

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Основы вероятности и теория меры
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: И.Г. Эрлих, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

В курсе лекций излагаются основы теории вероятностей. Курс включает основы теории меры, основы комбинаторики, элементарную и аналитическую теорию вероятностей, предельные теоремы теории вероятностей. Рассматриваются основные разделы теории вероятностей: случайные события и их вероятности, случайные величины, распределения и числовые характеристики распределений, основные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение основных современных методов теории вероятностей.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в теории вероятностей;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в теории вероятностей;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в теории вероятностей.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в теории вероятностей в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- ☐ предметным языком теории вероятностей и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Вероятностное пространство	2	2		4
2	Вероятности	2	2		4
3	Случайные величины	4	4		4
4	Системы множеств	4	4		4
5	Меры на полукольцах	4	4		5
6	Полнота и непрерывность мер	4	4		6
7	Неизмеримые множества	2	2		6
8	Сходимость по мере и почти всюду	4	4		6
9	Интеграл Лебега для конечно-простых функций и его свойства	4	4		6
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

## 1. Вероятностное пространство

Вероятностное пространство как математическая модель случайного эксперимента. Статистическая устойчивость. Дискретное вероятностное пространство. Классическая вероятность. Построение простейших вероятностных пространств. Элементы комбинаторики. Вероятность суммы событий.

## 2. Вероятности

Геометрические вероятности. Задача “о встрече”. Условная вероятность. Формулы полной вероятности, умножения и Байеса. Независимость событий, виды и взаимосвязь

## 3. Случайные величины

Независимость случайных величин. Распределение. Примеры. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция. Свойства. Схема испытаний Бернулли. Математическая модель, предельные теоремы: Пуассона и Муавра-Лапласа (б\д).

## 4. Системы множеств

Полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры. Примеры. Минимальное кольцо, содержащее полукольцо. Понятие наименьшего кольца, алгебры, сигма-алгебры, содержащей систему множеств.

## 5. Меры на полукольцах

Классическая мера Лебега на полукольце промежутков и ее сигма-аддитивность.

Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо. Наследование сигма-аддитивности при продолжении меры. Внешние меры Лебега и Жордана. Мера Лебега. Свойства. Сигма-алгебра измеримых множеств. Сигма-аддитивность меры Лебега на сигма-алгебре измеримых множеств.

## 6. Полнота и непрерывность мер

Теоремы о связи непрерывности и сигма-аддитивности. Мера Бореля. Меры Лебега-Стилтьеса на прямой и их сигма-аддитивность. Сигма-конечные меры.

## 7. Неизмеримые множества

Теорема о структуре измеримых множеств. Измеримые функции. Их свойства. Измеримые функции и предельный переход. Множество Кантора и кривая Кантора. Теорема о существовании композиции измеримой от непрерывной, не являющейся измеримой функцией

## 8. Сходимость по мере и почти всюду

Их свойства (критерий Коши сходимости по мере, арифметические, связь сходимостей, Теорема Рисса). Теоремы Егорова и Лузина

## 9. Интеграл Лебега для конечно-простых функций и его свойства

Определение интеграла Лебега в общем случае. Основные свойства интеграла Лебега.

Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (теорема Б.Леви, лемма Фату, теорема Лебега). Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры. Неравенство Чебышева. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Введение в теорию вероятностей и ее приложения [Текст] : в 2 т : учеб. пособие для вузов. Т. 1 / В.Феллер ; пер. с пересмотр. 3-го англ. изд. Ю. В. Прохорова ; [придесл. А. Н. Колмогорова] .— М. : Мир, 1984 .— 528 с.
2. Вероятность [Текст]. В 2 т. Т. 1. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы : учебник для вузов / А. Н. Ширяев .— 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МЦНМО, 2007, 2011 .— 552 с. - Библиогр.: с. 527-533. - Предм. указ.: с. 534-547. - ISBN 978-5-94057-752-2 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

### **Дополнительная литература**

1. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : Основные структуры алгебры : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2009, 2012 .— 272 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru/>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	И.Г. Эрлих, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Основы вероятности и теория меры» обучающийся должен:

### знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

### уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в теории вероятностей в устной и письменной форме.

### владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- ☐ предметным языком теории вероятностей и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Пример контрольной работы и коллоквиума приведены в приложении, отдельным файлом

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена:

1. Определение вероятностного пространства. Дискретное вероятностное пространство. Классическая вероятность.
2. Геометрические вероятности.
3. Условная вероятность.
4. Формулы полной вероятности.
5. Независимость событий, виды и взаимосвязь.
6. Независимость случайных величин. Распределение.
7. Математическое ожидание, дисперсия, ковариация, корреляция. Свойства.
8. Схема испытаний Бернулли.
9. Математическая модель, предельные теоремы: Пуассона.
10. Математическая модель, предельные теоремы: Муавра-Лапласа.
11. Системы множеств: Полукольца, кольца, алгебры, сигма-алгебры. Понятие наименьшего кольца, алгебры, сигма-алгебры, содержащей систему множеств.
12. Классическая мера Лебега на полукольце промежутков и ее сигма-аддитивность.
13. Внешние меры Лебега и Жордана. Мера Лебега.
14. Свойства. Сигма-алгебра измеримых множеств. Сигма-аддитивность меры Лебега на сигма-алгебре измеримых множеств.
15. Теоремы о связи непрерывности и сигма-аддитивности. Мера Бореля. Меры Лебега-Стилтьеса на прямой и их сигма-аддитивность. Сигма-конечные меры.
16. Неизмеримые множества. Теорема о структуре измеримых множеств.
17. Измеримые функции. Их свойства. Измеримые функции и предельный переход.
18. Множество Кантора и кривая Кантора. Теорема о существовании композиции измеримой от непрерывной, не являющейся измеримой функцией.
19. Сходимость по мере и почти всюду.
20. Критерий Коши сходимости по мере, арифметические, связь сходимостей, Теорема Рисса.
21. Теоремы Егорова и Лузина.
22. Интеграл Лебега для конечно-простых функций и его свойства.
23. Определение интеграла Лебега в общем случае. Основные свойства интеграла Лебега.
24. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега (теорема Б. Леви, лемма Фату, теорема Лебега).
25. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Критерий интегрируемости по Лебегу на множестве конечной меры.
26. Неравенство Чебышева.
27. Связь между интегралами Римана и Лебега на отрезке.

Билет 1:

1. Формулы полной вероятности.
2. Сходимость по мере и почти всюду.

Билет 2:

1. Определение вероятностного пространства. Дискретное вероятностное пространство. Классическая вероятность..
2. Математическая модель, предельные теоремы: Муавра-Лапласа.

Критерии оценивания



- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

Задачи коллоквиума  
Системы множеств

Верхним пределом последовательности множеств  $A_1, A_2, \dots$  называется множество всех элементов, которые принадлежат бесконечному набору множеств  $A_n$ , а нижним пределом – множество всех элементов, которые принадлежат всем множествам  $A_n$ , начиная с некоторого номера (своего для каждого элемента). Верхний предел обозначают  $\overline{\lim}_n A_n$ , нижний предел обозначают  $\underline{\lim}_n A_n$ . Если  $\overline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n A_n$ , то это множество называют пределом последовательности  $A_1, A_2, \dots$  и обозначают  $\lim_n A_n$ .

Последовательность множеств  $A_1, A_2, \dots$  называется возрастающей, если  $A_n \subset A_{n+1}$  для всех  $n$ , и убывающей если  $A_{n+1} \subset A_n$  для всех  $n$ .

1. (а) Доказать, что

$$\overline{\lim}_n A_n = \bigcap_n \left( \bigcup_{k \geq n} A_k \right) \quad \underline{\lim}_n A_n = \bigcup_n \left( \bigcap_{k \geq n} A_k \right)$$

- (b) Доказать, что если последовательность множеств  $\{A_n\}$  монотонна, то

$$\overline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n A_n.$$

При этом  $\lim_n A_n = \bigcup_n A_n$ , если  $A_n$  возрастают, и  $\lim_n A_n = \bigcap_n A_n$ , если  $A_n$  убывают.

