Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе и довузовской подготовке
А.А. Воронов

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Вычислительная математика
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика
	Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
	кафедра вычислительной физики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет

6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:
- лекции: 60 час.
- семинары: 0 час.
- лабораторные занятия: 60 час.

Самостоятельная работа: 105 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Количество контрольных работ, заданий: 8

Программу составил: Е.Н. Аристова, д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры вычислительной физики 28.05.2020

Аннотация

Курс вычислительной математики посвящен методам решения задач математической физики на компьютерах, исследованию корректности этих методов и оценке погрешности получаемого решения. В первой половине курса рассматриваются методы решения линейных и нелинейных алгебраических систем уравнений, приближения функций, численного дифференцирования и интегрирования и начальные сведения о численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Во второй половине курса более подробно рассматриваются вопросы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и всех основных типов уравнений в частных производных (гиперболических, параболических и эллиптических). Рассматриваются методы численного решения задачи Коши и краевых задач первого, второго и третьего рода.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Сформировать у студентов систематическое представление о:

- методах приближенного решения наиболее распространенных базовых типов математических задач;
- источниках погрешностей и методах их оценки;
- методах решения актуальных прикладных задач.

Задачи дисциплины

- Освоение материала, охватывающего основные задачи и методы вычислительной математики;
- формирование целостного представления о численных методах решения современных научных прикладных задач.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями современной физики
ПК-3 Способен выбирать и применять подходящее оборудование, инструменты и методы исследований для решения задач в избранной предметной области	ПК-3.1 Знает принципы работы и диапазоны рабочих параметров используемого научного оборудования

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Область применения, теоретические основы, основные принципы, особенности и современные тенденции развития методов вычислительной математики.

уметь:

Применять методы численного анализа для приближенного решения задач в области своей научно-исследовательской работы.

владеть:

Программными средствами разработки вычислительных алгоритмов и программ, способами их отладки, тестирования и практической проверки соответствия реализованного алгоритма теоретическим оценкам.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Предмет вычислительной математики.	4		4	
2	Приближение функций, заданных на дискретном множестве	5		5	5
3	Решение систем линейных алгебраических уравнений	5		5	5
4	Численное дифференцирование	5		5	5
5	Численное интегрирование	5		5	8
6	Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и методы их приближенного решения.	6		6	7
7	Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа.	2		2	9
8	Численное решение краевых задач для ОДУ.	4		4	9
9	Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.	4		4	9
10	Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения.	4		4	9
11	Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа.	4		4	9
12	Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа.	4		4	9
13	Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа.	4		4	9
14	Введение в методы решения уравнений газовой динамики.	4		4	12
Итого часов		60		60	105

Подготовка к экзамену	0 час.
Общая трудоёмкость	225 час., 5 зач.ед.

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. Предмет вычислительной математики.

Специфика машинных вычислений. Элементарная теория погрешностей.

2. Приближение функций, заданных на дискретном множестве

Задача алгебраической интерполяции. Существование и единственность алгебраического интерполяционного полинома. Интерполяционный полином в форме Лагранжа и в форме Ньютона. Остаточный член интерполяции. Интерполяция по чебышёвским узлам. Оценка погрешности интерполяции для функций, заданных с ошибками. Кусочно-многочленная интерполяция. Интерполяция сплайнами. *Локальные сплайны. *Сплайны с финитным носителем (B-сплайны).

3. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Нормы в конечномерных пространствах. Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений.
Прямые методы решения: метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод прогонки для систем специального вида.
Итерационные методы решения линейных систем. Метод простых итераций.
Необходимое, достаточное условия сходимости метода простых итераций. Метод Зейделя.
*Каноническая форма записи двухслойного итерационного метода.
*Методы решения, основанные на минимизации функционалов.
*Метод сопряженных градиентов.
*Проблема поиска собственных значений матрицы. *Степенной метод для вычисления максимального собственного числа.
*Метод вращений для поиска собственных значений самосопряженной матрицы. *Метод обратной итерации.
Переопределенные системы линейных алгебраических уравнений.

4. Численное дифференцирование

Простейшие формулы численного дифференцирования. Оценка погрешности.

