

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Проректор по учебной работе и
довузовской подготовке**

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Линейная алгебра
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра высшей математики
курс:	1
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

лекции: 45 час.

семинары: 45 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 180, всего зач. ед.: 4

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: П.А. Кожевников, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

Аннотация

В курсе "Линейная алгебра" изучаются основы линейной алгебры.

В начале курса даются основы теории линейных пространств (базис, размерность, суммы и пересечения подпространств).

Вводятся понятия линейных отображения и преобразования, ядра и образа. Обсуждается перевод всех этих понятий на матричный язык.

Изучается структура линейного преобразования (оператора) линейного пространства. Изучаются инвариантные подпространства, собственные значения и собственные векторы, характеристический многочлен, вопросы, связанные с диагонализуемостью оператора, включая жорданову нормальную форму.

Далее вводятся понятия билинейной/полуторалинейной формы, (косо)симметрической билинейной формы (эрмитовой), квадратичной формы, изучаются вопросы приведения матрицы такой формы к каноническому виду.

Вводится и изучается понятие евклидова (эрмитова) пространства, связанные с ним понятия (длина, ортогональная проекция, объём).

Изучаются линейные операторы и квадратичные формы на евклидовых пространствах, их приведение к каноническому виду.

Вводится и изучается двойственное пространство.

В завершение курса, вводится общее понятие тензора, описываются основные свойства тензоров и тензорные операции.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

ознакомление слушателей с основами линейной алгебры и подготовка к изучению других математических курсов – дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, уравнений математической физики, функционального анализа, аналитической механики, теоретической физики, методов оптимального управления и др.

Задачи дисциплины

- ☐ приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области матричной алгебры, теории линейных пространств;
- ☐ подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- ☐ приобретение навыков в применении методов аналитической в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;
- ☐ теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
- ☐ основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
- ☐ определения и основные свойства собственных векторов, собственных значений, характеристического многочлена;
- ☐ приведение квадратичной формы к каноническому виду, закон инерции, критерий Сильвестра;
- ☐ координатную запись скалярного произведения, основные свойства самосопряженных преобразований;
- ☐ основы теории линейных пространств в объеме, обеспечивающем изучение аналитической механики, теоретической физики и методов оптимального управления.

уметь:

- ☐ производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;
- ☐ находить численное решение системы линейных уравнений. находить собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, приводить квадратичную форму к каноническому виду, находить ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования;
- ☐ оперировать с элементами и понятиями линейного пространства, включая основные типы зависимостей: линейные операторы, билинейные и квадратичные формы.

владеть:

- ☐ общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;
- ☐ геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;
- ☐ понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений;
- ☐ сведениями о применениях спектральных задач;
- ☐ применениями квадратичных форм в геометрии и анализе;
- ☐ понятиями сопряженного и ортогонального преобразования;
- ☐ применениями евклидовой метрики в задачах геометрии и анализа, различными приложениями симметричной спектральной задачи;
- ☐ умением пользоваться необходимой литературой для решения задач повышенной трудности (в вариативной части курса).

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Векторные пространства	6	6		8
2	Линейные отображения	5	5		7
3	Структура линейного преобразования	9	9		11
4	Билинейные и квадратичные формы	5	5		7
5	Евклидово пространство	10	10		13
6	Сопряженное пространство	4	4		6
7	Тензоры	6	6		8
Итого часов		45	45		60
Подготовка к экзамену		30 час.			

Общая трудоёмкость	180 час., 4 зач.ед.
--------------------	---------------------

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Векторные пространства

1.1. Умножение и обращение матриц. Ортогональные матрицы. Элементарные преобразования матриц. Матричная форма элементарных преобразований.

1.2. Определение и основные свойства детерминантов. Миноры, алгебраические дополнения, разложение детерминанта по элементам строки или столбца. Формула полного разложения детерминанта и ее следствия. Детерминант произведения матриц.