- (с) Привести пример последовательности  $A_1, A_2, \dots$ , что  $\overline{\lim}_n A_n \neq \underline{\lim}_n A_n$ .  
Доказать, что

$$\overline{\overline{\lim}_n A_n} = \underline{\lim}_n \overline{A_n}.$$

2. Пусть  $f : A \rightarrow B$  — отображение множеств,  $\mathfrak{A}$  — система подмножеств множества  $A$ ,  $\mathfrak{B}$  — система подмножеств множества  $B$ . Положим

$$f(\mathfrak{A}) = \{f(X) \subset B : X \in \mathfrak{A}\}$$

$$f^{-1}(\mathfrak{B}) = \{f^{-1}(Y) \subset A : Y \in \mathfrak{B}\}.$$

- (а) Показать, что  $f(\mathfrak{A})$ , вообще говоря, не обязано быть кольцом, если  $\mathfrak{A}$  — кольцо.  
(b) Доказать, что если  $\mathfrak{B}$  — кольцо ( $\sigma$ -алгебра), то  $f^{-1}(\mathfrak{B})$  — кольцо ( $\sigma$ -алгебра).

3. Являются ли следующие системы полукольцом, кольцом, алгеброй:
  - (a) Полуинтервалы:  $S = \{[\alpha; \beta) \mid \alpha, \beta \in R\}$ ;
  - (b) Все конечные подмножества натуральных чисел;
  - (c) Все измеримые по Жордану подмножества отрезка  $[0, 1]$ ;
  - (d) Все открытые множества на прямой.
4. Доказать, что набор множеств, замкнутый относительно операций
  - a)  $\cap$  и  $\cup$ ; b)  $\cap$  и  $\setminus$  может не быть кольцом.
5. Докажите, что  $S$  является алгеброй с единицей  $\Omega$  тогда и только тогда, когда  $\Omega \in S$  и для любых  $A, B \in S$  верно  $\overline{A} \in S$  и  $A \cup B \in S$ .
6. Пусть  $\mathfrak{B}_1$  и  $\mathfrak{B}_2$  — две  $\sigma$ -алгебры с единицей  $\Omega$ . Являются ли  $\sigma$ -алгебрами классы множеств: 1)  $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ ; 2)  $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ ; 3)  $\mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}_2$ ; 4)  $\mathfrak{B}_1 \triangle \mathfrak{B}_2$ .
7. Доказать, что всякая конечная  $\sigma$ -алгебра подмножеств пространства  $\Omega$  порождается некоторым конечным разбиением  $\Omega$ . Доказать, что мощность всякой конечной сигма-алгебры является степенью двойки.
8. Есть поток сигма-алгебр  $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ . Является ли  $\sigma$ -алгеброй объединение всех этих систем?

### Мера

1. Построить пример полукольца  $S$  и такой функции  $\varphi : S \rightarrow [0; +\infty)$ , что для любых  $A, B \in S$  с  $A \cap B = \emptyset$  и  $C = A \sqcup B \in S$  выполнено равенство  $\varphi(C) = \varphi(A) + \varphi(B)$ , но  $\varphi$  — не мера на  $S$ .
2. Пусть  $m$  — мера на полукольце  $S$ . Докажите, что
  - (a) если множества  $A$  и  $B$  принадлежат  $S$  и  $B \subseteq A$ , то  $m(B) \leq m(A)$ .
  - (b)  $m(\emptyset) = 0$ .
  - (c) если множества  $A$ ,  $B$  и  $A \cup B$  принадлежат  $S$ , то  $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$ . Вывести аналог формулы включения-исключения.
  - (d) если множества  $A$ ,  $B$  и  $A \triangle B$  принадлежат  $S$  и  $m(A \triangle B) = 0$ . Доказать, что  $m(A) = m(B)$ .
3. (a) Пусть  $S$  — полукольцо с мерой  $m$ , а  $S_1 = \{A \in S : m(A) = 0\}$ . Доказать, что  $S_1$  — полукольцо.

(b) Пусть  $R$  — кольцо с мерой  $m$ , а  $R_1 = \{A \in S : m(A) = 0\}$ . Доказать, что  $R_1$  — кольцо.

