

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

| | |
|----------------------------|--|
| | Рабочая программа дисциплины (модуля) |
| по дисциплине: | Теория гиперграфов |
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики |
| курс: | 4 |
| квалификация: | бакалавр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

курс посвящен экстремальным задачам в теории гиперграфов. Изучаются проблемы турановского типа в теории графов и гиперграфов, проблемы теории раскрасок гиперграфов, элементы аддитивной комбинаторики и теории Рамсея. Большое внимание уделяется различным вероятностным методам, лежащим в основе доказательств основных теорем.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение основных понятий теории гиперграфов.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области гиперграфов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области гиперграфов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области гиперграфов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|--|
| ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре | ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников |
| | ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры |
| | ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели |
| | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации |
| | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива |

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории случайных гиперграфов;
- современные проблемы соответствующих разделов случайных гиперграфов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных гиперграфов.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных гиперграфов;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных гиперграфов;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|-----------------------|--|---|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Теоремы: Турана, Эрдеша-Стоуна | 2 | 2 | | |
| 2 | Обобщения задачи Турана для графов и гиперграфов | 3 | 3 | | |
| 3 | Основные определения и понятия | 3 | 3 | | 4 |
| 4 | Теоремы Алона и Ширера. Теоремы турановского типа. | 3 | 3 | | 4 |
| 5 | О раскрасках гиперграфов | 2 | 2 | | 4 |
| 6 | Упаковки гиперграфов. | 2 | 2 | | 3 |
| Итого часов | | 15 | 15 | | 15 |
| Подготовка к экзамену | | 0 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 45 час., 1 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Теоремы: Турана, Эрдеша-Стоуна

Теорема Турана, Теорема Эрдеша-Стоуна Задача Турана. Обобщения для гиперграфов. Задачи туранского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.

2. Обобщения задачи Турана для графов и гиперграфов

Числа Турана для гиперграфов. Теорема турановского типа для графов без треугольников.

3. Основные определения и понятия

Графические последовательности. Алгоритм определения, графические последовательности и теорема Галлаи-Эрдёша. Оценки чисел Рамсея.

4. Теоремы Алона и Ширера. Теоремы турановского типа.

Теоремы Алона и Ширера о графах, не содержащих больших клик. Теоремы турановского типа для гиперграфов с большим обхватом. Проблема Эрдеша-Хайнала о раскрасках гиперграфов.

5. О раскрасках гиперграфов

Проблема Эрдеша-Хайнала. Критерий Плухара и теорема Черкашина-Козика. Локальная лемма Ловаса и раскраски простых гиперграфов. Теорема Сауэра о регулярных гиперграфах с большим обхватом.

6. Упаковки гиперграфов.

Упаковки гиперграфов. Метод контейнеров, теорема Ордендлича-Рота. Элементы аддитивной комбинаторики

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вероятностный метод [Текст], учеб. пособие для вузов /Н. Алон, Дж. Спенсер ; пер. 2-го англ. изд. под ред. А. А. Сапоженко. -М., БИНОМ. Лаб. знаний, 2007, 2013, 2015 (эл.)

Дополнительная литература

1. Комбинаторика и теория вероятностей [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— Долгопрудный : Интеллект, 2013 .— 104 с. - Библиогр.: с. 99. - 3000 экз. - ISBN 978-5-91559-147-8 .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

| | |
|----------------------------|--|
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики |
| курс: | 4 |
| квалификация: | бакалавр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|--|
| ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре | ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников |
| | ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры |
| | ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели |
| | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации |
| | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива |

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория гиперграфов» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории случайных гиперграфов;
- современные проблемы соответствующих разделов случайных гиперграфов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных гиперграфов.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных гиперграфов;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных гиперграфов;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Основные определения и понятия.
2. Графические последовательности. Алгоритм определения, графические последовательности и теорема Галлаи-Эрдёша.
3. Связность. Остовное дерево. Различные задачи об остовных деревьях.
4. Простейшие задачи экстремальной теории графов.
5. Число независимости и кликовое число. Теорема Рамсея (напоминание) и (p, q) -свойство. Функция независимости графа. Критерий двудольности и функция независимости. Задачи рамсеевского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.
6. Трансверсаль в графе и число независимости. Реберные графы и теорема Галлаи о максимальном парасочетании.
7. Локальные теоремы Галлаи-Эрдёша о числе вершин и теорема Боллобаша о числе рёбер, гарантирующие существование k -трансверсали. Обобщения этих теорем для гиперграфов.
8. Задача Турана. Теорема Моцкина-Стросса. Обобщения для гиперграфов. Задачи туранского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.
9. Обобщения задачи Турана для графов и гиперграфов.
10. Экстремальная задача о графах без циклов длины 4 и конечные проективные плоскости.
11. Шенновская ёмкость графов и теорема Ловаса о ёмкости цикла длины 5.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Теорема Турана для графов. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости произвольного графа. Числа Турана $ex(n, G)$ для произвольного графа G . Верхняя оценка числа Турана $ex(n, K_{s,t})$, следствие из нее – оценки числа ребер дистанционного графа в R^2 и R^3 .
2. Теорема Эрдёша-Стоуна об асимптотическом поведении $ex(n, G)$.
3. Числа Турана $T(n, k, b)$ для гиперграфов, понятие (n, k, b) -системы. Рекуррентные неравенства для чисел $T(n, k, b)$, простая нижняя оценка $T(n, k, b)$. Турановские плотности $t(k, b)$, рекуррентное неравенство для турановских плотностей. Верхняя оценка турановской плотности $t(k, b)$ (конструкция А. Сидоренко). Теорема Турана для гиперграфов и нижняя оценка Спенсера для $T(n, k, b)$. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости k -однородного гиперграфа. Нижняя оценка для $t(k, b)$, ее порядок при фиксированном k и растущем b .
4. Теорема Турана для графов с большим обхватом. Нижняя оценка Айтאי-Комлоша-Семереди (теорема Ширера) для числа независимости графа без треугольников со средней степенью вершины d . Следствие: верхняя оценка числа Рамсея $R(3, t)$. Точность оценки в теореме Айтאי-Комлоша-Семереди (существование графов с небольшим числом независимости и ограниченной средней степенью вершины).
5. Верхняя оценка числа Рамсея $R(s, t)$ при фиксированном s и растущем t .
6. Теорема Ширера о числе независимости графа, не содержащего подграфов, изоморфных K_r .
7. Теорема Алона о нижней оценке числа независимости графа, в котором у каждой вершины подграф его соседей имеет ограниченное хроматическое число.
8. Теорема о нижней оценке числа независимости k -однородного гиперграфа с обхватом больше 4 и со средней степенью вершины d (b/d). Аналогичная теорема Рёдля-Дьюка-Лефманна для простых гиперграфов. Следствие: опровержение гипотезы Хейлбронна в комбинаторной геометрии.

