

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Аддитивная комбинаторика
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: А.А. Глибичук, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

Цель курса - дать основы активно развивающейся науки, которой является аддитивная комбинаторика. Основным объектом изучения аддитивной комбинаторики - сумма двух множеств. В курсе будут покрыты вопросы экстремальной аддитивной теории, которая изучает структуру множеств, у которых сумма мала. Курс покрывает классическую теорему Фреймана, неравенства Плуннеке-Ружи, теорему Воспера, теорему Кнезера и другие вещи, касающиеся в основном экстремальной аддитивной теории.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение аддитивной комбинаторики

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области аддитивной комбинаторики;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области аддитивной комбинаторики;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области аддитивной комбинаторики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы аддитивной комбинаторики;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов аддитивной комбинаторики;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач аддитивной комбинаторики.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач аддитивной комбинаторики;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов аддитивной комбинаторики;
- ☐ предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий**

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Неравенство Плюнке	6	6		
2	Группы полиномиального роста	6	6		
3	Группы, порождённые автоматами.	6	6		10
4	Классификация автоматных групп с двумя состояниями и алфавитом $\{0, 1\}$.	6	6		10
5	Метод Нильсена	6	6		10
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			

Общая трудоёмкость	90 час., 2 зач.ед.
--------------------	--------------------

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Неравенство Плюннеке

Простейшие соотношения между размерами сумм множеств.

2. Группы полиномиального роста

Рост сложности группы.

3. Группы, порождённые автоматами.

Действия на корневых деревьях.

4. Классификация автоматных групп с двумя состояниями и алфавитом $\{0, 1\}$.

Теорема Балога-Семереди-Гауэрса. Старшие энергии, структурные теоремы.

5. Метод Нильсена

Его геометрическая интерпретация.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Комбинаторная логика в программировании. Вычисления с объектами в примерах и задачах [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. Э. Вольфенгаген ; НОУ Ин-т Актуального образования "ЮрИнфоР-МГУ, Каф. перспективных компьт. исслед. и информ. технологий .— 3-е изд., доп. и перераб. — М. : Ин-т "ЮрИнфоР-МГУ, 2008 .— 384 с.
2. Лекции по математическому анализу [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / Г. Е. Иванов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : МФТИ, 2011 .— 318 с.
3. Основы комбинаторики и теории чисел [Текст] : сборник задач : учеб. пособие для вузов / А. А. Глибичук [и др.] .— Долгопрудный : Изд. Дом "Интеллект", 2015 .— 104 с.

Дополнительная литература

1. Вероятность и алгебра в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2010 .— 48 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

<http://web.stanford.edu/class/ee364b/lectures.html>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.А. Глибичук, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Аддитивная комбинаторика» обучающийся должен:

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы аддитивной комбинаторики;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов аддитивной комбинаторики;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач аддитивной комбинаторики.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач аддитивной комбинаторики;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов аддитивной комбинаторики;
- ☐ предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль

Вопрос 1. Неравенство треугольника Ружи.

Вопрос 2. Аддитивная энергия. Оценки на аддитивную энергию. Доказательство утверждения о том, что множество с маленькой суммой имеет большую аддитивную энергию.

Примеры задач:

Задача 1. Given an arbitrary abelian group G . For any subgroup $H \leq G$ and any subset S denote $S/H := \{s + H : s \in S\} \subseteq G/H$. Suppose that A и B are arbitrary nonempty subsets of the group G and $H = H(A + B)$. Prove that either $|A + B| > |A| + |B|$, or $|(A + B)/H| = |A/H| + |B/H| - 1$.

Задача 2. Выведите из теоремы Кнезера следующее утверждение: Пусть $m > 2$ и A, B непустые подмножества $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Если $0 \notin B$ и $(b, m) = 1$ для любого элемента $b \in B \setminus \{0\}$, то $|A + B| > \min\{m, |A| + |B| - 1\}$. Эта теорема была доказана И. Човлой и носит его имя.

Задача 3. Для любых непустых конечных подмножеств A и B произвольной абелевой группы G доказать, что эквивалентны следующие утверждения: 1) $|A + B| = |A||B|$. 2) $|A \cdot B| = |A||B|$. 3) $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 + b_1 = a_2 + b_2\}| = |A||B|$. 4) $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 b_1 = a_2 b_2\}| = |A||B|$. 5) $|A \setminus (x + B)| = 1$ для любых $x \in A + B$. 6) $|A \setminus (B + y)| = 1$ для любых $y \in A \cdot B$. 7) $(A \setminus A) \cap (B \setminus B) = \{0\}$.

Задача 4. Рассмотрим два произвольных конечных подмножества A, B произвольного поля F , состоящих по меньшей мере из двух элементов. Докажите, что для произвольного ненулевого элемента $c \in F$ неравенство $|A + cB| < |A||B|$ выполнено тогда и только тогда, когда найдутся элементы $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$, такие, что $c = a_1 - a_2 \cdot b_2 \cdot b_1^{-1}$. Напомним, что множество $cB = \{c \cdot b : b \in B\}$. Задача 5. Рассмотрим произвольное конечное поле F и любое его подполе $P \subseteq F$. Докажите, что для произвольных ненулевых элементов $c, d \in F \setminus \{0\}$ множество $A = c + dP$ удовлетворяет равенствам $|A + A| = |A|$ и $|A \cdot A| = |A|$ одновременно тогда и только тогда, когда $c \in dP$.

Задача 6. Докажите, что некоторое подмножество A поля F ($|A| > 2, |F| > 2$) удовлетворяет равенствам $|A \cdot A| = |A|$ и $|A + A| = |A|$ одновременно тогда и только тогда, когда A есть мультипликативный сдвиг некоторого подполя $P \subseteq F$, то есть существуют элемент $c \in F$, такие, что $A = cP$.

Задача 7. Пусть p произвольное простое число и c_1, c_2, \dots, c_k любые ненулевые коэффициенты из \mathbb{Z}_p . Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1 x_1^k + c_2 x_2^{k-1} + \dots + c_k x_k$. Докажите, что сравнение $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv n \pmod{p}$ разрешимо для любого n .

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Введение. Простейшие соотношения между размерами сумм множеств. Неравенство Плуннеке. Универсальные множества.
2. Структура множеств с малым удвоением. Леммы о покрытиях. Теорема Фреймана в группах с кручением.

3. Анализ Фурье на абелевых группах. Равномерные множества первого порядка. Теорема Рота.
4. Лемма регулярности Семереди. Теорема Ружи-Семереди о треугольниках.
5. Большие тригонометрические суммы.
6. Свойства множеств Бора.
7. Почти периодичность сверток характеристических функций. Арифметические прогрессии в суммах множеств.
8. Теорема Фреймана, полиномиальная гипотеза Боголюбова — современные оценки.
9. Теорема Балог-Семереди-Гауэрса. Старшие энергии, структурные теоремы.
10. Конструкция Беренда множеств без решений аффинных уравнений. Верхние оценки.
11. Нормы Гауэрса, равномерные множества старших порядков.
12. Теорема Семереди-Троттер, выпуклые множества. Суммы произведений: вещественный случай.

Темы для курсовых работ:

1. Суммы произведений: конечные поля, равномерная распределенность мультипликативных подгрупп.
2. Проблема Какея.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.