1.3. Решение систем линейных уравнений по методу Крамера. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

1.4. Системы линейных уравнений. Теорема Кронеккера-Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Метод Гаусса. Теорема Фредгольма.

2. Линейные отображения

2.1. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис. Подпространства и линейные оболочки в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула размерности суммы подпространств. Вывод формулы размерности суммы подпространств. Гиперплоскости.

2.2. Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Координатная форма необходимого и достаточного условия линейной зависимости элементов.

2.3. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Матрица перехода и ее свойства. Координатная форма задания подпространств и гиперплоскостей.

3. Структура линейного преобразования

3.1. Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных преобразований.

3.2. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в координатной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

3.3. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным векторам.

3.4. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализруемости матрицы линейного преобразования. Приведение матрицы линейного преобразования к треугольному виду.

3.5. Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство. Биортогональный базис. Вторичное сопряженное пространство.

4. Билинейные и квадратичные формы

4.1. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.

4.2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к диагональному виду элементарными преобразованиями. Формулировка теоремы Жордана.

5. Евклидово пространство

5.1. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.

5.2. Конечномерное евклидово пространство. Ортогонализация базиса. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства.

5.3. Линейные преобразования евклидова пространства. Ортогональное проектирование на подпространство. Сопряженные преобразования, их свойства. Координатная форма сопряжения преобразования конечномерного евклидова пространства.

5.4. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования.

5.5. Ортогональные преобразования. Их свойства. Координатный признак ортогональности. Свойства ортогональных матриц. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования. Сингулярное разложение.

5.6. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной.

6. Сопряженное пространство

6.1. Унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные и эрмитовы матрицы. Унитарные и эрмитовы преобразования. Эрмитовы формы. Свойства унитарных и эрмитовых преобразований. Свойства эрмитовых форм.

6.2. Понятие о тензорах. Основные тензорные операции. Тензоры в евклидовом пространстве. Тензоры в ортонормированном базисе.

7. Тензоры

Общее понятие тензора, описываются основные свойства тензоров и тензорные операции.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев .— 12-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2008, 2009 .— 312 с.
2. Курс алгебры [Текст] : [учебник для вузов] / Э. Б. Винберг .— 2-е изд., стереотип. — М : МЦНМО, 2013 .— 592 с.

Дополнительная литература

1. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособ. ; рек. Уч.-метод. сов. МФТИ / В. И. Чехлов ; М-во образования РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М : МФТИ, 2000 .— 260 с.
2. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. Ч. 2 : Линейная алгебра : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2009, 2012 .— 368 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.math.mipt.ru>

<http://lib.mipt.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра высшей математики
курс:	1
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Разработчик:	П.А. Кожевников, канд. физ.-мат. наук, доцент
---------------------	---

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Линейная алгебра» обучающийся должен:

знать:

- ☐ операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;
- ☐ теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
- ☐ основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
- ☐ определения и основные свойства собственных векторов, собственных значений, характеристического многочлена;
- ☐ приведение квадратичной формы к каноническому виду, закон инерции, критерий Сильвестра;
- ☐ координатную запись скалярного произведения, основные свойства самосопряженных преобразований;
- ☐ основы теории линейных пространств в объеме, обеспечивающем изучение аналитической механики, теоретической физики и методов оптимального управления.

уметь:

- ☐ производить матричные вычисления, находить обратную матрицу, вычислять детерминанты;
- ☐ находить численное решение системы линейных уравнений, находить собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, приводить квадратичную форму к каноническому виду, находить ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования;
- ☐ оперировать с элементами и понятиями линейного пространства, включая основные типы зависимостей: линейные операторы, билинейные и квадратичные формы.

владеть:

- ☐ общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;
- ☐ геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;
- ☐ понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений;
- ☐ сведениями о применениях спектральных задач;
- ☐ применениями квадратичных форм в геометрии и анализе;
- ☐ понятиями сопряженного и ортогонального преобразования;
- ☐ применениями евклидовой метрики в задачах геометрии и анализа, различными приложениями симметричной спектральной задачи;
- ☐ умением пользоваться необходимой литературой для решения задач повышенной трудности (в вариативной части курса).