5. Численное интегрирование

Квадратурные формулы Ньютона–Котеса (прямоугольников, трапеций, Симпсона) и оценка их погрешности. Квадратурные формулы Гаусса. *Методы вычисления несобственных интегралов.

6. Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и методы их приближенного решения.

*Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). *Методы численного решения жестких систем ОДУ: одношаговые (неявные методы Рунге-Кутты, методы Розенброка) и многошаговые (формулы дифференцирования назад). *Методы Гира в представлении Нордсика. *Исследование схем на А-устойчивость, Lp-устойчивость и монотонность.

Семестр: 6 (Весенний)

7. Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа.

Численное решение краевых задач для ОДУ. Методы решения линейных краевых задач (метод численного построения общего решения, конечно-разностный метод для линейного уравнения второго порядка, метод прогонки). Методы решения нелинейных краевых задач (метод стрельбы, метод квазилинеаризации). *Вариационно-разностные и проекционные методы построения приближенного решения. *Метод конечных элементов. Задача на собственные значения (Штурма-Лиувилля). *Метод дополненного вектора. *Понятие жесткой краевой задачи. *Методы решения жесткой линейной краевой задачи.

8. Численное решение краевых задач для ОДУ.

Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Приемы исследования разностных задач на устойчивость. Принцип максимума, спектральный признак устойчивости, принцип замороженных коэффициентов. *Канонический вид двухслойных схем. *Элементы теории Самарского об исследовании устойчивости двухслойных схем на основе энергетических неравенств.

9. Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Приемы исследования разностных задач на устойчивость. Принцип максимума, спектральный признак устойчивости, принцип замороженных коэффициентов. *Канонический вид двухслойных схем.

10. Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения.

Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения. *Теорема Годунова о связи порядка аппроксимации и монотонности для линейных разностных схем.

11. Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа.

Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа. Характеристики, инварианты Римана. Разностные схемы для характеристической формы записи системы. *Нелинейное уравнение Хопфа. *Понятие о сильных и слабых разрывах, скорость движения сильного разрыва.

12. Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа.

Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа. *Квазилинейное уравнение теплопроводности и его автомодельное решение.
Разностные схемы для решения многомерных уравнений теплопроводности. Понятие о методах расщепления. Метод переменных направлений.

13. Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа.

Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа. Разностная схема “крест” для численного решения уравнений Лапласа, Пуассона. Итерационные методы для численного решения возникающих систем линейных уравнений. Принцип установления для решения стационарных задач. *Оценка количества итераций, необходимых для достижения заданной точности при использовании различных методов.

14. Введение в методы решения уравнений газовой динамики.

Особенности уравнений. Принципы построения разностных схем. Применимость в других прикладных задачах.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная персональными компьютерами, мультимедиапроектором и экраном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в вычислительную математику [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. С. Рябенький .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2008 .— 288 с.

2. Введение в вычислительную физику [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Р. П. Федоренко ; под ред. А. И. Лобанова .— 2-е изд., испр. и доп. — Долгопрудный : Интеллект, 2008 .— 504 с.

3. 12 лекций по вычислительной математике : вводный курс [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. И. Косарев .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматкнига, 2013 .— 240 с.

4. Лекции по вычислительной математике [Текст] : учеб. пособие для вузов / И. Б. Петров, А. И. Лобанов .— М. : Интернет-Ун-т Информ. Технологий : БИНОМ. Лаб. знаний, 2006, 2010, 2013 .— 523 с.

5. Численные методы [Текст] : в 2 кн. : учебник для вузов / Н. Н. Калиткин, Е. А. Альшина .— М. : Академия, 2013 .— (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика) .— Кн. 1 : Численный анализ. - 2013. - 304 с.

Дополнительная литература

1. Основы вычислительной математики [Текст] : учеб. пособие для втузов ; доп. М-вом высш. и сред. спец. образования СССР / Б. П. Демидович, И. А. Марон .— 4-е изд.,испр. — М. : Наука, 1970 .— 664 с.

Фонд литературы базовой кафедры

2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990. — 512 с.

3. Самарский А А., Гулин А В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

http://mipt.ru/education/chair/computational_mathematics/study/materials/compmath/

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Компиляторы и среды разработки C++, JAVA, FORTRAN, PYTHON

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса отведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания,
- подготовку к лабораторным занятиям и зачетам.

