

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Дискретная математика
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Комбинаторика и цифровая экономика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 90 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 180, всего зач. ед.: 4

Программу составил: А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Цель дисциплины - дать студентам 1 курса базовые вещи из теории чисел, теории множеств, теории булевых функций, научить началам математической логики и теории алгоритмов, а также обучить основам теории графов

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение основных современных методов теории графов-расширителей.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в теории графов-расширителей;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в теории графов-расширителей;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических ис-следований в теории графов-расширителей.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Организует и координирует работу участников проекта, способствует конструктивному преодолению возникающих разногласий и конфликтов
	УК-3.2 Учитывает в своей социальной и профессиональной деятельности интересы, особенности поведения и мнения (включая критические) людей, с которыми работает/взаимодействует, в том числе посредством корректировки своих действий
	УК-3.3 Способен предвидеть результаты (последствия) как личных, так и коллективных действий
	УК-3.4 Способен планировать командную работу, распределять поручения членам команды, организовать обсуждение разных идей и мнений
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории графов-расширителей;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов теории графов-расширителей;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла теории графов-расширителей;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории графов-расширителей.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в топологии в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- ☐ предметным языком топологии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Коды Земора. Кодирование и декодирование	6	6		18
2	Лемма о перемешивании. Теорема о реберном расширении	6	6		18
3	Проводники вероятности. Мин-энтропия, ее свойства	6	6		21
4	Рекурсивные конструкции экспандеров. О "явном" задании графов	6	6		18
5	Свойства расширения, связи между ними	6	6		15
Итого часов		30	30		90
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		180 час., 4 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

###### 1. Коды Земора. Кодирование и декодирование

Надежное хранение данных в ненадежных ячейках. Надежные булевы схемы.

2. Лемма о перемешивании. Теорема о реберном расширении

Приложения: асимптотически хорошие коды, хранение данных со сверхбыстрым запросом.

3. Проводники вероятности. Мин-энтропия, ее свойства

Явное построение почти оптимальных двудольных экспандеров: использование спектральных экспандеров и неявных конструкций размера  $O(1)$ .

4. Рекурсивные конструкции экспандеров. О "явном" задании графов

Спектральная теория экспандеров. Алгебраические экспандеры. Нижняя оценка на второе собственное число. Теоремы существования.

5. Свойства расширения, связи между ними

Определение регулярных экспандеров, доказательства существования. Приложения: улучшение успеха в алгоритмах.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

Основная литература

1. Дискретная математика [Текст] / А. Н. Макоха, П. А. Сахнюк, Н. И. Червяков - М.Физматлит,2005
2. Лекции по дискретной математике [Текст] : учеб. пособие для студентов и аспирантов вузов / Ю. В. Капитонова [и др.] .— СПб. : БХВ-Петербург, 2004 .— 624 с.

Дополнительная литература

1. Дискретная математика: задачи и решения [Текст] / Г. И. Просветов - М.БИНОМ. Лаб. знаний,2008, 2011

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru/>

<http://www.mccme.ru/~anromash/courses/expanders-notes-2014.pdf>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Комбинаторика и цифровая экономика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Организует и координирует работу участников проекта, способствует конструктивному преодолению возникающих разногласий и конфликтов
	УК-3.2 Учитывает в своей социальной и профессиональной деятельности интересы, особенности поведения и мнения (включая критические) людей, с которыми работает/взаимодействует, в том числе посредством корректировки своих действий
	УК-3.3 Способен предвидеть результаты (последствия) как личных, так и коллективных действий
	УК-3.4 Способен планировать командную работу, распределять поручения членам команды, организовать обсуждение разных идей и мнений
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дискретная математика» обучающийся должен:

### знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории графов-расширителей;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов теории графов-расширителей;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла теории графов-расширителей;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории графов-расширителей.

### уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в топологии в устной и письменной форме.

### владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- ☐ предметным языком топологии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль

Контрольная 1

Задача 1. Докажите тождество  $(A \setminus B) \cup (C \setminus B) \cup (B \cap C) = A \cup B \cup C$ .

Задача 2. При каких ограничениях на множества  $A, B$  и  $C$  выполнено равенство  $(A \setminus B) \cup (C \setminus B) = C \setminus B$ ? Ответ выразите через операции над множествами.

