

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор института нано-, био-,  
информационных, когнитивных  
и социогуманитарных наук и  
технологий**

**Т.Е. Григорьев**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Функциональный анализ
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Термоядерная энергетика и плазменные технологии Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 90 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: И.А. Шейпак, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 20.03.2021

## Аннотация

Целью настоящего курса является изучение теоретических основ функционального анализа и теории функций действительной переменной, получение практических навыков решения простейших задач, овладение методами решения прикладных задач методами функционального анализа для успешного освоения дисциплин, базирующихся на основе функционального анализа.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- освоение студентами фундаментальных знаний в области функционального анализа, изучение способов решения задач методами функционального анализа.

#### Задачи дисциплины

- формирование базовых знаний в области функционального анализа как дисциплины, интегрирующей общематематическую подготовку прикладных математиков и физиков и обеспечивающей технологические основы современных инновационных сфер деятельности;
- обучение студентов принципам применения основных понятий функционального анализа.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований, и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- место и роль общих вопросов науки в научных исследованиях;
- современные проблемы физики, химии, математики и роль функционального анализа в них;
- теоретические модели функционального анализа в математике и в фундаментальных процессах и явлений в физике и ее приложениях;
- принципы симметрии и законы сохранения;
- новейшие открытия естествознания;
- постановку проблем функционального анализа ;
- о взаимосвязях и фундаментальном единстве естественных наук.

уметь:

- эффективно использовать на практике теоретические компоненты науки: понятия, суждения, умозаключения, законы;
- представить панораму универсальных методов и законов современного естествознания;
- работать на современном экспериментальном оборудовании;
- абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций;
- планировать оптимальное проведение эксперимента.

владеть:

- планированием, постановкой и обработкой результатов физического эксперимента методами функционального анализа;
- научной картиной мира;
- навыками самостоятельной работы в лаборатории на современном экспериментальном оборудовании.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Метрические и нормированные пространства.	1	1		5
2	Спектр оператора.	2	1		5
3	Гильбертовы пространства.	2	1		5
4	Компактные множества в метрических пространствах.	2	1		10
5	Компактные операторы. Теория Фредгольма.	4	1		5
6	Линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах.	2	1		5
7	Неограниченные операторы.	2	1		5
8	Обобщённые функции и действия с ними.	3	1		10
9	Основные понятия теории меры. Интеграл Лебега.	2	1		10
10	Преобразование Фурье.	5	1		10
11	Сходимости в нормированных пространствах. Теорема Банаха Штейнгауза.	3	3		10
12	Теорема Хана-Банаха и следствия из неё.	2	2		10
Итого часов		30	15		90
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

## 1. Метрические и нормированные пространства.

Метрические пространства. Нормированные и банаховы пространства. Теорема о пополнении метрических пространств. Сепарабельность.

Свойства полных метрических пространств. Теорема о вложенных шарах, теорема о сжимающих отображениях.

## 2. Спектр оператора.

Теорема Банаха. Обратимость оператора близкого к обратимому. Представление резольвенты в виде ряда. Спектральный радиус. Спектр и резольвентное множество ограниченного оператора. Свойства спектра (ограниченность, замкнутость, непустота). Непрерывный, точечный, остаточный спектры. Сопряженный оператор. Спектр сопряженного оператора. Свойства спектра самосопряженного оператора. Квадратичная форма самосопряженного оператора. Спектральный радиус самосопряженного оператора и норма самосопряженного оператора. Спектральный радиус интегрального оператора с треугольным ядром. Унитарные операторы. Спектр унитарного оператора. Подобные операторы. Связь спектров подобных операторов. Подобные операторы в  $l_2(Z)$  и  $L_2(0, 2\pi)$ . Унитарно-подобные операторы в  $L_2(R)$ .

## 3. Гильбертовы пространства.

Теорема об ортогональном дополнении. Ортонормированные системы. Полные, замкнутые системы.

Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. Эквивалентность моделей Шредингера и Гейзенберга.

## 4. Компактные множества в метрических пространствах.

Предкомпактные и компактные множества. Критерий Хаусдорфа предкомпактности.

Теорема Арцела и признаки предкомпактности в различных пространствах.

Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном банаховом пространстве.

## 5. Компактные операторы. Теория Фредгольма.

Компактные операторы. Операции над операторами, не нарушающие компактность. Свойства компактных операторов. Компактность интегральных операторов в пространствах  $C[a, b]$  и  $L_p(a, b)$ .

Теорема Гильберта-Шмидта о полноте множества собственных векторов компактного самосопряженного оператора. Пример линейного непрерывного оператора с незамкнутым образом. Замкнутость образа оператора  $I - A$ , где  $A$  - компактный оператор. Теоремы Фредгольма. Теорема о связи компактности оператора с компактностью сопряженного оператора (в гильбертовом пространстве).

