов (рефератов, эссе, обзоров, статей и т.д.)
	УК-4.3 Способен представлять результаты академической и профессиональной деятельности на различных научных мероприятиях, включая международные
	УК-4.4 Способен использовать современные средства информационно-коммуникационных технологий для академического и профессионального взаимодействия
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области своей профессиональной деятельности и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов

анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные структуры комплексной геометрии.

уметь:

- использовать методы комплексной геометрии в калибровочных и струнных теориях.

владеть:

- основными вычислительными методами комплексной геометрии.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Комплексная структура, дифференциальные формы.	2			2
2	Интегральное исчисление, формула Коши.	2			2
3	Аналитические множества и гиперповерхности.	2			2
4	Комплексные многообразия, римановы поверхности.	2			2
5	Римановы поверхности алгебраических функций, род римановой поверхности.	2			2
6	Почти комплексные структуры и комплексные структуры.	2			2
7	Формы и метрики. Эрмитовы метрики.	2			2
8	Пучки, расслоения, связности.	2			2
9	Когомологии с коэффициентами в пучках.	2			2

10	Деформации комплексных многообразий.	2			2
11	Теорема Ходжа, оператор Лапласа, гармонические формы.	2			2
12	Кэлеровы многообразия и теория Ходжа, теоремы Лефшеца.	2			2
13	Приложения в теории струн.	2			2
14	Многообразия Калаби-Яу, их свойства.	2			2
15	Многообразия Калаби-Яу. Примеры.	2			2
Итого часов		30			30
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Комплексная структура, дифференциальные формы.

Определение комплексной структуры на векторном пространстве. Напоминание понятия дифференцируемого многообразия и дифференциальной формы.

2. Интегральное исчисление, формула Коши.

Основные понятия и результаты одномерного и многомерного комплексного анализа. Интегральные теоремы Коши. Понятие аналитической и голоморфной функций.

3. Аналитические множества и гиперповерхности.

Определение аналитического множества и аналитической гиперповерхности как множества общих нулей голоморфных функций. Понятие идеала в кольце голоморфных функций. Дифференциал. Мероморфные дифференциалы.

4. Комплексные многообразия, римановы поверхности.

Комплексное многообразие, пучок функций на многообразии. Одномерное комплексное многообразие. Способы его задания. Риманова поверхность. Различие топологической и комплексной структур. Род римановой поверхности.

5. Римановы поверхности алгебраических функций, род римановой поверхности.

Риманова поверхность алгебраической функции. Отображения римановых поверхностей. Теорема Гурвица. Индекс пересечения. Голоморфные формы, голоморфные дифференциалы. Мероморфные дифференциалы. Геометрический род. Периоды. Билинейные соотношения Римана.

6. Почти комплексные структуры и комплексные структуры.

Почти комплексные и комплексные структуры, связь между ними. Понятие интегрируемости. Теорема Фробениуса. Теорема Ньюландера-Ниренберга.

7. Формы и метрики. Эрмитовы метрики.

Метрики, связности, кривизна. Понятие почти комплексной структуры. Комплексная структура. Примеры комплексных структур Метрика Фубини-Штуди. Кэлеровы метрики.

8. Пучки, расслоения, связности.

Голоморфное векторное расслоение. Операции над расслоениями. Группа Пикара. Понятие пучка.

9. Когомологии с коэффициентами в пучках.

Когомологии с коэффициентами в пучке, когомологии Чеха. Экспоненциальная последовательность пучков. Длинная точная последовательность. Инварианты комплексного многообразия.

10. Деформации комплексных многообразий.

Деформации комплексных многообразий. Понятие пространства модулей. Примеры пространств модулей. Пространство модулей в случае эллиптической кривой.

11. Теорема Ходжа, оператор Лапласа, гармонические формы.

Оператор Лапласа на многообразии. Понятие гармонической формы. Теорема Ходжа. Операторы Ходжа и Лефшеца.

12. Кэлеровы многообразия и теория Ходжа, теоремы Лефшеца.

Кэлеровы многообразия. Соотношения Ходжа, разложение Ходжа. Теоремы Лефшеца. Разложение Лефшеца. Кэлеровы тождества. Билинейные соотношения Ходжа-Римана.

13. Приложения в теории струн.

Уравнения Янга-Миллса и голоморфные векторные расслоения. Оператор Дирака.

14. Многообразия Калаби-Яу, их свойства.

Условия Калаби-Яу. Торическая геометрия. Примеры многообразий Калаби-Яу. Модули многообразий Калаби-Яу.

15. Многообразия Калаби-Яу. Примеры.

Зеркальная симметрия. Примеры зеркально симметричных многообразий Калаби-Яу. Зеркальная симметрия для квинтики.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска, при необходимости медиапроектор, экран.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Гриффитс Ф., Харрис. Д. Принципы алгебраической геометрии. Т.1 – Мир, 1982.
2. Вуазен К. Теория Ходжа и комплексная алгебраическая геометрия. - МЦНМО, 2010.
3. Д. Мамфорд Алгебраическая геометрия. I. Комплексные алгебраические многообразия. - Мир. 1979.

