

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**и.о. директора физтех-школы  
физики и исследований им.  
Ландау**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Теория групп и представлений
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра проблем физики и астрофизики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составили:

М.А. Григорьев, канд. физ.-мат. наук

М.Н. Алфимов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры проблем физики и астрофизики 25.05.2020

## Аннотация

Данный курс посвящён базовым понятиям теории групп и представлений, необходимым для занятий теоретической и математической физикой, в частности, решения задач в квантовой теории поля и смежных областях.

Программа включает в себя базовые понятия об алгебраических и геометрических структурах, основы теории групп и алгебр, включая алгебры Ли, и их представлений. Отдельное внимание будет уделено алгебрам Ли и их представлениям, наиболее часто встречающимся при изучении основ квантовой теории поля.

Отдельной задачей курса является развитие у слушателей математической культуры при решении физических задач.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по теории групп, алгебр Ли и их представлений для дальнейшего использования в теоретической и математической физике;
- формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

#### Задачи дисциплины

- формирование у обучающихся базовых знаний по теории групп, алгебр Ли и их представлений;
- формирование общематематической культуры: умение логически мыслить, давать определения основных объектов и проводить доказательства основных утверждений;
- формирование умений и навыков использования теоретико-групповых методов в задачах квантовой механики и теории поля.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований, и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- определение основных алгебраических структур: группы, кольца, поля, ассоциативные алгебры и алгебры Ли, линейные представления;
- основные геометрические понятия, необходимые для теории групп Ли и ее приложений (поверхности, многообразия, основы топологии, касательные вектора и пространства);
- действия групп, однородные пространства, нормальные подгруппы;
- классические группы Ли; Группы Лоренца и Пуанкаре;
- общую структуру представлений унитарных и ортогональных групп.

уметь:

- доказывать основные факты теории конечномерных представлений  $SL(2, \mathbb{C})$  и  $SL(3, \mathbb{C})$  ( $SU(2)$  и  $SU(3)$ );
- уметь раскладывать заданное представление  $SL(2, \mathbb{C})$  в прямую сумму неприводимых;
- явно строить представления ортогональных групп в произвольной размерности, в том числе спинорные.

владеть:

- тензорными произведениями линейных пространств и представлений;
- методами комплексификации, о вещественности и перехода к компактной вещественной форме;
- модулями Верма и весовыми разложениями представлений;
- методом индуцированных представлений, понятием малой группы для анализа унитарных представлений группы Пуанкаре, возникающих в квантовой теории.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Абстрактные группы, линейные представления, тензорная алгебра	3	3		7
2	Группы Ли и дифференцируемые многообразия. Компактные группы	4	4		8
3	Касательные алгебры Ли и их представления. Представления старшего веса	4	4		7
4	Спиноры и алгебры Клиффорда. Индуцированные представления алгебр и групп Ли. Унитарные представления группы Пуанкаре	4	4		8
Итого часов		15	15		30
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

###### 1. Абстрактные группы, линейные представления, тензорная алгебра

Группы преобразований и абстрактные группы. Группы симметрий. Примеры. Определение группы, гомоморфизмы и изоморфизмы групп, подгруппы, нормальные подгруппы. Образ и ядро. Группа перестановок, конечные группы. Линейные отображения между пространствами, линейные представления. Прямая сумма и тензорное произведение линейных пространств и представлений, линейные функционалы, двойственное пространство, тензоры. Комплексификация и овеществление линейных пространств, вещественная форма. Градуировка и фильтрация на линейном пространстве. Тензорная алгебра. Симметричные тензора. Алгебра Грассмана.

## 2. Группы Ли и дифференцируемые многообразия. Компактные группы

Многообразия как поверхности в евклидовом пространстве. Минимальные сведения из топологии и геометрии: топологическое пространство, связность, непрерывные отображения, локальные координаты, гладкие отображения, касательное пространство, дифференциальные формы и интегрирование. Классические группы Ли  $GL(n)$ ,  $SL(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n)$ ,  $Sp(n)$ , группы Евклида, Лоренца и Пуанкаре, группы  $U(n)$  и  $SU(n)$ . Компактные группы, усреднение по группе, полная приводимость представлений. Редуктивные группы.

## 3. Касательные алгебры Ли и их представления. Представления старшего веса

Связь между группой Ли и алгеброй Ли для матричных групп. Экспоненциальное отображение. Алгебры Ли классических групп Ли. Понятие представления алгебры. Приводимые, неприводимые и вполне приводимые представления. Гомоморфизмы представлений, сплетающие операторы, лемма Шура. Форма Киллинга. Полупростые алгебры.