Руководство и контроль за самостоятельней работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания.

При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Общая и прикладная физика
	Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
	кафедра вычислительной физики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет

6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик:	Е.Н. Аристова, д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями современной физики
ПК-3 Способен выбирать и применять подходящее оборудование, инструменты и методы исследований для решения задач в избранной предметной области	ПК-3.1 Знает принципы работы и диапазоны рабочих параметров используемого научного оборудования

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Вычислительная математика» обучающийся должен:

знать:

Область применения, теоретические основы, основные принципы, особенности и современные тенденции развития методов вычислительной математики.

уметь:

Применять методы численного анализа для приближенного решения задач в области своей научно-исследовательской работы.

владеть:

Программными средствами разработки вычислительных алгоритмов и программ, способами их отладки, тестирования и практической проверки соответствия реализованного алгоритма теоретическим оценкам.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Перечень типовых контрольных заданий, критерии оценивания и методические рекомендации находятся в прикрепленном файле.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

см. файл

Критерии оценивания

см. файл

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

см. файл

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Вычислительная математика» осуществляется в форме **дифференцированного зачета**. **Дифференцированный зачет** проводится по итогам текущей успеваемости, выявляемой при написании полусеместровой и семестровой контрольных работ, а также при сдаче заданий и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины и путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.

Перечень контрольных вопросов:

I. Осенний семестр:

1) Отличие вычислительной математики от других наук математического цикла. Ошибка входных данных, ошибка метода, ошибка округления. Машинное представление чисел.
2) Вычисление значений функции, влияние ошибок округления и устойчивость такого вычисления.
3) Методы вычисления производных функции. Оптимальный шаг численного дифференцирования.
4) Согласованные и подчиненные нормы матриц. Три основные нормы матриц, подчиненные трем основным векторным нормам. Доказать подчиненность соответствующей матричной нормы в случае выбора кубической нормы вектора. Пример нормы матриц, не являющейся подчиненной.
5) Теорема о возмущении решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при возмущении правых частей и коэффициентов системы(с доказательством).
6) Методы решения СЛАУ. Прямые методы. Понятие экономичности метода. Метод Гаусса и его эквивалентность LU разложению матрицы.
7) Методы решения СЛАУ. Простейшие итерационные методы: Якоби, Зейделя, простой итерации. Теорема о достаточном условии сходимости метода простой итерации в широком смысле (с доказательством). Теорема о необходимом и достаточном условии сходимости метода простой итерации с параметром.
8) Теоремы о необходимом и достаточном условии сходимости методов Якоби и Гаусса–Зейделя итерационного решения СЛАУ. Метод последовательной верхней релаксации.
9) Итерационные методы решения СЛАУ вариационного типа. Определение итерационного параметра в методе наискорейшего спуска и в методе минимальных невязок.
10) Методы решения спектральных задач линейной алгебры. Степенной метод. Метод вращений. Метод обратной итерации.
11) Метод наименьших квадратов. Его приложение к задаче неточной интерполяции функции.
12) Метод наименьших квадратов. Его приложение к решению переопределенных СЛАУ.
13) Методы численного решения нелинейных уравнений. Метод простой итерации и условие его сходимости. Теорема о неподвижной точке.
14) Методы численного решения нелинейных уравнений. Квадратичная сходимость метода Ньютона для простых корней.
15) Методы численного решения систем нелинейных уравнений. Метод простой итерации и метод Ньютона. Условие сходимости метода простой итерации для систем нелинейных уравнений.
16) Методы численного нахождения экстремума функции: метод перебора, метод дихотомии, метод золотого сечения, метод парабол, метод Брендта. Экстремум функции многих переменных.
17) Разделенная разность n-го порядка. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа и Ньютона. Теорема об эквивалентности интерполяционных многочленов в этих двух формах.

