Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Директор института нано-, био-, информационных, когнитивных и социогуманитарных наук и технологий
Т.Е. Григорьев

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Стохастические процессы
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Термоядерная энергетика и плазменные технологии
	Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова
	Кафедра математики и математических методов физики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:
лекции: 30 час.
семинары: 30 час.
лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: А.М. Башаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 20.03.2023

Аннотация

Теория стохастических, иначе говоря, случайных процессов является важнейшим разделом современной теории вероятностей. Речь идет о построении и изучении моделей, описывающих динамику развития случайных явлений в пространстве и времени. Тем самым даются ответы на запросы многих естественно-научных, экономических и социальных наук.

В начале курса даются примеры интересных для приложения моделей, которые можно построить, отправляясь от последовательностей независимых случайных величин с заданными распределениями.

Наряду с фундаментальной теоремой Колмогорова о согласованных распределениях используются различные явные конструкции таких важных для теории и приложений процессов, как пуассоновский (модель счётчика Гейгера или же простейшая модель наступления страховых случаев) и винеровский (модель одномерного броуновского движения). Упомянутые процессы с интересными свойствами траекторий входят в класс процессов, имеющих независимые приращения.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- познакомить студентов с основными идеями и понятиями, необходимыми для построения стохастических моделей разнообразных процессов, вычислительных алгоритмов и открытых систем;
- дать инструментарий для описания случайных процессов в терминах классических стохастических дифференциальных уравнений;
- познакомить с базовыми случайными процессами – винеровским, пуассоновским и процессами Леви;
- ознакомить с субординированными случайными процессами как моделями немарковских процессов;
- ознакомить с новыми математическими понятиями, возникающими при описании базовых случайных процессов, такими как дробные производные и интегралы, их свойствами, фрактальными объектами.

Задачи дисциплины

- научить студентов составлять и решать классические стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), понимать базовые понятия и представления, лежащие в их основе, научить получать из СДУ детерминированные дифференциальные уравнения для основных характеристик открытых систем;
- научить моделировать решения детерминированных уравнений случайными уравнениями;
- научить рассчитывать основные вероятностные характеристики случайных процессов, строить случайные модели разнообразных явлений и систем;

