

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**и.о. директора физтех-школы  
физики и исследований им.  
Ландау**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Математический аппарат общей теории относительности
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра проблем физики и астрофизики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: М.И. Зельников, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

Программа обсуждена на заседании кафедры проблем физики и астрофизики 04.06.2020

## Аннотация

Курс нацелен на освоение разделов дифференциальной геометрии, необходимых для решения задач общей теории относительности (ОТО).

Предполагается знание студентами основ дифференциального и интегрального исчисления, тензорного анализа, специальной теории относительности, теоретической механики и классической теории поля.

Курс служит основой для освоения курса «Введение в ОТО», и может быть полезен для работы в областях космологии, астрофизики, квантовой теории поля.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

научить студентов использовать математические методы дифференциальной геометрии для решения задач в области ОТО

### Задачи дисциплины

- о познакомить студентов с основными понятиями и положениями тензорного анализа и римановой геометрии, необходимыми для формулировки и решения задач ОТО
- о научить формулировать на математическом языке ОТО физические задачи взаимодействия частиц и физических полей с гравитационным полем; познакомить с главными методами решения этих задач.
- о дать приобрести первоначальные навыки в решении основных типов задач ОТО.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований, и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями современной физики

ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.2 Имеет глубокое знание и понимание базовых математических дисциплин
	ПК-1.3 Владеет культурой постановки научной задачи и моделирования естественнонаучных объектов и систем
	ПК-1.4 Умеет строить математические модели для описания и исследования процессов и явлений в соответствующих научных областях
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия и теоремы тензорного анализа и римановой геометрии, необходимые для формулировки и решения задач ОТО.

уметь:

- формулировать на математическом языке физические задачи взаимодействия частиц и физических полей с гравитационным полем; применять главные методы решения этих задач.

владеть:

- первоначальными навыками в решении основных типов задач ОТО.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Принципы построения теории гравитации и её экспериментальная проверка	1	1		5
2	Уравнение геодезической и уравнения Максвелла в гравитационном поле	1	1		5
3	Ковариантная производная. Символ Кристоффеля	1	1		5
4	Тензор Римана и его свойства	1	1		5
5	Физические эффекты кривизны	1	1		5
6	Нелокальные свойства тензора Римана. Тождества Бьянки	1	1		5
7	Векторы и операторы. Оператор кривизны	1	1		5
8	Перенос Ли и производная Ли	1	1		5
9	Перенос Ферми-Уокера	1	1		5
10	Одновременность и синхронизация в ОТО	1	1		5
11	Гауссова нормальная система координат	1	1		5
12	Интегрирование в кривом пространстве. Теоремы Стокса	1	1		5
13	Вектора Киллинга и их свойства	1	1		5
14	Внешняя кривизна	1	1		5

15	Уравнения Гаусса-Кодацци. Действие Эйнштейна Уравнения Эйнштейна с веществом	1	1		5
Итого часов		15	15		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

##### 1. Принципы построения теории гравитации и её экспериментальная проверка

Принципы построения теории гравитации. Систематика Дике. Принцип эквивалентности, его экспериментальная проверка. Классические тесты ОТО: отклонение лучей света полем Солнца, запаздывание радиосигналов, прецессия перигелия Меркурия. Дальнейшие проверки: Лунный эксперимент Этвеша, пульсар в двойной системе, регистрация гравитационных волн от слияния черных дыр детектором LIGO-VIRGO.

##### 2. Уравнение геодезической и уравнения Максвелла в гравитационном поле

Пример применения принципа эквивалентности: действие для частицы в гравитационном поле. Метрика. Уравнение движения материальной точки. Ньютоновский предел и связь гравитационного потенциала с метрикой. Действие для электромагнитного поля и уравнения Максвелла в гравитационном поле. Уравнения Максвелла в гравитационном поле. Правила построения гравитационной физики из принципа эквивалентности.

##### 3. Ковариантная производная. Символ Кристоффеля

Символ Кристоффеля. Связь символа Кристоффеля с метрикой. Вывод уравнения геодезической из уравнения прямой. Изменение символа Кристоффеля при замене системы отсчета. Ковариантная производная и ее свойства. Уравнение геодезической в общей параметризации и аффинные параметры.

##### 4. Тензор Римана и его свойства

Тензор Римана. Единственность тензора Римана как тензора, линейно зависящего от вторых производных. Алгебраические свойства тензора Римана. Подсчет независимых компонент тензора Римана в  $n$ -мерном пространстве. Тензоры Риччи, Эйнштейна, Вейля. Количество их компонент. Вид скалярных инвариантов, построенных из тензора Римана и метрики.

##### 5. Физические эффекты кривизны

Физические эффекты кривизны. Параллельный перенос. Обнос по замкнутому контуру. Коммутатор ковариантных производных. Уравнение девиации геодезических.

##### 6. Нелокальные свойства тензора Римана. Тожества Бьянки

Нелокальные свойства тензора Римана. Теоремы о равенстве нулю тензора Римана и тензора Вейля. Тожества Бьянки.

##### 7. Векторы и операторы. Оператор кривизны

Операторы в римановой геометрии. Векторы и операторный язык. Коммутатор. Оператор кривизны. Операторный вывод уравнения девиации геодезических.

## 8. Перенос Ли и производная Ли

Конгруэнция гладких кривых. Физическая необходимость процедур переноса тензоров. Перенос Ли. Перенос Ли и производная Ли. Определение производной Ли через процедуру переноса тензоров. Формула для производной Ли в компонентах. Свойства производной Ли. Тождество для коммутатора производных Ли.

## 9. Перенос Ферми-Уокера

Перенос ортонормированного сопутствующего базиса без вращения. Перенос Ферми-Уокера и его свойства. Перенос гироскопа. Прецессия Томаса. Сравнение 3-х видов переноса: параллельного, Ли, Ферми-Уокера.

