

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория особенностей алгебраических многообразий
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра фундаментальной математики
курс:	2
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: Д.А. Степанов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры фундаментальной математики 28.03.2025

Аннотация

Курс посвящён теории особенностей алгебраических многообразий. С формально-локальной точки зрения гладкие точки алгебраических многообразий одинаковы, и наибольший интерес представляют точки, в которых гладкость нарушается, т. е. особые точки. Теория особенностей доставляет массу задач интересных как сами по себе, так и с точки зрения приложений к другим областям: классификации алгебраических многообразий, зеркальной симметрии и др.

В данном курсе планируется познакомить слушателя с основами как аналитической (центральная тема – расслоение Милнора), так и алгебраической (где основным результатом будет доказательство существования разрешения особенностей алгебраических кривых и поверхностей) теории. Серьёзное внимание будет уделено примерам: особенности гиперповерхностей и полных пересечений, факторособенности по конечным группам, особенности торических многообразий, особенности, возникающие в программе минимальных моделей.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение теории особенностей алгебраических многообразий в объёме, необходимом современному математику-исследователю, специализирующемуся в области алгебраической геометрии и её приложений к теоретической физике.

Задачи дисциплины

- ознакомить слушателя с основными понятиями, теоремами и методами теории особенностей.
- сформировать представление о взаимодействии теории особенностей с другими областями современной математики и теоретической физики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту

ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в составе научного коллектива
	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

Основы теории особенностей алгебраических многообразий.

уметь:

Вычислять основные инварианты, строить разрешения особенностей.

владеть:

Методами решения задач по теории особенностей алгебраических многообразий.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Предварительные сведения из топологии и анализа	2			2
2	Основные факты о комплексных алгебраических множествах	2			2
3	Расслоение Милнора	2			2
4	Топология линка и слоя Милнора особенности	2			2
5	Монодромия	2			2
6	Приложения и примеры	2			2
7	Предварительные сведения из алгебры и алгебраической геометрии	2			2
8	Раздутие и нормализация	2			2
9	Разрешение особенностей алгебраических кривых	2			2
10	Разрешение особенностей алгебраических поверхностей	2			2
11	Граф разрешения	2			2
12	Пример: факторособенности	3			3
13	Пример: торические многообразия, их особенности и разрешения	3			3
14	Особенности, возникающие в программе минимальных моделей	2			2
Итого часов		30			30

Подготовка к экзамену	30 час.
Общая трудоёмкость	90 час., 2 зач.ед.

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Предварительные сведения из топологии и анализа

Напоминание (с доказательствами, где необходимо) следующих фактов: теорема о неявной функции, понятие особого значения и особой точки дифференцируемого отображения, трансверсальные пересечения, теорема Сарда. Понятие локально тривиального расслоения, теорема Эресмана.

2. Основные факты о комплексных алгебраических множествах

Понятие алгебраического подмножества комплексного аффинного пространства, неприводимые компоненты. Лемма Милнора об отборе кривых.

3. Расслоение Милнора

Особенности аналитических гиперповерхностей. Линк и коническая структура в окрестности изолированной особой точки. Отображение и расслоение Милнора, его локальная тривиальность и корректность его определения.

4. Топология линка и слоя Милнора особенности

Связность линка и гомотопический тип слоя Милнора. Число Милнора и его эквивалентные определения.

5. Монодромия

Монодромия расслоения Милнора и её свойства.

6. Приложения и примеры

Особенности Брискорна-Фама, их линки, слои Милнора и монодромия. Экзотические сферы. Целые гомологические сферы и особенности сплайсового типа.

7. Предварительные сведения из алгебры и алгебраической геометрии

Алгебраические многообразия и их особые точки. Критерий Якоби. Особое множество – собственное подмножество алгебраического многообразия. Понятие разрешения особенностей.

8. Раздутие и нормализация

Нормальные особые точки и целозамкнутые локальные кольца. Нормализация. Понятие раздутия: раздутие неособой точки, подмногообразия, пучка идеалов. Вычисления в локальных картах.

9. Разрешение особенностей алгебраических кривых

Вложенное разрешение особенностей алгебраических кривых.

10. Разрешение особенностей алгебраических поверхностей

Разрешение особенностей алгебраических поверхностей в характеристике 0.

11. Граф разрешения

Понятие графа разрешения особенностей поверхности. Отрицательная определённости матрицы пересечений исключительных кривых. Фундаментальный цикл.

12. Пример: факторособенности

Кольца инвариантов конечных групп. Конечные подгруппы группы $SL(2)$, особенности ADE и их разрешения.

13. Пример: торические многообразия, их особенности и разрешения

Аффинные торические многообразия. Общие торические многообразия, решётки и веера. Торическое разрешение особенностей.

14. Особенности, возникающие в программе минимальных моделей

Общее понятие о программе минимальных моделей (ПММ) и особенностях, возникающих в ПММ: терминальные, канонические особенности и др.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска, медиапроектор, экран.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Дж. Милнор. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
2. S. D. Cutkosky, Resolution of Singularities, AMS, 2004.
3. Ю.Г. Прохоров, Особенности алгебраических многообразий, М.: МЦНМО, 2009.

Дополнительная литература

1. J. Seade, On the topology of isolated singularities in analytic spaces, Birkhaeuser, 2006.
2. D. Eisenbud, W. Neumann, Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities, Princeton University Press, 1985.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Zoom, Skype

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладные математика и физика
профиль подготовки: Общая и прикладная физика
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
кафедра фундаментальной математики
курс: 2
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Разработчик: Д.А. Степанов, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в составе научного коллектива
	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория особенностей алгебраических многообразий» обучающийся должен:

знать:

Основы теории особенностей алгебраических многообразий.

уметь:

Вычислять основные инварианты, строить разрешения особенностей.

владеть:

Методами решения задач по теории особенностей алгебраических многообразий.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Не предусмотрено.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов

1. Докажите, что множество особых точек алгебраического многообразия не может совпадать со всем многообразием.
2. Конструкция раздутия пучка идеалов на многообразии.
3. Определение расслоения Милнора для изолированной особенности аналитической гиперповерхности.
4. Теорема о разрешении особенностей алгебраической поверхности.
5. Конечные подгруппы в группе $SL(2)$ и особенности типа ADE.
6. Доказать, что особенность Брискорна изолирована и неприводима ($n > 2$).
7. Построить вложенное разрешение каспидальной кубики.
8. Найти фундаментальный цикл особенности типа A_n .
9. Найти характеристический многочлен монодромии особенности D_4 .
10. Задать особенность A_3 с помощью решётки и конуса как торическое многообразие.

Примеры билетов:

Билет 1.

1. Сформулируйте и приведите основные этапы доказательства теоремы о расслоении Милнора.
2. Найдите граф разрешения особенности E_6 $x^2 + y^3 + z^4 = 0$.

Билет 2.

1. Докажите, что кольцо инвариантов конечной группы конечно порождено.
2. Докажите, что особенности типа A_n – канонические.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении зачёта и экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Вопрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.