

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Когомологическая теория поля
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра теоретической и математической физики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: А.В. Пополитов, phd (к.ф.-м.н.)

Программа обсуждена на заседании кафедры теоретической и математической физики 27.03.2025

Аннотация

Курс формирует у студентов практические навыки работы с наиболее математическими частями науки о матричных моделях.

Математические конструкции, которые возникнут в ходе курса – это топологическая рекурсия на спектральной кривой,

когомологические теории поля (CohFT), Фробениусовы многообразия и группа Гивенталья.

На примере одно и двумерных когомологических теорий поля, которые на языке матричных моделей отвечают одноразрезным спектральным кривым, студенты научатся работать со всеми этими объектами, а также тому, как они друг с другом взаимосвязаны и в каких обстоятельствах лучше использовать тот или иной объект (подход).

Часть курса будет посвящена математическим приложениям, таким как теория пересечений на пространстве модулей римановых поверхностей с отмеченными точками и связи с теорией интегрируемых иерархий.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Формирование у студентов практических навыков работы с когомологическими теориями поля, Фробениусовыми многообразиями и группой Гивенталья в той мере, в которой это требуется для решения современных задач математической физики.

Задачи дисциплины

Обучение студентов основным принципам и методам работы с когомологическими теориями поля и Фробениусовыми многообразиями, и тем самым в подготовка студентов к ведению исследований в областях теоретической физики и математики, где теория групп непосредственно применяется.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения

ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в составе научного коллектива
	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основные принципы работы с кохомологическими теориями поля и Фробениусовыми многообразиями, соответствующие модели и абстракции.

уметь:

Эффективно использовать на практике теоретические понятия, решать базовые задачи, связанные с соответствующими понятиями кохомологических теорий поля и Фробениусовых многообразий.

владеть:

Основными методами работы с кохомологическими теориями поля и Фробениусовыми многообразиями.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Кохомологические теории поля	8	8		8
2	Фробениусовы многообразия	7	7		7
3	Группа Гивенталя	8	8		8
4	Топологическая рекурсия на спектральной кривой	7	7		7
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Кохомологические теории поля

Определение кохомологической теории поля. Вычисление явного вида кохомологических теорий поля и ELSV-формул на примерах двумерных кохомологических теорий поля. Получение соотношений в тавтологическом кольце с помощью вырождения класса Виттена.

2. Фробениусовы многообразия

Определение Фробениусова многообразия. Связь Фробениусовых многообразий и кохомологических теорий поля. Суперпотенциал Дубровина и формулировка Кричевера для Фробениусовых многообразий.

3. Группа Гивенталья

Определение группы Гивенталья. Явные формулы для иерархий Дубровина-Дзянга через группу Гивенталья. Соотношения Пикстона.

4. Топологическая рекурсия на спектральной кривой

Определение топологической рекурсии. Связь с матричными моделями и ее ограничения. Эквивалентность кохомологическим теориям поля и ограничения.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска.

Компьютер для использования интернет-ресурсов.

Проектор для демонстраций иллюстраций и визуального материала.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. B.Dubrovin «Geometry of 2d topological field theories»
2. B.Dubrovin «Painleve transcendents and two-dimensional topological field theory»

Дополнительная литература

1. A.Buryak «Topology of moduli space of curves and integrable hierarchies»

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://www.arxiv.org> – Архив электронных препринтов

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

zoom, Google meet

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

– посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;

- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладные математика и физика
профиль подготовки: Общая и прикладная физика
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
кафедра теоретической и математической физики
курс: 1
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.В. Пополитов, phd (к.ф.-м.н.)

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области своей профессиональной деятельности, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области профессиональной деятельности, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в составе научного коллектива
	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Когомологическая теория поля» обучающийся должен:

знать:

Основные принципы работы с когомологическими теориями поля и Фробениусовыми многообразиями, соответствующие модели и абстракции.

уметь:

Эффективно использовать на практике теоретические понятия, решать базовые задачи, связанные с соответствующими понятиями когомологических теорий поля и Фробениусовых многообразий.

владеть:

Основными методами работы с когомологическими теориями поля и Фробениусовыми многообразиями.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры заданий для контрольной работы и домашнего задания:

1. С помощью бозон-фермионного соответствия перепишите производящую функцию простых чисел Гурвица через фермионные корреляторы.
2. Напишите формулу для ядра Бергмана в локальных координатах для кривой рода 0.
3. Постройте топологическую рекурсию для чисел Каталана.
4. Напишите производящую функцию для пополненных циклов накрытий Гурвица.
5. Доказать квазиполиномиальность операторов для простых чисел Гурвица.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов:

1. Посчитать R-матрицу Гивенталя для двумерных когомологических теорий поля.
2. Вычислить суперпотенциал для эрмитовой гауссовой матричной модели.
3. Вычислить суперпотенциал для теории Громова-Виттена для $P1$.
4. Получить простейшее соотношение в тавтологическом кольце путем вырождения Виттеновского класса.
5. Вычислить несколько первых простых чисел Гурвица с помощью топологической рекурсии.
6. Рассказать доказательство эквивалентности локальной топологической рекурсии действию соответствующего элемента группы Гивенталя (DBOSS-теорема).
7. Рассказать доказательство классификационной теоремы о форме двумерных фробениусовых препотенциалов.
8. Объяснить логику и один из принципиальных шагов доказательства топологической рекурсии для простых чисел Гурвица через теорему Боро-Шадрина.
9. Рассказать о границах применимости эквивалентности топологической рекурсии и матричных моделей.
10. Объяснить принципиальные шаги в доказательстве гипотезы Пикстона.

Примеры билетов:

Билет 1.

1. Рассказать доказательство классификационной теоремы о форме двумерных фробениусовых препотенциалов.
2. Объяснить логику и один из принципиальных шагов доказательства топологической рекурсии для простых чисел Гурвица через теорему Боро-Шадрина.

Билет 2.

1. Вычислить суперпотенциал для эрмитовой гауссовой матричной модели.
2. Вычислить суперпотенциал для теории Громова-Виттена для $P1$.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачёт проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении зачёта обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.