18) Теорема о погрешности алгебраической интерполяции. Оптимальное расположение узлов интерполяции.
19) Обусловленность интерполяции. Константа Лебега. Оценка константы Лебега при равномерном расположении узлов и в нулях многочлена Чебышева.
20) Постановка задачи построения сплайна. Узлы интерполяции, узлы сплайна. Свободный кубический сплайн дефекта 1. Определение и способ нахождения коэффициентов для свободного сплайна. Необходимость дополнительных «краевых» условий.
21) Численное интегрирование. Формулы Ньютона–Котеса интерполяционного типа 1-го, 2-го и 4-го порядков аппроксимации для интегрирования функций, заданных таблично. Объяснить, почему формула прямоугольников со средней точкой и формула Симпсона имеют точность на единицу выше, чем это следует из интегрирования ошибки интерполяции.
22) Численное интегрирование. Квадратурные формулы Гаусса. Теорема о весах и узлах квадратурных формул Гаусса при интегрировании на отрезке [–1,1].
23) Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Основные понятия: сходимость, аппроксимация, устойчивость. Связь между ними. Простейшие методы численного решения ОДУ.

II. Весенний семестр:

1) Разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Построение общего решения разностных задач для функции одного переменного и для систем.
2) Разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Приложение к спектральным задачам.
3) Явные методы Рунге–Кутты (ЯМРК). Теорема об устойчивости ЯМРК.
4) Условия порядка для ЯМРК. Связь порядка аппроксимации и числа стадий метода. Барьеры Бутчера. Функция устойчивости ЯМРК с порядком аппроксимации не выше четвертого при минимальном числе стадий.
5) Понятие о жестких системах ОДУ. Определение А–устойчивости метода решения ОДУ. Неявные методы Рунге–Кутты. Функция устойчивости неявных методов Рунге–Кутты.
6) Определение А–устойчивости метода решения ОДУ. Исследование аппроксимации и устойчивости многошаговых методов. Понятие о кривой локуса корней.
7) Одноитерационные методы Розенброка решения жесткой задачи Коши. Схема CROS.
8) Краевые задачи для системы ОДУ первого порядка. Уравнение теплопроводности как классический пример краевой задачи для уравнения второго порядка. Теорема об устойчивости прогонки для решения краевой задачи для уравнения второго порядка.
9) Краевые задачи для системы ОДУ первого порядка. Метод фундаментальных систем (МФС) для решения краевой задачи для системы ОДУ. Пример, когда МФС не работает.
10) Методы решения нелинейных краевых задач: метод стрельбы, метод квазилинеаризации Ньютона.
11) Основные виды уравнений в частных производных. Основные понятия теории разностных схем для решения уравнений в частных производных: сходимость, аппроксимация, устойчивость. Основная теорема вычислительной математики.
12) Методы построения разностных схем: конечно-разностный, метод неопределенных коэффициентов, интегро-интерполяционный, интерполяционно-характеристический, метод прямых и др.
13) Методы исследования устойчивости схем для уравнений в частных производных. Отличие эволюционных задач от неэволюционных. Спектральный признак устойчивости для эволюционных задач.
14) Условие Куранта–Фридрихса–Леви устойчивости эволюционных схем.
15) Элементы теории Самарского устойчивости двухслойных разностных схем. Каноноческий вид двухслойной разностной схемы. Энергетический признак устойчивости по начальным данным.