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия теории вероятности – сигма- и борелевские алгебры, измеримые пространства, вероятностную меру, вероятностное и полное вероятностное пространства, пространство состояний, измеримые функции, случайные величины и функции, математическое ожидание и дисперсию случайной величины, условную математическое ожидание и условную вероятность относительно сигма-алгебры, функцию распределения вероятности и плотность функции распределения, совместные и условные вероятности;
- основные понятия теории стохастических процессов - марковские процессы, сепарабельные процессы, сечение и траектория случайного процесса, теорема Колмогорова;
- основные понятия современной теории стохастических процессов - информационный поток (фильтрация), неупреждающий процесс, история процесса, модифицированные, неразличимые и регулярные (cadlag) случайные процессы, марковское время (время остановки), мартингалы, суб и супер мартингалы, функции ограниченной вариации;
- основные понятия и представления центральных предельных теорем - сходимость почти наверное (п.н.), стохастический предел, или предел по вероятности, сходимость в среднем порядка , предел по распределению, слабую сходимость, взаимосвязь различных пределов, свойства характеристической функции, характеристическую функцию для гауссовского распределения, теорему о непрерывности; центральную предельную теорему для одинаково распределенных случайных величин, связь с ренорм-групповым подходом, ренорм-групповое преобразование, неподвижную точку, анализ устойчивости, центральную предельную теорему для одинаково распределенных случайных величин в случае бесконечной дисперсии;
- уравнение Чемпена-Колмогорова-Смолуховского, обобщенное уравнение Фоккера-Планка, математическое определение непрерывного марковского процесса, частные случаи обобщенного уравнения Фоккера-Планка - управляющее уравнение, диффузионные процессы, уравнение Фоккера-Планка; детерминированные процессы и уравнение Лиувилля как частный случай обобщенного уравнения Фоккера-Планка; обобщенное уравнение Фоккера-Планка как кинетическое уравнение при классическом и квантовом описании;
- стационарные марковские процессы - эргодические свойства стационарного процесса, измерения среднего значения, автокорреляционной функции, спектра, теорему Винера-Хинчина, измерение функции распределения; однородные марковские процессы и их физическую интерпретацию, автокорреляционную функцию марковских процессов;
- основные представления о винеровском процессе - нерегулярность и недифференцируемость траекторий, независимость приращений, автокорреляционные функции;
- основные представления о процесс Орнштейна – Уленбека - корреляционные функции, гауссовость, стационарное решение, использование в качестве модели реального шумового сигнала;
- основные представления винеровских стохастических дифференциальных уравнений - обоснование уравнений типа Ланжевена, белый шум, аппроксимации белого шума, роль центральной предельной теоремы, свойство марковости интеграла от белого шума; определение стохастического интеграла, интегралы Ито и Стратоновича для частного случая; свойства стохастического интеграла Ито (существование. интегрирование многочленов, правила дифференцирования, средние значения, формула для корреляции);
- решения и преобразования винеровских стохастических дифференциальных уравнений - приближенное решение методом Коши – Эйлера (условия существования и единственности решения на интервале, марковское свойство решения стохастического дифференциального уравнения Ито), замена переменных (формула Ито), другой подход к формуле Ито, правило дифференцирования Ито, связь между уравнением Фоккера - Планка и стохастическим дифференциальным уравнением; случай, когда коэффициенты стохастического дифференциального уравнения не зависят от времени, случай мультипликативного шуму; случай процесса Орнштейна-Уленбека; использование замены переменной при поиске решаемых СДУ. уравнения для среднего и моментов; решение СДУ для осциллятора с шумящей частотой; обоснования интегрального представления уравнения;
- определения и свойства стохастических дифференциалов и интегралов в смысле Ито и Стратановича, дифференциальных уравнений Ито и Стратановича;
- одномерная линейная задача фильтрации;
- СДУ, управляемые независимыми случайными винеровскими процессами, СДУ в случае комплексного винеровского процесса, комплексный винеровский процесс общего вида;
- составные пуассоновские процессы, компенсированный пуассоновский процесс;
- СДУ невинеровского типа, решения простейших СДУ невинеровского типа (уравнение для заряда на аноде, уравнение для тока на аноде, линейное уравнение, осциллятор с шумящей частотой невинеровского типа, осциллятор с шумящей частотой общего типа);
- альфа-устойчивые процессы - свойство самоподобия (масштабной инвариантности), теорема Леви-Хинчина, свойства функции плотности распределения, распределения Коши и Леви-Смирнова;

уметь:

- вычислять простейшие стохастические интегралы в смысле Ито и Стратановича;
- составлять стохастические дифференциальные уравнения для осциллятора с шумящей частотой, для механических систем со случайными силами, телеграфного процесса, электрического тока в цепях, уравнения фильтрации;
- получать СДУ Ито из СДУ Стратановича;
- составлять СДУ, управляемое независимыми винеровскими процессами, составными пуассоновскими процессами;
- получать управляющие уравнения типа Фоккера-Планка из СДУ винеровского, пуассововского типов, а также СДУ для процессов Леви;
- получать из СДУ уравнения для корреляционных функций, моментов и т.п.;
- решать СДУ, управляемые винеровским и пуассоновским процессами.

владеть:

- основными методами теории стохастических процессов – метод стохастических дифференциальных уравнений винеровского, пуассоновского и обобщенного типов, метод уравнений Фоккера-Планка, управляющего уравнения, аппаратом характеристической функции, центральными предельными теоремами.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Случайные процессы Леви и субординированные процессы.	6	6		6
2	Стохастические дифференциальные уравнения и кинетические уравнения для открытых систем.	8	8		8
3	Теория СДУ винеровского и пуассоновского типов.	6	6		6
4	Традиционная теория случайных процессов.	10	10		10
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Случайные процессы Леви и субординированные процессы.

Альфа-устойчивые процессы. Характеристики процессов Леви. Основы теории субординированных случайных процессов и СДУ обобщенного невинеровского типа. Другой вывод уравнения Фоккера-Планка для уравнения Ланжевена в случае процесса Леви. Модель непрерывного во времени броуновского движения. Вероятностные характеристики направляющего процесса. Дробные производные в управляющем уравнении для случая подчиненного случайного процесса.

2. Стохастические дифференциальные уравнения и кинетические уравнения для открытых систем.

