

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Математическая статистика
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Комбинаторика и цифровая экономика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 90 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 180, всего зач. ед.: 4

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: И.В. Родионов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

В данном курсе математическая статистика рассматривается как научная дисциплина, изучающая теоретические основы и методы извлечения и обработки эмпирических данных о массовых явлениях, представляемых в виде стохастических моделей. К задачам математической статистики относят также построение и исследование процедур принятия решений в условиях «стохастической неопределенности».

Курс содержит начальные сведения из математической статистики, используемые и дополняемые в дальнейшем. Рассматриваются классические вероятностные модели принятия решений о классах наблюдаемых объектов по значениям их признаков (модели классификации или выбора гипотез); при этом предполагается, что распределения признака для каждого класса объектов известны точно или с точностью до типа. Обсуждаются критерии согласия как инструмент проверки достоверности гипотез и задачи оценивания распределений (в частности, задачи т.н. параметрического оценивания).

Отдельно обсуждаются методы непараметрического оценивания распределений, предъявляющие к априорным сведениям об их свойствах гораздо меньшие требования. Курс также содержит основные сведения о регрессионном анализе, служащем для выявления и оценки вероятностных связей между изучаемыми случайными величинами.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

изучение математических и теоретических основ современного статистического анализа, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области анализа статистических задач прикладной математики, физики и экономики.

Задачи дисциплины

- ☐ изучение математических основ математической статистики;
- ☐ приобретение слушателями теоретических знаний в области современного статистического анализа.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области прикладной математики и информатики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, задач, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий, владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения

естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии

ПК-2.2 Имеет практический опыт использования существующих методов и алгоритмов решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ основные понятия математической статистики;
- ☐ основные подходы к сравнению оценок параметров неизвестного распределения;
- ☐ асимптотические и неасимптотические свойства оценок параметров неизвестного распределения;
- ☐ основные методы построения оценок с хорошими асимптотическими свойствами: метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод выборочных квантилей;
- ☐ понятие эффективных оценок и неравенство информации Рао-Крамера;
- ☐ определение и главные свойства условного математического ожидания случайной величины относительно сигма-алгебры или другой случайной величины;
- ☐ определение общей линейной регрессионной модели и метод наименьших квадратов;
- ☐ многомерное нормальное распределение и его основные свойства;
- ☐ базовые понятия теории проверки статистических гипотез;
- ☐ лемму Неймана – Пирсона и теорему о монотонном отношении правдоподобия;
- ☐ критерий хи-квадрат Пирсона для проверки простых гипотез в схеме Бернулли.

уметь:

- ☐ обосновывать асимптотические свойства оценок с помощью применения предельных теорем теории вероятностей;
- ☐ строить оценки с хорошими асимптотическими свойствами для параметров неизвестного распределения по заданной выборке из него;
- ☐ находить байесовские оценки по заданному априорному распределению;
- ☐ вычислять условные математические ожидания с помощью условных распределений;
- ☐ находить оптимальные оценки с помощью полных достаточных статистик;
- ☐ строить точные и асимптотические доверительные интервалы и области для параметров неизвестного распределения;
- ☐ находить оптимальные оценки и доверительные области в гауссовской линейной модели;
- ☐ строить равномерно наиболее мощные критерии в случае параметрического семейства с монотонным отношением правдоподобия;
- ☐ строить F-критерий для проверки линейных гипотез в линейной гауссовской модели.

владеть:

- ☐ основными методами математической статистики построения точечных и доверительных оценок: методом моментов, выборочных квантилей, максимального правдоподобия, методом наименьших квадратов, методом центральной статистики.
- ☐ навыками асимптотического анализа статистических критериев;
- ☐ навыками применения теорем математической статистики в прикладных задачах физики и экономики.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа

1	F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели.	4	4		15
2	Вероятностно-статистическая модель.	4	4		15
3	Основная задача математической статистики.	4	4		15
4	Различные виды сходимостей случайных векторов.	6	6		15
5	Статистики и оценки.	6	6		15
6	Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения.	6	6		15
Итого часов		30	30		90
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		180 час., 4 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели.

F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели. Пример с двумя гауссовскими выборками, отличающимися сдвигом: проверка гипотезы об их однородности.

2. Вероятностно-статистическая модель.

Вероятностно-статистическая модель. Понятия наблюдения и выборки. Параметрическая статистическая модель. Моделирование выборки из неизвестного распределения, принадлежащему параметрическому семейству.

3. Основная задача математической статистики.

Основная задача математической статистики. Примеры: выборка и линейная модель.

4. Различные виды сходимостей случайных векторов.

Различные виды сходимостей случайных векторов: с вероятностью 1, по вероятности, по распределению. Три знаменитых теоремы: закон больших чисел, усиленный закон больших чисел, центральная предельная теорема. Теорема о наследовании сходимости и лемма Слуцкого. Пример применения леммы Слуцкого.