16) Устойчивость по правой части как следствие устойчивости по начальным данным.
17) Монотонность двухслойных разностных схем. Теорема о неотрицательных коэффициентах монотонной двухслойной разностной схемы .
18) Разностные схемы для решения уравнений параболического типа. Понятие и явных и неявных схемах. Параболическое число Куранта. Двухслойные и трехслойные параметрические схемы, их порядок аппроксимации, устойчивость, монотонность.
19) Основные разностные схемы для решения уравнения переноса. Первое дифференциальное приближение схемы "явный левый уголок" для уравнения переноса.
20) Диссипативная и дисперсионная ошибки разностной схемы для уравнения переноса. Связь с устойчивостью схемы.
21) Монотонность двухслойных разностных схем для уравнений в частных производных. Теорема Годунова.
22) Системы уравнений в частных производных гиперболического типа. Инварианты Римана. Корректная постановка краевых условий.
23) Схема "крест" для решения волнового уравнения. Трехслойная схема с весами, порядок ее аппроксимации, устойчивость.
24) Переход от волнового уравнения к системе двух уравнений акустики. Двухслойная схема с весами для системы уравнений акустики. Порядок аппроксимации, устойчивость. Инварианты Римана акустической системы.
25) Уравнения в частных производных эллиптического типа. Устойчивость схемы «крест» для аппроксимации уравнения Пуассона. Чем доказательство устойчивости в этом случае отличается от доказательства устойчивости для эволюционных задач?
26) Методы решения сеточных задач, возникающих при аппроксимации уравнений в частных производных эллиптического типа. Обусловленность возникающей СЛАУ. Решение СЛАУ методами Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксацией (ПВР). Последовательное и шахматное упорядочивание узлов. Оптимальный параметр ПВР при шахматном упорядочивании узлов.
27) Методы решения сеточных задач, возникающих при аппроксимации уравнений в частных производных эллиптического типа, основанные на методе установления: метод простой итерации с оптимальным параметром, чебышевский набор итерационных параметров и их перестановки для обеспечения устойчивости метода в случае числа шагов, являющегося степенью двойки, метод переменных направлений с оптимальным шагом, попеременно-треугольный метод.
28) Сравнение численных методов решения сеточных уравнений, возникающих при аппроксимации уравнений эллиптического типа, по эффективности.

Примеры контрольных заданий:

1. **Типовой вариант полусеместровой контрольной работы за осенний семестр**

КВ (**2**) Согласованные и подчиненные нормы матриц. Три основные нормы матриц, подчиненные трем основным векторным. Доказать подчиненность матричной нормы в случае выбора кубической нормы вектора. Пример нормы матриц, не являющейся подчиненной.

1. (**3**) Оценить погрешность в определении корней уравнения $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$, если величины

$$a = 1,\ b = -3,\ c = 1,\ d = -3 \text{ заданы с точностью } \Delta(a) = \Delta(b) = \Delta(c) = \Delta(d) = 10^{-3}.$$

2. Для вычисления первой производной функции $f(x)$ **в точке *x+h*** используется формула

$$\left(f(x+2h) - f(x-2h) \right) / 4h .$$

1) (**3**) Каков порядок аппроксимации этой формулы?
2) (**3**) Найти оптимальный шаг дифференцирования по этой формуле в произвольной точке ***x+h*** для четырежды дифференцируемой функции.
3) (**2**) Оценить его численное значение для функции $f(x)=\cos(x+\pi/4)$ в случае использования арифметики одинарной и двойной точности.

3. Для системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax}=\mathbf{f}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix}$ $\mathbf{f}=\begin{pmatrix}4\\ -11\end{pmatrix}$

1) (**3**) вычислить число обусловленности системы в нормах, подчиненных кубической, октаэдрической и евклидовой норме вектора.
2) Привести вычислительные формулы и выполнить три итерации методов Якоби (**2**), Зейделя (**2**) и верхней релаксации (**3**), выбрав итерационный параметр, близкий к оптимальному (**2**). За начальное приближение взять вектор $\mathbf{x}=(0,\,0)^T$.
3) ***(3**) Провести три шага вычислений для определения максимального по модулю собственного значения матрицы системы степенным методом, взяв в качестве начального приближения вектор $\mathbf{x}=(1,\,0)^T$.

4. Для СЛАУ $\mathbf{Ax}=\mathbf{f}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ $\mathbf{f}=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$

1) (**3**) построить сходящийся метод простых итераций. Указать область параметров, при которых МПИ сходится.
2) (**2**) оценить оптимальное значение итерационного параметра $\tau_{опт}$.
3) (**2**) оценить количество итераций МПИ, необходимое для достижения точности 10^{-3}, если в качестве начального приближения выбран вектор $\mathbf{x}=(0,\,0)^T$.