Парадигма СДУ. Открытые системы и релаксационные процессы. Особенности СДУ и стохастических интегралов. Алгебра инкрементов. Регулярные разрывные функции и стохастическая непрерывность. СДУ и кинетические (управляющие) уравнения. Элементарные операции с СДУ. Решения СДУ. Масштабы времен изменения переменных в СДУ. Роль центральных предельных теорем. Переход от микро к макроскопике. Масштабное преобразование. Уравнения Ланжевена. Основные случайные процессы. Пуассоновский процесс. Сумма независимых пуассоновских процессов. Полиномиальное распределение. Процессы Леви и СДУ общего вида. Составной пуассоновский процесс и процессы Леви. Кинетическое уравнение для СДУ, управляемым процессом Леви. Процессы Леви из винеровского процесса. Связь центральных предельных теорем с ренормгрупповым подходом.

3. Теория СДУ винеровского и пуассоновского типов.

Обоснование уравнений типа Ланжевена, белый шум, аппроксимации белого шума, свойство марковости интеграла от белого шума. Определения стохастического интеграла Ито и Стратоновича, их вычисления для частного случая. Свойства стохастического интеграла Ито (существование, интегрирование многочленов, правила дифференцирования, средние значения, формула для корреляции). Определения и свойства стохастических дифференциалов и интегралов в смысле Ито и Стратановича, дифференциальных уравнений Ито и Стратановича. Замена переменных (формула Ито), правило дифференцирования Ито. Связь между интегралами и СДУ Ито и Стратановича. Решения СДУ в случаях, когда коэффициенты стохастического дифференциального уравнения не зависят от времени, мультипликативного шума; процесса Орнштейна-Уленбека. Уравнения для среднего и моментов. Решение СДУ для осциллятора с шумящей частотой. Комплексный винеровский процесс общего вида и СДУ, им управляемые. СДУ невинеровского типа, решения простейших СДУ невинеровского типа (уравнение для заряда на аноде, уравнение для тока на аноде, линейное уравнение, осциллятор с шумящей частотой невинеровского типа). СДУ и кинетическое уравнение для телеграфного процесса. Осциллятор с шумом винеровского и пуассоновского типов. СДУ, управляемые независимыми случайными винеровскими процессами, СДУ в случае комплексного винеровского процесса, комплексный винеровский процесс общего вида. Примеры использования СДУ в описании физических процессов и решении детерминированных дифференциальных уравнений в частных производных. Элементарная теория фильтрации. Фильтр Калмана-Бьюси.

4. Традиционная теория случайных процессов.

Основные необходимые представления теории вероятностей. Примеры мер. Сепарабельные процессы и теорема Колмогорова. Условие марковости. Уравнение Чемпена-Колмогорова-Смолуховского и его частные случаи. Еще раз о винеровском процессе. Подходы Эйнштейна, Ланжевена и Башелье. Стационарные марковские процессы, их эргодические свойства, измерения среднего значения, автокорреляционной функции, спектра, теорема Винера-Хинчина, измерение функции распределения. Однородные марковские процессы и их физическая интерпретация, автокорреляционная функция марковских процессов. Центральные предельные теоремы.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику для физиков [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. М. Чеботарев ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— М. : Изд-во МФТИ, 2009 .— 248 с.
Фонд литературы кафедры

2. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М., Мир, 1986..
3. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М., МЦНМО, 2007.

Дополнительная литература

1. Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Боровков .— 5-е изд., перераб. и доп. — М. : ЛИБРОКОМ, 2009 .— 656 с.
Фонд литературы кафедры

2. Jacobs K. Stochastic Processes for Physicists. Cambridge, CUP, 2010.
3. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. ГИТТЛ, 1949.
4. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М., Наука, 1983.
5. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. М., АСТ, 2003.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. http://vk.com/stochastic_processes - группа с учебно-научными материалами преподавателя курса Башарова А.М. «В Контакте».
2. http://basharov.me/ - сайт преподавателя курса Башарова А.М. с авторскими учебно-научными материалами.
3. http://sci-edu.ru/ - проект преподавателя курса Башарова А.М. с интересными и полезными научными и учебными видео-материалами.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

