

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Графы
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Комбинаторика и цифровая экономика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 06.03.2023

## Аннотация

Курс предназначен для магистров математиков, интересующихся методами современной дискретной математикой и представлениями больших данных с помощью графов. В курсе помимо основных объектов теории графов включены некоторые наиболее важные главы теории графов - критерии гамильтоновости, теорема Турана, задача Рамсея.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- освоение основных современных методов теории графов-расширителей.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в теории графов-расширителей;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в теории графов-расширителей;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в теории графов-расширителей.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
	УК-2.4 Представляет публично результаты проекта (или отдельных его этапов) в форме отчетов, статей, выступлений на научно-практических конференциях, семинарах и т.п.
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Организует и координирует работу участников проекта, способствует конструктивному преодолению возникающих разногласий и конфликтов
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории графов-расширителей;
- современные проблемы соответствующих разделов теории графов-расширителей;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла теории графов-расширителей;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории графов-расширителей.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в топологии в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком топологии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Коды Земора. Кодирование и декодирование	6	6		6
2	Лемма о перемешивании. Теорема о реберном расширении	6	6		6
3	Проводники вероятности. Минэнтропия, ее свойства	6	6		6
4	Рекурсивные конструкции экспандеров. О "явном" задании графов	6	6		6
5	Свойства расширения, связи между ними	6	6		6
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

###### 1. Коды Земора. Кодирование и декодирование

Надежное хранение данных в ненадежных ячейках. Надежные булевы схемы.

2. Лемма о перемешивании. Теорема о реберном расширении

Приложения: асимптотически хорошие коды, хранение данных со сверхбыстрым запросом.

3. Проводники вероятности. Минэнтропия, ее свойства

Явное построение почти оптимальных двудольных экспандеров: использование спектральных экспандеров и неявных конструкций размера  $O(1)$ .

4. Рекурсивные конструкции экспандеров. О "явном" задании графов

Спектральная теория экспандеров. Алгебраические экспандеры. Нижняя оценка на второе собственное число. Теоремы существования.

5. Свойства расширения, связи между ними

Определение регулярных экспандеров, доказательства существования. Приложения: улучшение успеха в алгоритмах.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Графы. Алгоритмы на языке C [Текст] / В. В. Прут ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ,2017
2. Дискретная математика: логика, группы, графы [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / О. Е. Акимов .— 2-е изд., доп. — М. : Лаб. базовых знаний, 2003 .— 376 с

### Дополнительная литература

1. Сборник задач по дискретному анализу. Комбинаторика. Элементы алгебры логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев [и др.] ; М-во образования Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд. — М. : МФТИ, 2000, 2004 .— 100 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru/>

<http://www.mccme.ru/~anromash/courses/expanders-notes-2014.pdf>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Комбинаторика и цифровая экономика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
	УК-2.4 Представляет публично результаты проекта (или отдельных его этапов) в форме отчетов, статей, выступлений на научно-практических конференциях, семинарах и т.п.
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Организует и координирует работу участников проекта, способствует конструктивному преодолению возникающих разногласий и конфликтов
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Графы» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории графов-расширителей;
- современные проблемы соответствующих разделов теории графов-расширителей;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла теории графов-расширителей;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории графов-расширителей.

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в топологии в устной и письменной форме.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком топологии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

### Примеры домашних задач

1. Чему равно максимальное число ребер в графе на 12 вершинах с 3 компонентами связности?
2. Сколько существует попарно неизоморфных 2-регулярных двудольных графов на 16 вершинах?
3. Сколько существует различных 2-регулярных графов на 16 вершинах с фиксированными долями  $\{x_1, \dots, x_8\}$  и  $\{y_1, \dots, y_8\}$ ?
4. Каково максимальное число вершин в графе, в котором нет ни независимого множества на трех вершинах, ни нечетных циклов?
5. Найдите наименьшее возможное число независимости графа на 6 вершинах без треугольников.

### Примеры задач итоговой контрольной

1. Известно, что в графе  $K_{m,n}$  есть гамильтонов цикл. Известно, кроме того, что этот граф планарен. Найдите наибольшее такое  $k$ , что рассматриваемый двудольный граф является  $k$ -связным.
2. Рассмотрим граф, вершинами которого являются всевозможные 3-элементные подмножества множества  $\{1, \dots, n\}$ . Ребра проведены в том и только том случае, когда подмножества пересекаются ровно по двум элементам. Чему равно количество циклов на 3 вершинах в таком графе при  $n = 6$ ?
3. Известно, что все вершины двудольного графа с размером каждой доли 19 за исключением одной имеют степень, равную 5. А одна оставшаяся вершина имеет степень, равную либо 4, либо 5, либо 6. Какого размера паросочетание мы можем гарантировать в этом графе?
4. Сколько существует различных 2-регулярных графов на 12 вершинах с фиксированными долями  $\{x_1, \dots, x_6\}$  и  $\{y_1, \dots, y_6\}$ ?
5. Для графа на 15 вершинах, не содержащего треугольников, найдите наилучшую оценку сверху на число ребер.

Курс состоит из 11 модулей (недель), включающих лекцию, семинарские задачи с разбором и домашние задачи, предложенные в виде теста. В конце студенты пишут итоговую контрольную, после чего принимают участие в экзамене, состоящем из письменной и устной части. Итоговая оценка складывается из балла за домашние задачи, за итоговую контрольную, за письменный и устный экзамены.

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Свойства расширения, связи между ними. Определение регулярных экспандеров, доказательства существования. Приложения: улучшение успеха в алгоритмах.
2. Двудольные экспандеры, существование. Приложения: асимптотически хорошие коды, хранение данных со сверхбыстрым запросом.
3. Спектральная теория экспандеров. Алгебраические экспандеры. Нижняя оценка на второе собственное число. Теоремы существования.
4. Лемма о перемешивании. Теорема о реберном расширении.
5. Связь между комбинаторными и алгебраическими экспандерами. Случайные блуждания по экспандерам. Приложения.
6. Подстановочное произведение, тензорное произведение, зигзаг-произведение графов. Спектральные свойства.
7. Рекурсивные конструкции экспандеров. О "явном" задании графов.
8. Графы Рамануджана, конструкция Маргулиса.
9. Приложения: алгоритм Рейнгольда проверки связности графа.
10. Проводники вероятности. Мин-энтропия, ее свойства.
11. Зигзаг-конструкция для проводников.
12. Явное построение почти оптимальных двудольных экспандеров: использование спектральных экспандеров и неявных конструкций размера  $O(1)$ .
13. Коды Земора. Кодирование и декодирование.
14. Коды на двудольных экспандерах. Их кодирование и декодирование.
15. Надежное хранение данных в ненадежных ячейках. Надежные булевы схемы.



## Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

## 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.