5. (**3**) Методом наименьших квадратов решить переопределенную систему уравнений
$$\begin{cases} x+y=1\\ 2x+y=2\\ x+2y=3\end{cases}$$

6. Для функции $y=f(x)$, заданной таблично, методом наименьших квадратов найти линейное приближение $y=ax+b$ (**2**). Нарисовать полученное решение и исходные данные в декартовой плоскости (**1**). ***Вычислить сумму квадратов ошибок Ф (**2**).

i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
x	0	1	2	3	4	5
y=f(x)	–4	0	–2	1	2	0

7. *** Доказать, что для вектора $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ и $h>0$ выражение $\|\mathbf{x}\|_h=\max\left(|x_1|,|x_2-x_1|/h\right)$ является нормой (**4**). Найти матричную норму, подчиненную этой векторной норме (**6**).

8. (**4**) Доказать, что для матриц размерности 2х2 методы Якоби и Зейделя сходятся и расходятся одновременно.

Типовой вариант семестровой контрольной работы за осенний семестр

КВ: (**6**) Доказать теорему о погрешности алгебраической интерполяции. Оптимальное расположение узлов интерполяции.

1. **(6)** Доказать, что константа Лебега не зависит от длины интервала, а зависит только от взаимного расположения точек на отрезке, т.е. что она не изменяется при любом линейном преобразовании $t = kx + c$ самого отрезка и точек интерполяции на нем.

2. а) **(5)** Для функции, заданной таблично, приближенно восстановите ее значение в точке $x^* = 1.5$ по значению интерполяционного многочлена наивысшей степени. Оцените погрешность в предположении, что $f(x) \in C^\infty$. Значения функции в узлах заданы точно.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	0	0	1	1	0

б) **(3)** Пользуясь этим же интерполяционным многочленом, определить максимально точно значение пятой производной $f(x)$ в узловой точке $x = 1$.

3. а) **(6)** Вычислить значение определенного интеграла $\int_0^2 x^{3/2}\operatorname{ctg} x\,dx$ по заданным значениям подынтегральной функции методом трапеций, сделать уточнение результата экстраполяцией Ричардсона. Сравнить полученный результат с вычислением интеграла методом Симпсона.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0.	0.25	0.5	0.75	1.	1.25	1.5	1.75	2.
f_i	0.	0.489540	0.647175	0.697211	0.642093	0.464366	0.130279	–0.419361	–1.294451

б) **(6)** С помощью процесса Эйткена определить реальный порядок сходимости метода трапеций. Объяснить, почему он отличается от теоретического. Уточнить результат.

4. **(6)** Для нахождения положительного корня нелинейного уравнения $e^{-x} + 1 = x^2$ предложено несколько вариантов МПИ. Исследовать эти методы и сделать выводы о целесообразности использования каждого из их.

$$a).\ x_{n+1} = -\ln(x_n^2 - 1); \quad b).\ x_{n+1} = \sqrt{1 + e^{-x_n}}; \quad c).\ x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{1 - x_n}.$$

5. **(8)** Для системы уравнений $\begin{cases} e^y + x = 0 \\ (y+2)^3 + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$ выбрать начальное приближение и сделать одну итерацию метода Ньютона, если известно, что решение принадлежит области U:{$|x| < 1$, $-4 < y < -2$}.

6. **(6)** Методом обратной интерполяции найти корень нелинейного уравнения

$2 + \ln x - x^2 = 0$	x	x_1=1.1	x_2=1.4	x_3=1.6	x_4=1.7
	$f(x)$	0.8853	0.3764	–0.0899	–0.3593

7. (**6**) Предложите алгоритм, как пользуясь программой, реализующей метод трапеций для численного интегрирования произвольных регулярных функций с произвольным шагом, вычислить следующий интеграл с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$: $\int_0^4 \frac{\ln(1+x\sqrt{x})}{x^2}\,dx$.

8. (**4**) Построить квадратуру Гаусса–Кристоффеля с двумя узлами для вычисления интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}\,dx, \text{ для справки } \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2}\,dx = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & n=0 \\ 0, & n=1,3\,. \\ \sqrt{\pi}/2, & n=2 \end{cases}$$

Какова алгебраическая степень точности полученной квадратурной формулы?

2. Типовой вариант полусеместровой контрольной работы за весенний семестр

КВ. 4 Теорема об устойчивости явных методов Рунге-Кутты. Эта устойчивость строгая или нестрогая?

Задача 1. 2 По заданной таблице Бутчера восстановить метод Рунге-Кутты. **1** Определить, является данный метод явным или неявным.