- видеоматериалы, гипертекстовые материалы и презентации по темам курса.
- в процессе самостоятельной работы обучающиеся могут использовать программные средства MATLAB, Maple, WolframMathematica.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Для успешного освоения курса, помимо посещения лекций, от студентов требуется самостоятельная работа. Эта работа организована на интернет ресурсах автора данного курса. Самостоятельные занятия включают в себя повторение материала лекций и вспомогательного материала из предыдущего курса «Теория вероятности и математическая статистика», просмотр рекомендованных видео-материалов. Основное время отводится на самостоятельное решение задач, сформулированных на лекциях или выложенных на указанных интернет ресурсах. Именно эти задачи и будут предлагаться на дифференцированном зачете.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Термоядерная энергетика и плазменные технологии
	Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова
	кафедра математики и математических методов физики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.М. Башаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Стохастические процессы» обучающийся должен:

знать:

- основные понятия теории вероятности – сигма- и борелевские алгебры, измеримые пространства, вероятностную меру, вероятностное и полное вероятностное пространства, пространство состояний, измеримые функции, случайные величины и функции, математическое ожидание и дисперсию случайной величины, условную математическое ожидание и условную вероятность относительно сигма-алгебры, функцию распределения вероятности и плотность функции распределения, совместные и условные вероятности;
- основные понятия теории стохастических процессов - марковские процессы, сепарабельные процессы, сечение и траектория случайного процесса, теорема Колмогорова;
- основные понятия современной теории стохастических процессов - информационный поток (фильтрация), неупреждающий процесс, история процесса, модифицированные, неразличимые и регулярные (cadlag) случайные процессы, марковское время (время остановки), мартингалы, суб и супер мартингалы, функции ограниченной вариации;
- основные понятия и представления центральных предельных теорем - сходимость почти наверное (п.н.), стохастический предел, или предел по вероятности, сходимость в среднем порядка , предел по распределению, слабую сходимость, взаимосвязь различных пределов, свойства характеристической функции, характеристическую функцию для гауссовского распределения, теорему о непрерывности; центральную предельную теорему для одинаково распределенных случайных величин, связь с ренорм-групповым подходом, ренорм-групповое преобразование, неподвижную точку, анализ устойчивости, центральную предельную теорему для одинаково распределенных случайных величин в случае бесконечной дисперсии;
- уравнение Чемпена-Колмогорова-Смолуховского, обобщенное уравнение Фоккера-Планка, математическое определение непрерывного марковского процесса, частные случаи обобщенного уравнения Фоккера-Планка - управляющее уравнение, диффузионные процессы, уравнение Фоккера-Планка; детерминированные процессы и уравнение Лиувилля как частный случай обобщенного уравнения Фоккера-Планка; обобщенное уравнение Фоккера-Планка как кинетическое уравнение при классическом и квантовом описании;
- стационарные марковские процессы - эргодические свойства стационарного процесса, измерения среднего значения, автокорреляционной функции, спектра, теорему Винера-Хинчина, измерение функции распределения; однородные марковские процессы и их физическую интерпретацию, автокорреляционную функцию марковских процессов;
- основные представления о винеровском процессе - нерегулярность и недифференцируемость траекторий, независимость приращений, автокорреляционные функции;
- основные представления о процесс Орнштейна – Уленбека - корреляционные функции, гауссовость, стационарное решение, использование в качестве модели реального шумового сигнала;
- основные представления винеровских стохастических дифференциальных уравнений - обоснование уравнений типа Ланжевена, белый шум, аппроксимации белого шума, роль центральной предельной теоремы, свойство марковости интеграла от белого шума; определение стохастического интеграла, интегралы Ито и Стратоновича для частного случая; свойства стохастического интеграла Ито (существование. интегрирование многочленов, правила дифференцирования, средние значения, формула для корреляции);
- решения и преобразования винеровских стохастических дифференциальных уравнений - приближенное решение методом Коши – Эйлера (условия существования и единственности решения на интервале, марковское свойство решения стохастического дифференциального уравнения Ито), замена переменных (формула Ито), другой подход к формуле Ито, правило дифференцирования Ито, связь между уравнением Фоккера - Планка и стохастическим дифференциальным уравнением; случай, когда коэффициенты стохастического дифференциального уравнения не зависят от времени, случай мультипликативного шуму; случай процесса Орнштейна-Уленбека; использование замены переменной при поиске решаемых СДУ. уравнения для среднего и моментов; решение СДУ для осциллятора с шумящей частотой; обоснования интегрального представления уравнения;
- определения и свойства стохастических дифференциалов и интегралов в смысле Ито и Стратановича, дифференциальных уравнений Ито и Стратановича;
- одномерная линейная задача фильтрации;
- СДУ, управляемые независимыми случайными винеровскими процессами, СДУ в случае комплексного винеровского процесса, комплексный винеровский процесс общего вида;
- составные пуассоновские процессы, компенсированный пуассоновский процесс;
- СДУ невинеровского типа, решения простейших СДУ невинеровского типа (уравнение для заряда на аноде, уравнение для тока на аноде, линейное уравнение, осциллятор с шумящей частотой невинеровского типа, осциллятор с шумящей частотой общего типа);
- альфа-устойчивые процессы - свойство самоподобия (масштабной инвариантности), теорема Леви-Хинчина, свойства функции плотности распределения, распределения Коши и Леви-Смирнова;

