

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Теория узлов
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: В.О. Мантуров, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Данный курс представляет собой обзор современной теории узлов и ее связей с маломерной и алгебраической топологией. С полными доказательствами приводятся ключевые теоремы теории узлов, строятся скейн-инварианты, теория линк-гомотопий Милнора, инварианты Васильева (и интеграл Концевича), теория гомологий Хованова и гомологий Хегора-Флоера, обсуждаются квантовые инварианты узлов и инварианты трехмерных многообразий. Приводятся алгоритмы распознавания кос и трехмерных кос. Каждая лекция курса снабжена подборкой задач - от упражнений до нерешенных проблем маломерной топологии

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение дополнительных глав теории узлов

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области теории узлов
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории узлов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области теории узлов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории узлов
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов теории узлов;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории узлов.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ЭК;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ЭК;
- ☐ предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Узлы, движения Рейдемейстера. Коэффициент зацепления, Инвариант раскрасок	2	2		9
2	Скобка Кауфмана, Полином Джонса	4	4		10

3	Инвариант раскрашенных узлов	6	6		12
4	Группа кос	2	2		10
5	Инварианты	8	8		16
6	Алгебра хордовых диаграмм	8	8		18
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

##### 1. Узлы, движения Рейдемейстера. Коэффициент зацепления, Инвариант раскрасок

Коэффициент зацепления, Инвариант раскрасок

##### 2. Скобка Кауфмана, Полином Джонса

Скобка Кауффмана: определение, Полином Джонса, определение через скобку Кауффмана. Теорема Кауффмана-Мурасуги.

##### 3. Инвариант раскрашенных узлов

Определение инвариант узла, примеры. Фундаментальная группа дополнения. Квандл. Полный инвариант.

##### 4. Группа кос

Геометрическое определение, Топологическое определение, Алгебро-геометрическое определение. Теоремы Маркова и Александера.

##### 5. Инварианты

Инварианты Куперберга и Хомфли. Скобка с метками. Инварианты Васильева. Все предыдущие через них выражаются.

##### 6. Алгебра хордовых диаграмм

Интеграл Концевича. Определение линк-гомотопии, Инвариант относительно линк-гомотопии

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

#### 6.Перечень рекомендуемой литературы

##### Основная литература

1. Введение в теорию узлов [Текст] = Introduction to knot theory/Р. Кроуэлл, Р. Фокс , -М., Мир, 1967
2. Общая топология. Основные конструкции [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. В. Федорчук, В. В. Филиппов .— М. : Изд-во МГУ, 1988 .— 250, [2] с. - Библиогр.: с. 252. - 5000 экз. - ISBN 5-211-00082-X (в пер.).

Дополнительная литература

1. Алгебраическая топология [Текст] / А. Хатчер пер. с англ. В. В. Прасолова ; под ред. Т. Е. Панова - М.МЦНМО,2011

**7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

учебная аудитория, экран и проектор.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	В.О. Мантуров, д-р физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория узлов» обучающийся должен:

**знать:**

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории узлов
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов теории узлов;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории узлов.

**уметь:**

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ЭК;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

**владеть:**

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ЭК;
- ☐ предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

Контрольная работа (пример)

1. Вычислить число раскрасок в три цвета для трилистника. Показать, что трилистник нетривиален.
2. Построить минимальную диаграмму узла с 13 перекрестками.
3. Вычислить скобку Кауфмана (и полином Джонса) для восьмёрки.
4. Вычислить фундаментальные группы тора
5. Вычислить количество правильных раскрасок квандром  $(\mathbb{Z}_5, *)$ ,  $a*b = 2b - a$  для трилистника и восьмерки.

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Вычислить коэффициент зацепления для Уайтхеда.
2. Проверить, что при замене проходов на переходы в скобке Кауфмана происходит замена  $a \rightarrow a^{-1}$ ;
3. Посчитать скобку Кауфмана для левого трилистника.
4. Посчитать инвариант Конвея для восьмерки.
5. Найти представление фундаментальной группы правого трилистника.
6. Вычислить определитель узлов для  $5_1$ . Уточнить, что для какого простого числа  $p$  можно нетривиально раскрасить узел  $5_1$  квандром  $(\mathbb{Z}_p, *)$ ,  $a*b = 2b - a$ .
7. Сформулировать теорему Александра и теорему Маркова. Преобразовать данную диаграмму в форму косы.
8. Вычислить примитивные элементы для алгебры хордовых диаграмм, в которых есть одночленные соотношения, для порядков 2 и 3.

Критерии оценивания



- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.