## 6. Линейные операторы и функционалы в нормированных пространствах.

Линейные отображения. Норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Полнота пространства  $B(X, Y)$ , где  $Y$  -- банахово.

## 7. Неограниченные операторы.

Примеры неограниченных операторов. Понятие области определения оператора. Теорема Хеллингера-Теплица. Оператор гармонического осциллятора как оператор из  $H_1(R)$  в  $H_{-1}(R)$ . Его спектр.

## 8. Обобщённые функции и действия с ними.

Функции из  $L_1, \text{loc}(\mathbb{R})$  и их производные по Соболеву. Производная обобщенной функции, умножение на гладкую функцию, замена переменных. Пространства обобщенных функций  $D'$  и  $S'$ .

#### 9. Основные понятия теории меры. Интеграл Лебега.

Основные понятия теории меры: полукольцо, кольцо, алгебра,  $\sigma$ -алгебра множеств. Мера, счетно-аддитивная мера. Измеримые по Лебегу множества, измеримые функции. Мера Лебега--Стилтьеса, дискретная мера.

Конструкция интеграла Лебега. Основные свойства интеграла Лебега. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла: Б.Леви, Лебега, Фату. Пространства  $L_p(a,b)$ . Неравенство Гёльдера, неравенство Минковского.

#### 10. Преобразование Фурье.

Преобразование Фурье в пространстве  $L_1(\mathbb{R})$  и его свойства. Преобразование Фурье в пространствах  $S$  и  $L_2(\mathbb{R})$ . Теорема Планшереля. Преобразование Фурье в  $S'$ .

#### 11. Сходимости в нормированных пространствах. Теорема Банаха Штейнгауза.

Слабо сходящиеся последовательности. Примеры. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабо ограниченные множества.

Слабая компактность. Теорема о слабой компактности единичного шара в сепарабельном гильбертовом пространстве. Пример последовательности элементов единичной сферы, слабо сходящейся к нулю.

#### 12. Теорема Хана-Банаха и следствия из неё.

Сопряженные пространства. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала.

Следствия из теоремы Хана-Банаха. Изометричность вложения пространства во второе сопряженное. Рефлексивные пространства. Сопряженное пространство к  $C(a,b)$ .

Общий вид линейного непрерывного функционала в пространствах  $L_p(a,b)$  и  $l_p$ , при  $1 \leq p < \infty$ .

Изоморфизм гильбертова пространства своему сопряженному. Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.

### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

### 6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

Фонд литературы кафедры

1. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин Элементы теории функций и функционального анализа. - 7-е изд. - М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012. - 572 с.
2. М.Рид, Б.Саймон «Методы современной математической физики» т.1 «Функциональный анализ», Москва, "Мир", 1977.
3. М.Рид, Б. Саймон «Методы современной математической физики», т.2 «Гармонический анализ. Самосопряженность», Москва, "Мир", 1978.
4. Л.В.Канторович, Т.П.Акилов «Функциональный анализ», Москва, "Наука", 1977.
5. А.А.Кириллов, А.Д.Гвишиани «Теоремы и задачи функционального анализа», Москва, «Наука», 1988.
6. Богачев В.И., Смолянов О.Г. «Действительный и функциональный анализ: университетский курс», РХД, 2009.

1. В.В.Власов, С.П.Коновалов, С.В.Курочкин «Задачи по функциональному анализу», Издательство МФТИ, 2000
- 2 П.А.Бородин, А.М.Савчук, И.А.Шейпак «Задачи по функциональному анализу», Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010.

**7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются персональные компьютеры с доступом в интернет.  
Microsoft Office, Adobe Rider.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Для успешного освоения курса, помимо посещения лекций и семинаров, от студентов требуется самостоятельная работа в объеме не менее чем те часы, которые указаны для каждого раздела программы. В основном, это время отводится на самостоятельное решение задач, входящих в четыре контрольные работы. Самостоятельные занятия включают в себя также повторение материала лекций, семинарских занятий и подготовку к контрольным работам, которые проводятся для текущего контроля за усвоением материала.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Термоядерная энергетика и плазменные технологии Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	И.А. Шейпак, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований, и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Функциональный анализ» обучающийся должен:

### знать:

- место и роль общих вопросов науки в научных исследованиях;
- современные проблемы физики, химии, математики и роль функционального анализа в них;
- теоретические модели функционального анализа в математике и в фундаментальных процессах и явлений в физике и ее приложениях;
- принципы симметрии и законы сохранения;
- новейшие открытия естествознания;
- постановку проблем функционального анализа ;
- о взаимосвязях и фундаментальном единстве естественных наук.