(c) Пусть  $A$  — алгебра с мерой  $m$ , а  $A_1 = \{A \in S : m(A) = 0\}$ . Верно ли, что  $A_1$  — алгебра.

4. Пусть  $m$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на полукольце  $S$ , множества  $A, A_1, \dots, A_i, \dots$  принадлежат  $S$ , причем  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

Это свойство меры называется *непрерывностью*.

5. Пусть  $m$  — мера на кольце  $R$  и для любых таких множеств  $A, A_1, \dots, A_i, \dots$  из  $R$ , что  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

выполнено равенство

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

Доказать, что  $m$  —  $\sigma$ -аддитивная мера.

Показать, что это утверждение может не быть справедливым для меры на полукольце.

6. Построить пример меры на полукольце, которая не является  $\sigma$ -аддитивной.

7. Пусть  $m$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на полукольце  $S$ , множества  $A, A_1, \dots, A_i, \dots$  принадлежат  $S$ , причем  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  и

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

8. Пусть  $m$  — мера на кольце  $R$  и для любых таких множеств  $A, A_1, \dots, A_i, \dots$  из  $R$ , что  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  и

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

выполнено равенство

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

Доказать, что  $m$  —  $\sigma$ -аддитивная мера.

Показать, что это утверждение может не быть справедливым для меры на полукольце.

9. Показать, что в случае  $\sigma$ -конечной меры понятия непрерывности и  $\sigma$ -аддитивности не равносильны.

Внешняя мера. Мера Лебега.

Обозначения. Пусть  $S$  — полукольцо с единицей  $X$ , а  $m$  — конечная  $\sigma$ -аддитивная мера на  $S$ . Пусть  $\nu$  — продолжение меры  $m$  на минимальное кольцо  $R(S)$ . Для произвольного  $A \subseteq X$  определим *верхнюю меру Жордана, порожденную мерой  $m$* , формулой

$$\mu_J^* = \inf_{A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i} \sum_{i=1}^n m(A_i),$$

и *верхнюю меру Лебега, порожденную мерой  $m$* , формулой

$$\mu^* = \inf_{A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Скажем, что множество  $A \subseteq X$  *измеримо по Лебегу (по Жордану)*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое множество  $A_\varepsilon$ , что  $\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$  (соответственно  $\mu_J^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$ ). Обозначим  $\mathfrak{M}$  — множество измеримых по Лебегу множеств на  $X$ .  $\mathfrak{M}_J$  — множество измеримых по Жордану множеств на  $X$ .

Для множества  $A \in \mathfrak{M}$  его *мерой Лебега* называется  $\mu(A) = \mu^*(A)$ . Для меры Жордана аналогично.

В случае, когда  $S$  — полукольцо промежутков из замкнутого параллелепипеда  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ , а мера  $m$  — классическая (объем), мы будем и соответствующие меры и верхние меры называть *классическими*.

1. Доказать, что если вопреки определению верхней меры, мера  $m$  не  $\sigma$ -аддитивна, то найдется множество  $A \in S$ , для которого  $\mu^*(A) < m(A)$ .
2. Пусть  $A \subseteq X$  и  $B \subseteq X$ . Доказать, что  $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$ .
3. Пусть  $A \subseteq X$  и  $B \subseteq X$ . Докажите, что

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

4. Докажите, что если множество  $E \subseteq \mathbb{R}$  измеримо, то для любого  $A \subseteq \mathbb{R}$  выполнено

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

5. Доказать, что в случае классической меры Жордана система  $\mathfrak{M}_J$  не является  $\sigma$ -алгеброй. Привести пример меры  $m$ , когда она является  $\sigma$ -алгеброй.
6. Построить такие неизмеримые относительно классической меры Лебега на  $[0;1]$  множества  $A_1$  и  $A_2$ , что  $A_1 \cup A_2$  измеримо.
7. Пусть  $A \in \mathfrak{M}$ ,  $\mu(A) = 0$  и  $B \subset A$ . Доказать, что  $B \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(B) = 0$ . (Т.е. докажите полноту меры Лебега).
8. Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0,1]$ . Построить такую последовательность  $\{A_i\}$  множеств из  $\mathfrak{M}$ , что

$$\mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) < \varliminf_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

### Измеримые функции

Обозначения.