## 10. Одновременность и синхронизация в ОТО

Одновременность в ОТО. Понятие одновременности событий. Условие синхронизации часов и его физический смысл.

## 11. Гауссова нормальная система координат

Понятие гиперповерхности. Гауссова нормальная система координат. Степени свободы систем координат, векторных полей и конгруэнций.

## 12. Интегрирование в кривом пространстве. Теоремы Стокса

Интегрирование в кривом пространстве. Теоремы Стокса. Метрика на гиперповерхности одновременности.

## 13. Вектора Киллинга и их свойства

Вектора Киллинга и их свойства. Изометрия и вектор Киллинга. Уравнение Киллинга. Свойства векторов Киллинга. Векторы Киллинга. Свойство 2-й производной вектора Киллинга. Вектора Киллинга и законы сохранения.

## 14. Внешняя кривизна

Внешняя кривизна. Индуцированная метрика и внешняя кривизна на гиперповерхности. Симметрия внешней кривизны. Тензор внешней кривизны в произвольном базисе. Его связь с производной Ли проекционного оператора, с ускорением кривой по нормали к гиперповерхности. Вычисление внешней кривизны в частных случаях. Внешняя кривизна поверхности постоянного времени.

## 15. Уравнения Гаусса-Кодацци. Действие Эйнштейна. Уравнения Эйнштейна с веществом

3+1 разбиение с помощью Гауссовой нормальной системы координат. Уравнения Гаусса-Кодацци.

Общий вид действия для гравитации. Действие Эйнштейна. Формулы для вариаций различных входящих в него величин. Варьирование гравитационного действия. Уравнения Эйнштейна. Проблема вариации на границе. Поверхностный член и его вариация. Тензор энергии-импульса. Уравнения Эйнштейна с веществом. Лямбда-член.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория с меловой, фломастерной или интерактивной доской.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Теоретическая физика [Текст] : в 10 т. Т. 2 : Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц ; под. ред. Л. П. Питаевского - М.Физматлит,2014, 2016
2. Сборник задач по теории относительности и гравитации [Текст] = Problem book in relativity and gravitation / А. Лайтман [и др.] ; пер. с англ. А. П. Бондарева, Ю. А. Данилова под ред. И. М. Халатникова .— М : Мир, 1979 .— 535 с.
3. Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер. Гравитация, тт.1-3, - М.: Мир, 1977.

#### Дополнительная литература

1. К.Уилл. Теория и эксперимент в гравитационной физике. - М.: Мир, 1975.

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекциях возможно использование мультимедийных технологий, включая демонстрацию презентаций. На семинарах важно интерактивное взаимодействие со студентами при решении задач по темам курса, в форме ответов на вопросы и решения для этого, при необходимости, вспомогательных задач. Для такого интерактивного взаимодействия и совместного со студентами решения задач лучше всего подходит фломастерная или меловая доска.

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Общая и прикладная физика Физтех-школа физики и исследований им. Ландау кафедра проблем физики и астрофизики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** М.И. Зельников, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований, и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями современной физики
	ПК-1.2 Имеет глубокое знание и понимание базовых математических дисциплин
	ПК-1.3 Владеет культурой постановки научной задачи и моделирования естественнонаучных объектов и систем
	ПК-1.4 Умеет строить математические модели для описания и исследования процессов и явлений в соответствующих научных областях
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математический аппарат общей теории относительности» обучающийся должен:

### знать:

- основные понятия и теоремы тензорного анализа и римановой геометрии, необходимые для формулировки и решения задач ОТО.

### уметь:

- формулировать на математическом языке физические задачи взаимодействия частиц и физических полей с гравитационным полем; применять главные методы решения этих задач.



**владеть:**

- первоначальными навыками в решении основных типов задач ОТО.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

Не предусмотрено.

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Уравнения геодезических и их получение из разных вариантов действия точечной частицы.
2. Тензорная алгебра. Полезные формулы: производная определителя метрики, дивергенция контравариантного вектора.
3. Метод геодезического лагранжиана: вычисление символов Кристоффеля с его помощью.
4. Тензор Римана. Вычисление для конкретной метрики (двумерной, четырехмерной).
5. Геодезические. Решение уравнений геодезических для заданной метрики (двумерная метрика, четырехмерная метрика космической струны).
6. Производная Ли. Доказать возможность замены в определении производной Ли частных производных на ковариантные.
7. Перенос Ферми-Уокера. Томасовская прецессия.
8. Уравнение Киллинга. Решение его для конкретной метрики (двумерной).
9. Внешняя кривизна. Вычисление для простых двумерных поверхностей (цилиндр, сфера, поверхность второго порядка общего вида).
10. Уравнения Гаусса-Кодацци. Вывод.
11. Теория Бранса-Дике. Получение уравнений движения.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет 1.

1. Уравнения геодезических и их получение из разных вариантов действия точечной частицы.
2. Производная Ли. Доказать возможность замены в определении производной Ли частных производных на ковариантные.

Билет 2.

1. Тензорная алгебра. Полезные формулы: производная определителя метрики, дивергенция контравариантного вектора.
2. Перенос Ферми-Уокера. Томасовская прецессия.

### **Критерии оценивания**

Оценка "отлично" (10 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (9 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (8 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочётами.

Оценка "хорошо" (7 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка "хорошо" (6 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка "хорошо" (5 баллов) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка "удовлетворительно" (4 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка "удовлетворительно" (3 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка "неудовлетворительно" (2 балла) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка "неудовлетворительно" (1 балл) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать одного астрономического часа. Оценивание знаний производится в соответствии с вышеуказанными критериями в соответствии с содержанием дисциплины.