1/3	5/12	–1/12
1	3/4	1/4
	3/4	1/4

Задача 2. Для решения задачи Коши нежестких систем ОДУ используется явный метод Рунге-Кутты порядка p. **1** Какое наименьшее количество стадий должен иметь метод? **2** Выписать общий вид функции устойчивости для методов этого класса в случае: p=2 и p=7.

Задача 3. 3 Исследовать на А-устойчивость схему: $y^{n+1} - y^n = h \cdot (0.7 f^{n+1} + 0.3 f^n)$

Задача 4. Для решения жестких систем ОДУ используется неявный метод Рунге–Кутты (НМРК), заданный таблицей Бутчера:

$1/2 - \sqrt{3}/6$	$\cdots$	0
$\cdots$	$\sqrt{3}/3$	$\cdots$
	$\cdots$	$\cdots$

А) **2** дополнить недостающие коэффициенты таблицы на основании условий Кутты и аппроксимации более чем первого порядка для **однократно** диагонально неявного МРК. **2** Проверить выполнение условий третьего порядка аппроксимации.

Б) 4 Найти функцию устойчивости. 4 Исследовать метод на А–, L– устойчивость и монотонность.

Задача 5. Для краевой задачи

$$y'' + \frac{1+\pi x}{1+\pi^2 x^2} y' + \cos(\pi x) y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(0) + 2y'(0) = 3, \quad y(1) = 1$$

А) 4 Предложить аппроксимацию второго порядка на двух точках левого граничного условия.

Б) 2 Построить аппроксимацию второго порядка для этого уравнения.

В) 3 Предложить и обосновать корректный метод решения полученной системы разностных уравнений.

Задача 6. 4 Найти все решения задачи на собственные значения

$$y_{n+1} - (2-h^2) y_n + y_{n-1} = -\lambda h^2 y_n, \; y_0 = 0, \; y_N = 0, \; h = \frac{1}{N}.$$

Задача 7. 5 Найти все решения разностного уравнения $u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n = n$.

Задача 8. 4 Среди многошаговых методов заданного вида найти схему наибольшего порядка аппроксимации и 1 определить, является ли полученный метод А–устойчивым:

$4\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - 3\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = a\, f_{n+1} + b\, f_n + c\, f_{n-1}$, или, в другой форме:

$-y_{n+1} + 3y_n - 2y_{n-1} = h(a\, f_{n+1} + b\, f_n + c\, f_{n-1})$.

Типовой вариант семестровой контрольной работы за весенний семестр

КВ. 4 Доказать, что если $A = A^* > 0,\ B = B^*$, то условие $B \ge \frac{\tau}{2} A$ является необходимым и достаточным условием устойчивости по начальным данным однородной двухслойной разностной схемы, записанной в каноническом виде.

1. 6 Исследовать на сходимость разностную схему для уравнения теплопроводности

$$\frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} = a^2 \left(\frac{1}{4} \Lambda_{xx} \hat{y} + \frac{1}{2} \Lambda_{xx} y + \frac{1}{4} \Lambda_{xx} \check{y} \right) + f^n_m.$$

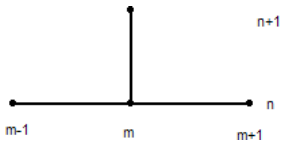
2. 4 Какую дифференциальную задачу и с каким порядком аппроксимирует данная разностная задача. Выписать главные члены ошибки аппроксимации.

$$\frac{u^{n+1}_m - 0.5(u^n_{m+1} + u^n_{m-1})}{\tau} + \frac{u^n_{m+1} + 4u^n_{m-1} - 5u^n_{m-2}}{h} = \varphi^n_m.$$

$\boxed{2}$ Показать, что данная разностная схема является заведомо неустойчивой, если шаги τ и h измельчаются так, что $7\tau / h = \text{const} > 2$.

3. Дана система уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = f(t,x), \qquad \frac{\partial v}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial x} = g(t,x),$$



с начальными условиями $u(0,x) = \varphi_1(x), v(0,x) = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le 1.$

А) $\boxed{2}$ Показать, что система является гиперболической.