9. Экстремальная задача Эрдеша-Хайнала о раскрасках гиперграфов, простая верхняя оценка. Вероятностная нижняя оценка $m(k,r)$. Следствие: нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Вероятностная верхняя оценка $m(k,r)$. Теорема Алона об асимптотическом поведении $m(k,r)$ при растущем r .

10. Критерий Плухара r -раскрашиваемости гиперграфа в терминах существования упорядоченных r -цепей. Нижняя оценка Радхакришнана-Сринивасана для $m(k,2)$ (доказательство Черкашина-Козика).

11. Теорема Эрдеша-Ловаса об оценке максимальной степени ребра (вершины) в однородном гиперграфе с большим хроматическим числом. Следствие: наилучшая нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Задача Эрдеша-Ловаса о раскрасках простых гиперграфов. Их теорема о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом и большим обхватом (б/д). Лемма о свойствах простых гиперграфов с большим хроматическим числом. Следствие: нижняя оценка $m^*(k,r)$. Теорема Косточки-Мубай-Рёдля-Тетали о нижней оценке $m^*(k,r)$ при больших r .

12. Теорема Сауэра о существовании однородных регулярных гиперграфов с большим обхватом.

13. Теорема Косточки-Рёдля о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом, большим обхватом и ограниченными степенями вершин.

14. Упаковки гиперграфов, теорема Лу-Секеи об отрицательных корреляциях в пространстве случайных биекций. Теорема о достаточном условии упаковки гиперграфов. Следствия: достаточное условие совершенной G -упаковки; оценка для нижней степени вершины, гарантирующей существование совершенного k -сочетания.

15. Метод контейнеров, теорема Ордендлича-Рота о числе сильных независимых множеств в однородных регулярных простых гиперграфах.

16. Числа Ван дер Вардена $W(k,r)$, нижняя оценка в общем случае. Оценки $W(3,r)$: нижняя оценка Мозера, верхняя оценка Грэма-Шолимоши

Формула оценки

Зачет проходит в устной форме. На зачете студент должен устно ответить на вопрос из программы и решить задачу. В оценке учитывается и работа в семестре (посещаемость).

Примеры задач на экзамене.

1) Гиперграф называется кликой, если любые два его ребра пересекаются. Пусть $H=(V,E)$ - n -однородная клика. Какие значения могут принимать $\tau(H)$ и $\chi(H)$?

2) Пусть $H=(V,E)$ - n -однородная клика и $\chi(H)>2$. Докажите, что $|E|\leq n^n$.

3) Мы знаем, что если H - k -однородный гиперграф и $\Delta(H)\leq 2^{k-1}/ek$, то $\chi(H)=2$. Докажите, что если $\Delta(H)\leq 2^{k-1}/2ek$, то для H можно гарантировать справедливую раскраску в два цвета, т.е. правильную раскраску, в которой мощности цветовых классов будут почти равны (отличаться не более чем на 1).

4) Пусть $W(n,m)$ - это внедиагональное число Ван дер Вардена, т.е. это минимальное N т.ч. в любой раскраске $\{1,\dots,N\}$ в красный и синий цвета найдется либо красная арифметическая прогрессия длины n , либо синяя арифметическая прогрессия длины m . Докажите, что при фиксированном m и растущем n выполнено

$W(n,m)>c(m) n^{(m-1)/((\ln n)^{(m-1)})}$.

Примеры билетов:

Билет 1:

1. Теорема Ширера о числе независимости графа, не содержащего подграфов, изоморфных K_r .

2. Числа Ван дер Вардена $W(k,r)$, нижняя оценка в общем случае. Оценки $W(3,r)$: нижняя оценка Мозера, верхняя оценка Грэма-Шолимоши

3. Задача: Гиперграф называется кликой, если любые два его ребра пересекаются. Пусть $H=(V,E)$ - n -однородная клика. Какие значения могут принимать $\tau(H)$ и $\chi(H)$?

Билет 2:

1. Теорема Эрдеша-Стоуна об асимптотическом поведении $ex(n,G)$.

2. Теорема Сауэра о существовании однородных регулярных гиперграфов с большим обхватом.

3. Задача: Пусть $W(n,m)$ - это внедиагональное число Ван дер Вардена, т.е. это минимальное N т.ч. в любой раскраске $\{1,\dots,N\}$ в красный и синий цвета найдется либо красная арифметическая прогрессия длины n , либо синяя арифметическая прогрессия длины m . Докажите, что при фиксированном m и растущем n выполнено

$W(n,m)>c(m) n^{(m-1)/((\ln n)^{(m-1)})}$.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированный зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.