уметь:

- вычислять простейшие стохастические интегралы в смысле Ито и Стратановича;
- составлять стохастические дифференциальные уравнения для осциллятора с шумящей частотой, для механических систем со случайными силами, телеграфного процесса, электрического тока в цепях, уравнения фильтрации;
- получать СДУ Ито из СДУ Стратановича;
- составлять СДУ, управляемое независимыми винеровскими процессами, составными пуассоновскими процессами;
- получать управляющие уравнения типа Фоккера-Планка из СДУ винеровского, пуассововского типов, а также СДУ для процессов Леви;
- получать из СДУ уравнения для корреляционных функций, моментов и т.п.;
- решать СДУ, управляемые винеровским и пуассоновским процессами.

владеть:

- основными методами теории стохастических процессов – метод стохастических дифференциальных уравнений винеровского, пуассоновского и обобщенного типов, метод уравнений Фоккера-Планка, управляющего уравнения, аппаратом характеристической функции, центральными предельными теоремами.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Стохастические процессы» осуществляется в форме дифференцированного зачета. Дифференцированный зачет проводится в устной форме.

Перечень контрольных вопросов:

1. Дифференциал и интеграл Ито в случае случайного скачкообразного процесса. Алгебра Ито.
2. Сходства и отличия интегральных сумм интегралов Ито от Риманова интеграла для функций с конечным числом разрывов.
3. Пуассоновский процесс. Управляющее уравнение, функция распределения. Разные способы вывода.
4. Многомерный Пуассоновский процесс.
5. Процесс Бернулли.
6. Связь процесса Бернулли с винеровским и пуассоновским процессами.
7. Подходы Эйнштейна, Смолуховского и Башелье к описанию броуновского движения.
8. Винеровский процесс. Основные свойства и характеристики. Дифференциал и алгебра Ито. Управляющее уравнение (уравнение Фоккера-Планка) и его решения.
9. Многомерный винеровский процесс.
10. Масштабное преобразование СДУ в случае пуассоновского процесса. Компенсированный пуассоновский процесс.
11. Сепарабельные процессы. Теорема Колмогорова.
12. Статистическая независимость. Условия Маркова.
13. Уравнение Чемпена-Колмогорова-Смолуховского. Вывод обобщенного уравнения Фоккера-Планка (управляющего уравнения), его частные случаи.
14. Детерминированные процессы и уравнение Лиувилля как частный случай обобщенного уравнения Фоккера-Планка.
15. Связь между СДУ и кинетическим (управляющим) уравнением в случае винеровского и пуассоновского процессов.
16. Понятие и описание белого шума.
17. Понятия информационного потока (фильтрации), неупреждающего процесса, истории процесса, модифицированного, неразличимого и регулярного (cadlag) случайных процессов.
18. Марковское время (время остановки. Пример вычисления для броуновской частицы.
19. Типы сходимости случайных последовательностей и взаимосвязи между ними.
20. Ренорм-групповое преобразование, неподвижная точка, анализ устойчивости. Связь с центральной предельной теоремой для одинаково распределенных случайных величин.
21. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных случайных величин в случае бесконечной дисперсии.
22. Стационарные марковские процессы – определения и основные свойства.
23. Теорема Винера-Хинчина.