Дополнительная литература

1. Грин, Шварц, Виттен. Теория суперструн. - Москва: Мир. 1984.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не предусмотрено.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента в соответствии с данными в рабочей программе. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях;
- при необходимости подготовку к практическим занятиям, коллоквиумам, дифференцированному зачету.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра квантовой теории поля, теории струн и математической физики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
Разработчик:	В.А. Стукопин, д-р физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-4 Способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия	УК-4.1 Способен вести обмен деловой информацией в устной и письменной формах на государственном языке Российской Федерации и не менее чем на одном иностранном языке
	УК-4.2 Владеет навыками, необходимыми для написания, письменного перевода и редактирования различных академических текстов (рефератов, эссе, обзоров, статей и т.д.)
	УК-4.3 Способен представлять результаты академической и профессиональной деятельности на различных научных мероприятиях, включая международные
	УК-4.4 Способен использовать современные средства информационно-коммуникационных технологий для академического и профессионального взаимодействия
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области своей профессиональной деятельности и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Комплексная геометрия» обучающийся должен:

знать:

- основные структуры комплексной геометрии.

уметь:

- использовать методы комплексной геометрии в калибровочных и струнных теориях.

владеть:

- основными вычислительными методами комплексной геометрии.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры контрольных заданий:

1. Докажите, что любое разветвлённое накрытие тора тором является неразветвлённым, то есть индекс любой точки равен 1.
2. Пусть ρ – корень 5 степени из 1. Группа $G = \rho \rtimes \mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}$ действует на P^3 : $(z_0:z_1:z_2:z_3) \rightarrow (z_0: [\rho z_1]_1: [\rho^2 z_2]_2: \rho^3 z_3)$. Описать все неподвижные точки этого действия. Показать, что поверхность $Y: \sum_{i=0}^3 z_i^5 = 0$ является G -инвариантной и индуцированное действие свободно в неподвижных точках. Описать фактор $X=Y/G$.
3. Вычислить $H^*(p,q) (P^n)$.
4. Пусть R^n – евклидово пространство со стандартной евклидовой метрикой. Вычислить оператор Лапласа на дифференциальных формах на R^n . Показать, что дифференциальная форма является гармонической, когда её коэффициенты являются гармоническими функциями.
5. Построить бесконечномерное неприводимое представление алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень примерных вопросов:

1. Доказать, что точная голоморфная p -форма на p -мерном комплексном компактном многообразии тождественно равна нулю.
2. Докажите, что форма пересечения $K3$ поверхности чётная.
3. Вычислите род и эйлерову характеристику кривой Ферма в CP^2 .
4. Доказать, что метрика Фубини-Штуди кэлерова.
5. Доказать, что множество нулей всякой аналитической функции дискретно.
6. Доказать, что на римановой поверхности рода g каждый дивизор степени не меньшей g линейно эквивалентен эффективному дивизору.
7. Докажите, что любое разветвлённое накрытие тора тором является неразветвлённым, то есть индекс любой точки равен 1.
8. Пусть ρ – корень 5 степени из 1. Группа $G = \rho \rtimes \mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5 \rtimes \mathbb{Z}$ действует на P^3 : $(z_0:z_1:z_2:z_3) \rightarrow (z_0: [\rho z_1]_1: [\rho^2 z_2]_2: \rho^3 z_3)$. Описать все неподвижные точки этого действия. Показать, что поверхность $Y: \sum_{i=0}^3 z_i^5 = 0$ является G -инвариантной и индуцированное действие свободно в неподвижных точках. Описать фактор $X=Y/G$.
Вычислить $H^*(p,q) (P^n)$.
9. Пусть R^n – евклидово пространство со стандартной евклидовой метрикой. Вычислить оператор Лапласа на дифференциальных формах на R^n . Показать, что дифференциальная форма является гармонической, когда её коэффициенты являются гармоническими функциями.
10. Построить бесконечномерное неприводимое представление алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$.

Примеры билетов:

Билет 1.

1. Доказать, что метрика Фубини-Штуди кэлерова.
2. Вычислить $H^p(q)(P^n)$.

Билет 2.

1. Доказать, что множество нулей всякой аналитической функции дискретно.
2. Доказать, что на римановой поверхности рода g каждый дивизор степени не меньшей g линейно эквивалентен эффективному дивизору.

Критерии оценивания

Обучающемуся ставится экзамен в соответствии с продемонстрированным уровнем подготовки; оценивание производится на усмотрение преподавателя в соответствии с особенностями дисциплины и следующими критериями:

Оценка "отлично" (10 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области,

продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (9 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (8 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочётами.

Оценка "хорошо" (7 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка "хорошо" (6 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка "хорошо" (5 баллов) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка "удовлетворительно" (4 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка "удовлетворительно" (3 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка "неудовлетворительно" (2 балла) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка "неудовлетворительно" (1 балл) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении оценивания знаний обучающемуся предоставляется время на подготовку на усмотрение преподавателя. Опрос обучающегося на экзамене не должен превышать одного астрономического часа. Оценивание знаний производится в соответствии с вышеуказанными критериями в соответствии с содержанием дисциплины.