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A; \end{cases}$$

1. Доказать (не опираясь на критерий измеримости), что если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  измеримы, то и множество  $\{x : f(x) < g(x)\}$  измеримо. Получить отсюда, что  $f(x) + g(x)$  — измеримая функция.
2. Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \subseteq X$  и  $f(x) = \mathbb{I}_A(x)$ . Доказать, что  $f(x)$  измерима на  $X$  тогда и только тогда, когда  $A \in M$ .
3. Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0;1]$ . Построить такую неизмеримую функцию  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , что для любого  $c \in \mathbb{R}$  множество  $f^{-1}(\{c\})$  измеримо.
4. Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  — некоторое всюду плотное множество в  $\mathbb{R}$ , а функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что для каждого  $n$  множество

$$f^{-1}((a_n, +\infty)) \in M.$$

Доказать, что  $f(x)$  измерима на  $X$ .

5. Построить функцию  $f(x)$  на  $[0;1]$ , измеримую на  $[0;1]$  относительно классической меры Лебега, но разрывную в каждой точке.

6. Пусть  $(X, M, \mu)$  — полное измеримое пространство (т.е. мера  $\mu$  полна), а  $f(x)$  — измеримая функция на  $A$ . Пусть  $g(x)$  — функция, эквивалентная  $f(x)$ . Доказать, что  $g(x)$  — измеримая функция.
7. Пусть  $[a; b] \subset \mathbb{R}$  и функция  $f(x)$  монотонна на  $[a; b]$ . Доказать, что  $f(x)$  измерима относительно классической меры Лебега на  $[a; b]$ .
8. Построить такую функцию  $f(x) \in C[0; 1]$ , что для некоторого измеримого  $A \subset [0; 1]$  меры нуль множество  $f(A)$  — измеримо и  $\mu(f(A)) > 0$ , где  $\mu$  — классическая мера Лебега.
9. Построить такую строго возрастающую функцию  $f(x) \in C([0; 1])$ , что для некоторого измеримого множества  $A \subset [0; 1]$  меры нуль множество  $f(A)$  измеримо и  $\mu(f(A)) > 0$ , где  $\mu$  — классическая мера Лебега.
10. Построить функцию  $f(x) \in C([0; 1])$  и измеримое множество  $A \subset \mathbb{R}$ , для которых множество  $f^{-1}(A)$  неизмеримо относительно классической меры Лебега.
11. Построить такую  $g(x) \in C([0; 1])$ , что для некоторого измеримого  $A \subset [0; 1]$  с  $\mu(A) = 0$  множество  $g(A)$  неизмеримо относительно классической меры Лебега.
12. Построить множество  $A \subset [0; 1]$ , которое измеримо относительно классической меры Лебега, но не является борелевским.

### Сходимость

1. Определим функцию  $f(x)$  на отрезке  $[0; 1]$  следующим образом. Если  $x = \overline{0, n_1 n_2 n_3 \dots}$  — десятичная запись числа  $x$ , то  $f(x) = \max_i n_i$ . Доказать, что  $f(x)$  измерима и почти всюду постоянна.
2. Показать, что вообще говоря из сходимости п.в. не следует сходимость по мере в случае, когда мера  $\sigma$ -конечна.
3. Пусть последовательность неотрицательных функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится по мере к  $f(x)$  на  $A$ . Доказать, что  $f(x) \geq 0$  п.в. на  $A$ .
4. Пусть  $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Доказать, что последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = r_n \\ \frac{1}{\sqrt{n(x-r_n)}}, & \text{если } x \in [0; 1] \setminus \{r_n\} \end{cases}$$

где  $n \in \mathbb{N}$ , сходится по классической мере Лебега на  $[0; 1]$ .