### уметь:

- эффективно использовать на практике теоретические компоненты науки: понятия, суждения, умозаключения, законы;
- представить панораму универсальных методов и законов современного естествознания;
- работать на современном экспериментальном оборудовании;
- абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций;
- планировать оптимальное проведение эксперимента.

### владеть:

- планированием, постановкой и обработкой результатов физического эксперимента методами функционального анализа;
- научной картиной мира;
- навыками самостоятельной работы в лаборатории на современном экспериментальном оборудовании.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.



### **3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков**

Промежуточная аттестация по дисциплине «Функциональный анализ» осуществляется в форме дифференцированного зачета. Дифференцированный зачет проводится в устной форме.

#### **Перечень контрольных вопросов для сдачи дифференцированного зачета в 5 семестре:**

1. Метрические пространства. Нормированные и банаховы пространства. Теорема о пополнении метрических пространств. Сепарабельность.
2. Свойства полных метрических пространств. Теорема о вложенных шарах, теорема о сжимающих отображениях. Основные понятия теории меры: полукольцо, кольцо, алгебра,  $\sigma$ -алгебра множеств. Мера, счетно-аддитивная мера. Измеримые по Лебегу множества, измеримые функции. Мера Лебега--Стилтьеса, дискретная мера.
3. Конструкция интеграла Лебега. Основные свойства интеграла Лебега. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла: Б.Леви, Лебега, Фату. Пространства  $L_p(a,b)$ . Неравенство Гёльдера, неравенство Минковского. Теорема об ортогональном дополнении. Ортонормированные системы. Полные, замкнутые системы.
4. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. Эквивалентность моделей Шредингера и Гейзенберга.
5. Предкомпактные и компактные множества. Критерий Хаусдорфа предкомпактности.
6. Теорема Арцела и признаки предкомпактности в различных пространствах.
7. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном банаховом пространстве.
8. Линейные отображения. Норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов. Полнота пространства  $B(X,Y)$ , где  $Y$  -- банахово.
9. Сопряженные пространства. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала.
10. Следствия из теоремы Хана-Банаха. Изометричность вложения пространства во второе сопряженное. Рефлексивные пространства. Сопряженное пространство к  $C(a,b)$ .
11. Общий вид линейного непрерывного функционала в пространствах  $L_p(a,b)$  и  $l_p$ , при  $1 \leq p < \infty$ .
12. Изоморфизм гильбертова пространства своему сопряженному. Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.
13. Слабо сходящиеся последовательности. Примеры. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабо ограниченные множества.
14. Слабая компактность. Теорема о слабой компактности единичного шара в сепарабельном гильбертовом пространстве. Пример последовательности элементов единичной сферы, слабо сходящейся к нулю.
15. Теорема Банаха. Обратимость оператора близкого к обратимому. Представление резольвенты в виде ряда. Спектральный радиус.
16. Спектр и резольвентное множество ограниченного оператора. Свойства спектра (ограниченность, замкнутость, непустота). Непрерывный, точечный, остаточный спектры. Сопряженный оператор.

17. Спектр сопряженного оператора. Свойства спектра самосопряженного оператора. Квадратичная форма самосопряженного оператора. Спектральный радиус самосопряженного оператора и норма самосопряженного оператора.
18. Спектральный радиус интегрального оператора с треугольным ядром. Унитарные операторы. Спектр унитарного оператора. Подобные операторы. Связь спектров подобных операторов. Подобные операторы в  $l_2(Z)$  и  $L_2(0,2\pi)$ . Унитарно-подобные операторы в  $L_2(R)$ .
19. Компактные операторы. Операции над операторами, не нарушающие компактность. Свойства компактных операторов. Компактность интегральных операторов в пространствах  $C[a,b]$  и  $L_p(a,b)$ .
20. Теорема Гильберта-Шмидта о полноте множества собственных векторов компактного самосопряженного оператора. Пример линейного непрерывного оператора с незамкнутым образом. Замкнутость образа оператора  $I-A$ , где  $A$  - компактный оператор. Теоремы Фредгольма. Теорема о связи компактности оператора с компактностью сопряженного оператора (в гильбертовом пространстве).
21. Функции из  $L_1,loc(R)$  и их производные по Соболеву. Производная обобщенной функции, умножение на гладкую функцию, замена переменных. Пространства обобщенных функций  $D'$  и  $S'$ .
22. Преобразование Фурье в пространстве в  $L_1(R)$  и его свойства. Преобразование Фурье в пространствах  $S$  и  $L_2(R)$ . Теорема Планшереля. Преобразование Фурье в  $S'$ .
23. Примеры неограниченных операторов. Понятие области определения оператора. Теорема Хеллингера-Теплица. Оператор гармонического осциллятора как оператор из  $H_1(R)$  в  $H^{-1}(R)$ . Его спектр.

#### 4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо

		знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должны превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся оценку, в соответствии с вышеприведенными критериями.