Задача 3. Докажите, что, если  $F$  произвольное инъективное соответствие из множества  $A$  в множество  $B$  и  $S, T \subset A$  произвольные подмножества, то  $F(S \cap T) = F(S) \cap F(T)$ .

Задача 4. Найдите мощность множества всех бесконечных последовательностей, составленных из чисел множества  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Свой ответ обоснуйте.

Задача 5. Можно ли на множестве  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  задать отношение эквивалентности, состоящее ровно из 13 пар? Если нет, то обоснуйте ответ, если да, то приведите пример такого отношения эквивалентности.

Задача 6. Приведите пример частично упорядоченного множества без минимальных элементов, но с ровно тремя максимальными элементами.

Задача 7. Сколько существует перестановок чисел от 1 до 7, в которых на втором месте стоит не 3, на третьем не 4, на четвертом не 5, на пятом не 6, а на остальных позиции ограничений нет?

Задача 8. Сколько чисел можно составить так, чтобы это число состояло бы из двух цифр 1, двух цифр 2, двух цифр 3, двух цифр 4 и двух цифр 5 и имело бы длину 10, причём в этом числе обе цифры 2 и обе цифры 3 обязательно бы стояли между двумя цифрами 1 (на позиции других цифр ограничений нет)?

Задача 9. Решите линейное сравнение  $215x \equiv 10 \pmod{635}$ . Вы должны найти все решения по модулю 635.

Задача 10. Решите систему сравнений  $x \equiv 3 \pmod{27}$  и  $x \equiv 5 \pmod{29}$ . Ответ должен быть дан по модулю 783.

Задача 11. Разрешимо ли уравнение  $x^2 \equiv 91 \pmod{113}$ ? Ответ обоснуйте.

Задача 12. Найдите какой-нибудь первообразный корень по модулю 37. Докажите, что найденный вычет на самом деле является первообразным корнем.

Задача 13. Найдите все возможные первообразные корни по модулю 37. Ответ можно дать в виде степени некоторого числа.

Задача 14. Решите уравнение  $x^6 \equiv 10 \pmod{37}$ . Выясните, есть ли у этого уравнения решения и найдите число этих решений, если они есть. Вы можете оставить ответ в виде степени некоторого первообразного корня.

Задача 15. Подстрокой строки  $s = s_1 s_2 \dots s_n$  называется произвольная последовательность символов  $t = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ . Рассмотрим строки длины 16, которые состоят только из 0 и 1. Найдите число таких строк, что в них ровно 4 подстроки 00, 2 подстроки 11, 4 подстроки 01 и 5 подстрок 10.

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Вопросы к экзамену:

1. Свойства расширения, связи между ними. Определение регулярных экспандеров, доказательства существования. Приложения: улучшение успеха в алгоритмах.
2. Двудольные экспандеры, существование. Приложения: асимптотически хорошие коды, хранение данных со сверхбыстрым запросом.
3. Спектральная теория экспандеров. Алгебраические экспандеры. Нижняя оценка на второе собственное число. Теоремы существования.
4. Лемма о перемешивании. Теорема о реберном расширении.



5. Связь между комбинаторными и алгебраическими экспандерами. Случайные блуждания по экспандерам. Приложения.
6. Подстановочное произведение, тензорное произведение, зигзаг-произведение графов. Спектральные свойства.
7. Рекурсивные конструкции экспандеров. О "явном" задании графов.
8. Графы Рамануджана, конструкция Маргулиса.
9. Приложения: алгоритм Рейнгольда проверки связности графа.
10. Проводники вероятности. Мин-энтропия, ее свойства.
11. Зигзаг-конструкция для проводников.
12. Явное построение почти оптимальных двудольных экспандеров: использование спектральных экспандеров и неявных конструкций размера  $O(1)$ .
13. Коды Земора. Кодирование и декодирование.
14. Коды на двудольных экспандерах. Их кодирование и декодирование.
15. Надежное хранение данных в ненадежных ячейках. Надежные булевы схемы.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Двудольные экспандеры, существование. Приложения: асимптотически хорошие коды, хранение данных со сверхбыстрым запросом.
2. Рекурсивные конструкции экспандеров. О "явном" задании графов.

Билет №2

1. Коды Земора. Кодирование и декодирование.
2. Явное построение почти оптимальных двудольных экспандеров: использование спектральных экспандеров и неявных конструкций размера  $O(1)$ .

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.