

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Дискретный анализ
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Информатика
	Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
	кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 09.02.2022

Аннотация

Изучение дисциплины подготовит слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области комбинаторных задач прикладной математики, физики и экономики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

изучение математических основ современной комбинаторики, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области комбинаторных задач прикладной математики, физики и экономики.

Задачи дисциплины

- ☐ изучение математических основ современной комбинаторики;
- ☐ приобретение слушателями теоретических знаний в области комбинаторного анализа задач, возникающих на практике;
- ☐ освоение аналитического и алгебраического аппарата дискретной математики и получение навыков работы с основными дискретными структурами.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- ☐ предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Асимптотики.	5	5		3
2	Биномиальные коэффициенты.	4	4		3
3	Вероятностный метод.	4	4		6
4	Гамильтоновы циклы и пути.	4	4		6
5	Плоские графы.	5	5		3
6	Теорема Турана.	4	4		6
7	Эйлеровы пути и циклы в графах.	4	4		3
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Асимптотики.

Асимптотики. Формула Стирлинга.

2. Биномиальные коэффициенты.

Биномиальные коэффициенты. Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов.

3. Вероятностный метод.

Вероятностный метод. Случайные графы. Неравенства Маркова и Чебышёва. Неравенство для случайного блуждания. Моменты и факториальные моменты.

4. Гамильтоновы циклы и пути.

Гамильтоновы циклы и пути. Достаточное условие гамильтоновости графа.

5. Плоские графы.

Плоские графы. Формула Кэли. Унициклические графы.

6. Теорема Турана.

Теорема Турана. Дистанционные графы. Понятие симплекса в пространстве. Оценка числа ребер у дистанционного графа в произвольной размерности.

7. Эйлеровы пути и циклы в графах.

Эйлеровы пути и циклы в графах. Критерий эйлеровости орграфа. Последовательности и графы де Брёйна.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вероятность и алгебра в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2010 .— 48 с.
2. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2007 .— 144 с.
3. Комбинаторика [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Н. Я. Виленкин .— М. : Наука, 1969 .— 328 с.

Дополнительная литература

1. Линейная алгебра [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— 3 - е изд., доп. — М. : Наука, 1984 .— 295 с.
2. Алгебра [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / С. Ленг ; пер. с англ. Е. С. Голда ; под ред. А. И. Кострикина .— М. : Мир, 1968 .— 564 с.
3. Шень А. Математическая индукция. М.; МЦНМО. 2016
4. Канель-Белов А.Я.; Ковальджи А.К.. Как решают нестандартные задачи. М.; МЦНМО, 2016

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не предусмотрено.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Информатика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра дискретной математики
курс: 2
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дискретный анализ» обучающийся должен:

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- ☐ предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Задачи для дифференцированного зачета:

Задача 1. Найдите $m(2)$ и $m(3)$.

Задача 2. Найдите как можно более точные оценки для $m(4)$.

Задача 3. Найдите $m(n, 3, 1)$.

Задача 4. На планете Марс 100 государств объединены в блоки, в каждом из которых не больше 50 государств. Известно, что любые два государства состоят вместе хотя бы в одном блоке. Найдите минимально возможное число блоков.

Задача 5. Ровно 19 вершин правильного 97-угольника покрашено в белый цвет, остальные вершины покрашены в чёрный. Тогда число равнобедренных одноцветных треугольников с вершинами в вершинах 97-угольника не зависит от способа раскраски. (Треугольник одноцветный, если все его вершины или белые, или чёрные.)

Задача 6. Пусть G - n -однородный гиперграф с k вершин. Докажите, что существует раскраска вершин N в четыре цвета, при которой в каждом ребре есть все цвета.

Задача 7. Найдите $R(3, 3)$ и $R(3, 4)$.

Задача 8. Пусть $R(3, 3, 3)$ – это минимальное n такое, что при любой раскраске ребер в красный, жёлтый и зелёный цвета найдется одноцветный треугольник. Вычислите $R(3, 3, 3)$,

Задача 9. Пусть $R(k, l, m)$ – естественное обобщение для $R(3, 3, 3)$. Напишите какое-нибудь рекуррентное неравенство, доказывающее, что величина $R(k, l, m)$ всегда корректно определена.

Примерный перечень вопросов к экзамену:

1. Асимптотики и оценки комбинаторных величин
2. Графы
3. Асимптотики в теории графов
4. Обходы графов
5. Гамильтоновость в турнирах. Теорема Турана
6. Дистанционные графы
7. Связность случайных графов
8. Связность $G(n, p)$, гигантская компонента, характеристические числа $G(n, p)$
9. Жадный алгоритм раскраски графа. Теорема Эрдеша
10. Теорема Эрдеша. Количество ребер в гиперграфе k -однородный 1- и t -пересекающийся гиперграф. Кнезеровский граф
11. Теорема Борсука, Улама, Люстерника, Шнирельмана. $m(n, k, t)$, оценки этой величины
12. Хроматическое число пространства. Гипотеза Борсука
13. Числа Рамсея
14. Нижняя оценка $R(s, s)$. Локальная лемма Ловаса
15. Локальная лемма Ловаса. $R(3, t)$
16. Хроматическое число пространства. Гипотеза Борсука
17. Теорема о верхней оценке $b(s, s)$
18. Система общих представителей
19. Системы общих представителей. Оценки $\tau(M)$
20. Оценка $\tau(M)$. Система общих представителей с как можно большим $\tau(M)$
21. Размерность Вапника-Червоненкиса, теоремы Вапника-Червоненкиса
22. Теорема Вапника-Червоненкиса
23. VC-размерность в статистике. Матрицы Адамара
24. Задача об уклонении
25. Плоские и планарные графы

Пример экзаменационного билета:

1. Теорема Вапника-Червоненкиса
2. Числа Рамсея

3. Задача. В любом множестве из n различных натуральных чисел найдётся подмножество из более чем $n/3$ чисел, в котором нет трёх чисел, сумма двух из которых равна третьему.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.