5. Статистики и оценки.

Статистики и оценки. Примеры статистик: выборочные характеристики, порядковые статистики. Основные свойства оценок: несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность, асимптотическая нормальность. Примеры. Наследование состоятельности и сильной состоятельности при взятии непрерывной функции. Лемма о наследовании асимптотической нормальности.

6. Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения.

Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения. Обоснованность основной задачи математической статистики и теорема Гливенко-Кантелли.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Натан, О. Г. Горбачев, С. А. Гуз ; Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М : МЗ Пресс, 2004, 2005 .— 160 с.
2. Математическая статистика [Текст] : [учебник для вузов] / А. А. Боровков .— [3-е изд., испр.] .— М. : Физматлит, 2007 .— 704 с.
3. Введение в математическую статистику [Текст] : [учебник для вузов] / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев .— М. : ЛКИ, 2010, 2014, 2015 .— 600 с.
4. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин .— М. : Физматлит, 2005 .— 295 с. : ил. + pdf-версия. - Библиогр.: с. 292. - ISBN 5-9221-0633-3. — Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

1. Наглядная математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов / М. Б. Лагутин .— 7-е изд. — М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2019 .— 472 с. : ил. - Библиогр.: с. 456-459. - Предм. указ.: с. 462-466. - ISBN 978-5-00101-105-7 (в пер.) .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Комбинаторика и цифровая экономика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
курс:	1
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен	
Разработчик:	И.В. Родионов, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области прикладной математики и информатики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, задач, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий, владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Имеет практический опыт использования существующих методов и алгоритмов решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математическая статистика» обучающийся должен:

знать:

- ☐ основные понятия математической статистики;
- ☐ основные подходы к сравнению оценок параметров неизвестного распределения;
- ☐ асимптотические и неасимптотические свойства оценок параметров неизвестного распределения;
- ☐ основные методы построения оценок с хорошими асимптотическими свойствами: метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод выборочных квантилей;
- ☐ понятие эффективных оценок и неравенство информации Рао-Крамера;
- ☐ определение и главные свойства условного математического ожидания случайной величины относительно сигма-алгебры или другой случайной величины;
- ☐ определение общей линейной регрессионной модели и метод наименьших квадратов;
- ☐ многомерное нормальное распределение и его основные свойства;
- ☐ базовые понятия теории проверки статистических гипотез;
- ☐ лемму Неймана – Пирсона и теорему о монотонном отношении правдоподобия;
- ☐ критерий хи-квадрат Пирсона для проверки простых гипотез в схеме Бернулли.

уметь:

- ☐ обосновывать асимптотические свойства оценок с помощью применения предельных теорем теории вероятностей;
- ☐ строить оценки с хорошими асимптотическими свойствами для параметров неизвестного распределения по заданной выборке из него;
- ☐ находить байесовские оценки по заданному априорному распределению;
- ☐ вычислять условные математические ожидания с помощью условных распределений;
- ☐ находить оптимальные оценки с помощью полных достаточных статистик;
- ☐ строить точные и асимптотические доверительные интервалы и области для параметров неизвестного распределения;
- ☐ находить оптимальные оценки и доверительные области в гауссовской линейной модели;
- ☐ строить равномерно наиболее мощные критерии в случае параметрического семейства с монотонным отношением правдоподобия;
- ☐ строить F-критерий для проверки линейных гипотез в линейной гауссовской модели.

владеть:

- ☐ основными методами математической статистики построения точечных и доверительных оценок: методом моментов, выборочных квантилей, максимального правдоподобия, методом наименьших квадратов, методом центральной статистики.
- ☐ навыками асимптотического анализа статистических критериев;
- ☐ навыками применения теорем математической статистики в прикладных задачах физики и экономики.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры домашних заданий:

1. Найдите оптимальную оценку параметра $\theta > 0$ по выборке из распределения: а) $N(\theta, 1)$, б) $R(0, \theta)$, в) $Pois(\theta)$, г) $Bin(1, \theta)$ (здесь $(0, 1)$). 6. Пусть X_1, \dots, X_n выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$, $\theta > 0$. Постройте доверительный интервал для уровня доверия γ , используя статистику а) X , б) $X(1)$, в) $X(n)$.
2. Пусть X_1, \dots, X_n выборка из нормального распределения с параметрами $(\theta, 1)$. Найдите байесовскую оценку параметра θ , если априорное распределение есть $Bin(1, p)$. Будет ли полученная оценка состоятельной оценкой параметра?
3. Имеется 2 объекта с весами a и b . Мы взвесили с ошибками первый, второй и оба объекта вместе, причём дисперсия ошибки в последнем случае была в 4 раза больше. Свести задачу к линейной регрессионной модели и найти оценки наименьших квадратов для a и b .
4. X_1, \dots, X_n выборка из экспоненциального распределения с параметром θ . Постройте равномерно наиболее мощный критерий уровня значимости проверки гипотезы $H_0: \theta = 0$ против альтернативы а) $H_1: \theta > 0$, б) $H_1: \theta < 0$.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Виды сходимостей случайных векторов: с вероятностью 1, по вероятности, по распределению. Взаимоотношения между различными видами сходимостей. Усиленный закон больших чисел для случайных векторов. Многомерная центральная предельная теорема.
2. Теорема о наследовании сходимости и лемма Слуцкого. Пример их применения.
3. Гауссовские случайные векторы (многомерное нормальное распределение). Теорема о трех эквивалентных определениях. Смысл параметров гауссовского вектора.
4. Основные свойства гауссовских векторов: линейные преобразования и критерий независимости компонент. Теорема об ортогональном разложении гауссовского вектора.
5. Вероятностно-статистическая модель, параметрическая модель. Выборка, эмпирическое распределение. Теорема Гливенко-Кантелли.
6. Статистики и оценки. Несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность и асимптотическая нормальность. Лемма о наследовании асимптотической нормальности.
7. Оценка параметра по методу подстановки. Оценка параметра по методу моментов. Теорема о состоятельности оценки метода моментов.
8. Квантили распределения, выборочные квантили, выборочная медиана. Теорема об асимптотической нормальности выборочной r -квантили.
9. Функция потерь и функция риска. Равномерный подход к сравнению оценок. Байесовский, минимаксный и асимптотический подходы к сравнению оценок.

10. Информация Фишера и вклад наблюдения. Неравенство Рао-Крамера. Эффективные оценки и критерий эффективности.
11. Понятие плотности для дискретной случайной величины. Доминируемое семейство распределений. Функция правдоподобия и оценка максимального правдоподобия. Теорема об экстремальном свойстве правдоподобия.
12. Теорема о существовании состоятельного решения уравнения правдоподобия. Состоятельность оценки максимального правдоподобия. Теорема об асимптотической нормальности решения уравнения правдоподобия.
13. Теорема Бахадура. Асимптотически эффективные оценки. Асимптотическая эффективность и эффективность оценки максимального правдоподобия.
14. Условное математическое ожидание случайной величины относительно сигма-алгебры. Заряд на вероятностном пространстве. Теорема Радона-Никодима.
15. Свойства условного математического ожидания (9 штук).
16. Условное математическое ожидание. Условное распределение и условная плотность одной случайной величины относительно другой. Теорема о вычислении условного математического ожидания с помощью условной плотности. Теорема о достаточном условии существования условной плотности.
17. Достаточные статистики. Критерий факторизации Неймана-Фишера. Теорема Колмогорова-Блекуэлла-Рао и следствие из нее.
18. Полные статистики. Теорема об оптимальной оценке. Экспоненциальное семейство распределений. Теорема о полной достаточной статистике в экспоненциальном семействе.
19. Доверительные интервалы и доверительные области. Понятие центральной статистики и метод построения доверительных областей с ее помощью. Асимптотические доверительные интервалы.
20. Линейная регрессионная модель. Оценка наименьших квадратов, формула ее вычисления. Несмещенные оценки для параметров линейной регрессионной модели.
21. Проверка статистических гипотез: гипотеза и альтернатива, критерий проверки гипотезы, ошибки первого и второго родов, уровень значимости и размер критерия, функция мощности. Несмещенность и состоятельность статистического критерия.
22. Сравнения критериев, равномерно наиболее мощные критерии. Лемма Неймана-Пирсона о проверке простых гипотез. Следствие из нее. Параметрические семейства распределений с монотонным отношением правдоподобия. Теорема о семействе с монотонным отношением правдоподобия.
23. Линейная гауссовская модель, достаточная статистика в линейной гауссовской модели. Линейные гипотезы, F-критерий для проверки линейной гипотезы в гауссовской линейной модели.
24. Статистика хи-квадрат Пирсона в схеме Бернулли с m исходами. Теорема Пирсона. Критерий согласия Пирсона.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Теорема о наследовании сходимости и лемма Слуцкого. Пример их применения.
2. Полные статистики. Теорема об оптимальной оценке. Экспоненциальное семейство распределений. Теорема о полной достаточной статистике в экспоненциальном семействе.

Билет №2

1. Свойства условного математического ожидания (9 штук)
2. Проверка статистических гипотез: гипотеза и альтернатива, критерий проверки гипотезы, ошибки первого и второго родов, уровень значимости и размер критерия, функция мощности. Несмещенность и состоятельность статистического критерия

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.