Вес, вектор старшего веса. Теория представлений  $sl(2, \mathbb{C})$  как пример общего метода, реализация неприводимых представлений на полиномах от двух и трех переменных. Матрицы Паули. Гармонические полиномы. Гармонический анализ на сфере. Связь с квантовой теорией углового момента. Структура представлений. Модуль Верма для алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$ . Реализация модуля Верма алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  в пространстве полиномов от одной переменной. Неприводимые представления  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $SO(n)$ .

## 4. Спиноры и алгебры Клиффорда. Индуцированные представления алгебр и групп Ли. Унитарные представления группы Пуанкаре

Соотношения и ассоциативные алгебры. Алгебры Клиффорда. Представления алгебр Клиффорда. Связь между алгебрами Клиффорда и матричными алгебрами. Спиноры. Спинорные представления ортогональных алгебр. Группы  $Spin(n)$ .

Индуцированные представления алгебр и групп Ли. Алгебры Лоренца и Пуанкаре в  $n$  измерениях. Классификация Вигнера унитарных представлений группы Пуанкаре. Малая группа. Массивные и безмассовые поля.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска, мел, при необходимости проектор и экран.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Компактные группы Ли и их представления [Текст]/Д. П. Желобенко, -М., Наука, 1970
2. Квантовая теория поля [Текст]. В 2 т. Т. 1/С. Вайнберг, -М., Физматлит, 2003
3. Винберг Э.Б., Начала алгебры, Москва 2002.
4. W. Fulton and J. Harris, Representation Theory. A First Course, Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New-York, 1991.

### Дополнительная литература

1. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— М. : МЦНМО, 2012 .— .— Ч. 1 : Основы алгебры. - 2012. - 272 с.
2. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : Основные структуры алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2009, 2012 .— 272 с.
3. Линейная алгебра и геометрия [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин 4 2 - е изд., перераб. — М. : Наука, 1986 .— 304 с.
4. Хамфрис Дж., Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.

#### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».

<http://benran.ru> – библиотека по естественным наукам Российской академии наук.

<http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

<http://biblio.mcsme.ru> – электронная библиотека Московского центра непрерывного математического образования.

#### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

<http://xxx.lanl.gov/>

<http://inspirehep.net/>

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра проблем физики и астрофизики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

**Разработчики:**

М.А. Григорьев, канд. физ.-мат. наук

М.Н. Алфимов, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований, и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория групп и представлений» обучающийся должен:

### знать:

- определение основных алгебраических структур: группы, кольца, поля, ассоциативные алгебры и алгебры Ли, линейные представления;
- основные геометрические понятия, необходимые для теории групп Ли и ее приложений (поверхности, многообразия, основы топологии, касательные вектора и пространства);
- действия групп, однородные пространства, нормальные подгруппы;
- классические группы Ли; Группы Лоренца и Пуанкаре;
- общую структуру представлений унитарных и ортогональных групп.

### уметь:

- доказывать основные факты теории конечномерных представлений  $SL(2, \mathbb{C})$  и  $SL(3, \mathbb{C})$  ( $SU(2)$  и  $SU(3)$ );
- уметь раскладывать заданное представление  $SL(2, \mathbb{C})$  в прямую сумму неприводимых;
- явно строить представления ортогональных групп в произвольной размерности, в том числе спинорные.

### владеть:

- тензорными произведениями линейных пространств и представлений;
- методами комплексификации, о вещественности и перехода к компактной вещественной форме;
- модулями Верма и весовыми разложениями представлений;
- методом индуцированных представлений, понятием малой группы для анализа унитарных представлений группы Пуанкаре, возникающих в квантовой теории.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Не предусмотрено.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Контрольные вопросы:

- 1) Группы преобразований и абстрактные группы.
- 2) Группы симметрий. Примеры.
- 3) Определение группы, гомоморфизма и изоморфизма групп, подгруппы, нормальной подгруппы.
- 4) Образ и ядро гомоморфизма.
- 5) Группа перестановок, конечные группы.
- 6) Линейные отображения между пространствами, линейные представления.
- 7) Прямая сумма и тензорное произведение линейных пространств и представлений.
- 8) Двойственное представление. Комплексификация и овеществление линейных пространств, вещественная форма.
- 9) Градуировка и фильтрация на линейном пространстве. Тензорная алгебра. Симметричные тензора.
- 10) Алгебра Грассмана.
- 11) Многообразия как поверхности в евклидовом пространстве.
- 12) Базовые понятия топологии: топологическое пространство, связность, непрерывные отображения.
- 13) Локальные координаты на многообразии, гладкие отображения.
- 14) Касательное пространство, дифференциал отображения.
- 15) Дифференциальные формы и интегрирование.
- 16) Классические группы Ли  $GL(n)$ ,  $SL(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n)$  и  $Sp(n)$ .
- 17) Группы Евклида, Лоренца и Пуанкаре, группы  $U(n)$  и  $SU(n)$ .
- 18) Компактные группы, усреднение по группе, полная приводимость представлений.
- 19) Редуктивные группы.
- 20) Алгебры Ли. Связь между группой Ли и алгеброй Ли для матричных групп.
- 21) Экспоненциальное отображение.
- 22) Алгебры Ли классических групп Ли.
- 23) Понятия представления алгебры. Приводимые, неприводимые и вполне приводимые представления.
- 24) Гомоморфизмы представлений, сплетающие операторы, лемма Шура.
- 25) Форма Киллинга. Полупростые алгебры.
- 26) Веса, вектор старшего веса, представления старшего веса.
- 27) Теория представлений  $sl(2, \mathbb{C})$  как пример общего метода. Матрицы Паули.
- 28) Реализация неприводимых представлений  $sl(2, \mathbb{C})$  на полиномах от двух и трех переменных.
- 29) Гармонические полиномы. Гармонический анализ на сфере. Связь с квантовой теорией углового момента.
- 30) Модуль Верма для алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$ . Реализация модуля Верма алгебры Ли  $sl(2, \mathbb{C})$  в пространстве полиномов от одной переменной.
- 31) Неприводимые представления  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $SO(n)$ .
- 32) Ассоциативные алгебры. Образующие и соотношения. Алгебра Клиффорда.
- 33) Представления алгебры Клиффорда. Связь между алгебрами Клиффорда и матричными алгебрами. Спиноры.
- 34) Спинорные представления ортогональных алгебр. Группы  $Spin(n)$ .
- 36) Индуцированные представления алгебр и групп Ли.
- 37) Алгебры Лоренца и Пуанкаре в  $n$  измерениях. Частицы как унитарные неприводимые представления группы Пуанкаре.
- 38) Классификация Вигнера унитарных неприводимых представлений группы Пуанкаре. Малая группа. Массивные и безмассовые поля.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет 1.

1. Выразить свойство универсальности как коммутативную диаграмму.
2. Доказать, что  $SL(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $U(n)$  связны, а  $O(n)$  содержат две компоненты связности.

Билет 2.



1. Найти размерность (т.е. число независимых параметров из поля  $K$ ) для групп  $SO(V)$  и  $O(V)$ . Найти явную параметризацию произвольного элемента  $SO(2, R)$  в  $O(2, R)$ .

2. Показать непосредственным вычислением, что операторы  $E_+$ ,  $E_-$  и  $H$  представляют  $sl(2, C)$ .

Билет 3.

1. Найти орбиты и подгруппу стабильности для естественного действия аффинной группы  $IGL(n, R)$  в  $R^n$ .

2. К какому виду можно привести матрицы  $R(g)$  выбором базиса в  $V$ , если в  $V$  имеется нетривиальное подпредставление? То же в случае, если известно, что представление  $V$  вполне приводимо.

Билет 4.

1. Найти матричную реализацию группы  $ISO(1, 1)$ . Найти явную параметризацию матриц  $ISO(1, 1)$  независимыми параметрами. Сколько таких параметров?

2. Доказать, что в случае  $X=R$  и  $Y=R$  непрерывность отображения  $X$  в  $Y$  как топологических пространств эквивалентна непрерывности функции, задающей отображение.

Билет 5.

1. Доказать, что поле рациональных чисел  $Q$  не имеет нетривиальных подполей.

2. Найти скалярные произведения всех базисных векторов  $v_0, v_1, \dots, v_n$  представления  $d^n$ . Убедиться, что полученное произведение действительно инвариантно относительно  $su(2)$ .

### Критерии оценивания

Оценка "отлично" (10 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (9 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (8 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочётами.

Оценка "хорошо" (7 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка "хорошо" (6 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка "хорошо" (5 баллов) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка "удовлетворительно" (4 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка "удовлетворительно" (3 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка "неудовлетворительно" (2 балла) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка "неудовлетворительно" (1 балл) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать одного астрономического часа.