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течение учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умение решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Докажите, что все миноры порядка k в некоторой матрице равны 0, то миноры более высоких порядков также равны 0.
2. Докажите, что если столбцы матрицы системы линейных уравнений линейно независимы, то система имеет не более одного решения.
3. Что такое прямая сумма линейных подпространств? Докажите, что пространство всех функций, определенных на отрезке $[-a, a]$, является прямой суммой подпространства четных функций и подпространства нечетных функций.
4. Как связаны между собой кратность корня характеристического многочлена линейного преобразования и размерность соответствующего собственного подпространства? Приведите пример, когда они различны.
5. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:
 - а) поменять местами i -й и j -й векторы первого базиса;
 - б) поменять местами i -й и j -й векторы второго базиса;
 - в) расположить векторы обоих базисов в обратном порядке?
6. Какой вид имеет матрица линейного преобразования в базисе e_1, \dots, e_n , если e_1, \dots, e_n ($k < n$) образуют базис в инвариантном подпространстве данного пространства?
7. Докажите, что определитель матрицы линейного преобразования не меняется при изменении базиса. Верно ли это для матрицы квадратичной формы? Докажите, что при переходе от одного ортонормированного базиса в евклидовом пространстве к другому определитель матрицы квадратичной формы не меняется.
8. Какие значения может принимать определитель ортогональной матрицы? Верно ли, что если определитель матрицы по модулю равен 1, то она ортогональна?
9. Что такое положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма? Сформулируйте критерий Сильвестра для положительно определенных квадратичных форм его аналог для отрицательно определенных квадратичных форм.
10. Сформулируйте свойства собственных значений самосопряженного и ортогонального преобразований. Докажите, что собственные векторы этих преобразований, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Примеры экзаменационных билетов

Билет № 1

1. Докажите, что если столбцы матрицы системы линейных уравнений линейно независимы, то система имеет не более одного решения.
2. Сформулируйте свойства собственных значений самосопряженного и ортогонального преобразований. Докажите, что собственные векторы этих преобразований, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны

Билет № 2

1. Как связаны между собой кратность корня характеристического многочлена линейного преобразования и размерность соответствующего собственного подпространства? Приведите пример, когда они различны.
2. Какой вид имеет матрица линейного преобразования в базисе e_1, \dots, e_n , если e_1, \dots, e_n ($k < n$) образуют базис в инвариантном подпространстве данного пространства?

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется один час (астрономический) на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

Дисциплина: «Линейная алгебра», 1 курс, 2 семестр, экзамен

Кафедра: высшей математики

№	Вид занятий	Сумма баллов
1.	Контрольная работа № 1 по сдаче 1 задания	0 – 9
2.	Контрольная работа № 2 по сдаче 2 задания	0 – 9
3.	Задание № 1	0 – 3
4.	Задание № 2	0 – 3
5.	Проверка теоретических знаний	0 – 3
6.	Работа на семинарах	0 – 3
7.	Результативная работа на практикуме по решению задач*	0 – 3
8.	Итоговая контрольная. Экзамен (устный отчет)	0 – 70
	ИТОГО	0 – 100

* если при учете этого вида работы итоговая сумма за работу в семестре превосходит 30 баллов, то считать ее равной 30.

Сумма баллов за устный ответ начисляется по формуле $N * 7$, где $N \geq 3$ – предварительная оценка за устный ответ по десятибалльной шкале. Если $N=1, 2$, то итоговая оценка совпадает с N .

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системы.

Баллы БРС	Оценки	
93 – 100	10	отлично
86 – 92	9	
79 – 85	8	
72 – 78	7	хорошо
65 – 71	6	
58 – 64	5	
51 – 57	4	удовлетворительно
44 – 50	3	
30 – 43	2	неудовлетворительно
0 – 29	1	

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой

_____ Г.Е. Иванов