$\boxed{4}$ Даны четыре варианта краевых условий к этой системе:

1) $u(t,\,0) = \psi_1(t), \quad v(t,1) = \psi_2(t).$ 2) $2u(t,0) + v(t,0) = \psi_1(t), \quad v(t,\,0) = \psi_2(t).$

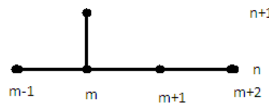
3) $u(t,1) + v(t,1) = \psi_1(t), \quad u(t,1) = \psi_2(t).$ 4) $u(t,0) + v(t,0) = \psi_1(t), \quad u(t,\,0) - v(t,\,0) = \psi_2(t).$

Определить корректные постановки краевых условий для этой задачи из предложенных вариантов (если условия некорректны, указать, почему);

Б) $\boxed{4}$ Предложить устойчивую разностную схему для решения данной системы уравнений на указанном шаблоне с порядком выше $O(\tau + h)$. Найти условие устойчивости схемы.

4. $\boxed{6}$ Методом неопределенных коэффициентов получить неявную схему Адамса 3 порядка аппроксимации для решения задачи Коши $u' = f(x,u),\ u(0) = u_0$.

5. $\boxed{6}$ Интерполяциононо-характеристическим методом или методом неопределенных коэффициентов построить схему наивысшего порядка аппроксимации для однородного линейного уравнения переноса $u'_t - cu'_x = 0$ (c>0) на предложенном шаблоне. Определить условие устойчивости схемы из условия Куранта–Фридрихса–Леви.



6. $\boxed{8}$ Для квазилинейного уравнения теплопроводности $u'_t = (u^{5/2}u'_x)'_x$ построить аналог схемы Саульева, используя дивергентную запись уравнения. Исследовать получившуюся схему на устойчивость по принципу замороженных коэффициентов.

При выставлении оценки за контрольную работу контрольный вопрос по теории (КВ) является обязательным, без ответа на него работа оценивается как неудовлетворительная. При наличии ответа на КВ, за каждую задачу выставляется количество баллов от 0 до максимума, указанного для каждого пункта задачи в зависимости от полноты и правильности решения. Сумма первичных баллов переводится в оценку в десятичной системе делением на три.

Примеры заданий, тестов и др. материалов, используемых для проведения зачета:

4. Критерии оценивания

Оценка за семестр выставляется в соответствии с балльно-рейтинговой системой.
I. В осеннем семестре баллы выставляются за каждую из двух контрольных работ и работы над ошибками к ним, за 7 тестов по текущему контролю успеваемости, за каждую из 8 тем семестра, сгруппированных в два задания, в каждой из которых имеется практическая задача для реализации на компьютере.
Баллы выставляются в соответствии с таблицей:

Полусеместровая КР может дать 20 баллов.		
Работа над ошибками к ней		5 баллов,
Темы	8*5 баллов	40 баллов,
Тесты (летучки)	7*3балла	21 балл,
Итоговая КР		25 баллов.
Всего:		111 баллов

Оценка выставляется целочисленным делением на десять (т.е. отрезанием мантиссы) суммы баллов, при этом за преподавателем оставляется право провести устный опрос по нескольким темам, изученным в семестре.
II. В весеннем семестре баллы выставляются за каждую из двух контрольных работ и работы над ошибками к ним, за 5 тестов текущего контроля успеваемости, 7 тем, сгруппированных в два задания, за курсовой проект.

Полусеместровая КР может дать 20 баллов.		
Работа над ошибками к ней		5 баллов,
Темы	7*5 баллов	35 баллов,
Тесты (летучки)	5*3балла	15 баллов,
Итоговая КР		20 баллов,
Курсовой проект		20 баллов.
Всего:		115 баллов

При выставлении отметки есть два ограничения: при отсутствии курсового проекта не может быть выставлена отметка отлично (ни 8, ни 9), даже если сумма баллов это позволяет. Курсовой проект не принимается, если сумма остальных баллов ниже 40.
Итоговая оценка выставляется целочисленным делением на десять (т.е. отрезанием мантиссы) суммы баллов, при этом за преподавателем оставляется право провести устный опрос по нескольким темам, изученным в семестре.