5. Пусть  $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \left\{ r_n = \frac{p_n}{q_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $p_n$  и  $q_n$  — взаимно простые натуральные числа,  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $f_n(x) = e^{-(p_n - q_n x)^2}$ , сходится по классической мере Лебега на  $[0,1]$ , но не сходится ни в одной точке.
6. Показать, что утверждение теоремы Егорова не выполняется для классической меры Лебега на  $\mathbb{R}$ .

### Интеграл Лебега

1. Поймите, что функция  $f(x) = \mathbb{I}(x \in \mathbb{Q})$  интегрируема на  $\mathbb{R}$ , найдите величину интеграла.
2. Пусть  $f(x) = \frac{1}{x}$  и  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $(0; 1)$ . Доказать, что

$$\int_0^1 f(x) d\mu = \infty,$$

используя только определение интеграла Лебега.

3. Верно ли, что функция  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  интегрируема по Лебегу на прямой?
4. Пусть  $f(x)$  интегрируема по Лебегу на множестве  $A$  (т.е.  $\int_A |f(x)| d\mu < \infty$ , будем писать  $f \in L_1(A)$ ). Доказать, что  $\mu(\{x \in A : f(x) = \pm\infty\}) = 0$ .
5. Построить такую последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  неотрицательных функций из  $L_1([0; 1])$ , таких что  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in [0; 1]$ , но

$$\int_0^1 f_n(x) d\mu \not\rightarrow 0, \rightarrow \infty.$$



## Контрольная работа 1

1. В одной урне содержится 1 белый и 3 черных шара, а в другой урне — 3 белых и 3 черных шара. В третью урну кладут два шара, случайно выбранных из первой урны, и два шара, случайно выбранных из второй. а) Какова вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, будет белым? б) Какова вероятность того, что в третью урну из первой переложили 2 черных шара, если шар, извлеченный из третьей урны, оказался черным?
2. Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы и имеют геометрическое распределение с одинаковым параметром  $p$ . ( $P\{\xi = k\} = q^k p$ ,  $p + q = 1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ )

Доказать, что

$$P\{\xi = k | \xi + \eta = n\} = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

3. Староста 694 группы заметила, что семинарист приходит на занятия со случайным опозданием в пределах 15 мин., при этом он разрешает проходить в аудиторию только тем студентам, которые пришли после него не позднее 5 мин. Староста же решила опоздать на семинар, но выбрала себе границу случайного опоздания всего в 10 мин. и время ожидания семинариста тоже 10 мин. Какова вероятность того, что она все же посетит семинар.
4. Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы и пуассоновски распределены с параметром  $\lambda > 0$ . Найти  $P(|\xi - \eta| > 1)$ .
5. Случайная величина  $\xi$  имеет пуассоновское распределение с параметрами  $\lambda$ . Найти математическое ожидание и дисперсию величины  $e^\xi$ .

## Контрольная работа 1

1. В одной урне содержится 1 белый и 3 черных шара, а в другой урне — 3 белых и 3 черных шара. В третью урну кладут два шара, случайно выбранных из первой урны, и два шара, случайно выбранных из второй. а) Какова вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, будет белым? б) Какова вероятность того, что в третью урну из первой переложили 2 черных шара, если шар, извлеченный из третьей урны, оказался черным?
2. Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы и имеют геометрическое распределение с одинаковым параметром  $p$ . ( $P\{\xi = k\} = q^k p$ ,  $p + q = 1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ )

Доказать, что

$$P\{\xi = k | \xi + \eta = n\} = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

3. Староста 694 группы заметила, что семинарист приходит на занятия со случайным опозданием в пределах 15 мин., при этом он разрешает проходить в аудиторию только тем студентам, которые пришли после него не позднее 5 мин. Староста же решила опоздать на семинар, но выбрала себе границу случайного опоздания всего в 10 мин. и время ожидания семинариста тоже 10 мин. Какова вероятность того, что она все же посетит семинар.
4. Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы и пуассоновски распределены с параметром  $\lambda > 0$ . Найти  $P(|\xi - \eta| > 1)$ .
5. Случайная величина  $\xi$  имеет пуассоновское распределение с параметрами  $\lambda$ . Найти математическое ожидание и дисперсию величины  $e^\xi$ .