24. Измерения среднего значения, автокорреляционной функции, спектра, функции распределения.
25. Однородные марковские процессы и их физическая интерпретация.
26. Процесс Орнштейна – Уленбека - корреляционные функции, гауссовость.
27. Строгое определение стохастического интеграла Ито и Стратоновича.
28. Определения и свойства стохастических дифференциалов и интегралов в смысле Ито и Стратановича, дифференциальных уравнений Ито и Стратановича;
29. Свойства стохастического интеграла Ито (существование, интегрирование многочленов, правила дифференцирования, средние значения, формула для корреляции).
30. Приближенное решения винеровских стохастических дифференциальных уравнений методом Коши – Эйлера (условия существования и единственности решения на интервале, марковское свойство.
31. Замена переменных (формула Ито). Использование замены переменной при поиске решаемых СДУ (примеры).
32. Решение уравнения Ито в случае, когда коэффициенты стохастического дифференциального уравнения не зависят от времени
33. СДУ в случае мультипликативного шума.
34. СДУ в случай процесса Орнштейна-Уленбека.
35. Формулировка СДУ для осциллятора с шумящей частотой через уравнение Стратановича и интегральное решение, обоснование интегрального представления уравнения. Решения этих уравнений.
36. СДУ, управляемые независимыми случайными винеровскими процессами, СДУ в случае комплексного винеровского процесса, комплексный винеровский процесс общего вида.
37. Элементарная теория фильтрации.
38. Составные пуассоновские процессы.
39. СДУ невинеровского типа, решения простейших СДУ невинеровского типа (уравнение для заряда на аноде, уравнение для тока на аноде, линейное уравнение, осциллятор с шумящей частотой невинеровского типа, осциллятор с шумящей частотой общего типа).
40. Альфа-устойчивые процессы - свойство самоподобия (масштабной инвариантности), теорема Леви-Хинчина, свойства функции плотности распределения,
41.Распределения Коши и Леви-Смирнова. Получение процесса, описываемого распределением Леви-Смирнова из броуновского движения.
42. Простейшие стохастические уравнения с участием альфа-устойчивых процессов, процесс Коши, случай типа процесса Орнштейна-Уленбека.
43. Формула Ито для процессов Леви.
44. Решение линейного стохастического дифференциального уравнения для процессов Леви.
45. Связь СДУ, управляемых составным пуассоновским процессом, с уравнениями типа Фоккера-Планка с дробными производными.
46. Дробные интегралы Римана-Лиувилля, дробные производные на прямой, дробные производные Капуто и Маршо, преобразования Лапласа уравнений с дробными производными, формулы интегрирования по частям.

Примеры задач контрольных заданий:

1. Определить вероятность того, что счетчик Гейгера сосчитает все частицы за время t, если в течение отклика, вызванным попаданием частицы, счетчик Гейгера на другие частицы не реагирует. Время отклика τ.

2. N молекул идеального газа находятся в объеме V. Определить вероятность того, что в объеме $v<V$ находятся n молекул. Получить приближенное выражение, когда $v<<V$ (распределение Пуассона). Найти среднее число частиц n в объеме v, его среднюю абсолютную и относительную флуктуации. Найти вид распределения в случае $v<<V$, $n>>1$ (распределение Гаусса).

3. Покажите, что функция распределения $\Phi(w)$ для винеровского процесса обладает свойством устойчивости: Для положительных чисел b_1 и b_2 всегда найдутся такие положительное число b и вещественное число a, что

$$\Phi(w/b_1)*\Phi(w/b_2)=\Phi((w-a)/b).$$

Здесь знак * обозначает свертку двух функций $F(x)*G(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(u)G(x-u)du$.

4. Считая, что смещения броуновской частицы и степени этих смещений в последовательные интервалы времени независимыми, определить зависимость от времени средних от степеней этих смещений для одномерного броуновского движения.

5. Для одномерного броуновского движения частицы, начинающегося из начала координат, определить

1. вероятность достижения ею точки x к моменту времени в интервале $(t,t+dt)$.

2. вероятность максимального смещения частицы за данный временной интервал $(0,t)$.

3. распределение по времени достижения броуновской частицей максимального за время t ее отклонения $X_m(t)$.

6. Пусть имеются множества элементарных событий Ω и некоторые σ-алгебры, порожденные подмножествами этого множества. Показать, что между σ-алгебрами, порожденными подмножествами имеются соотношения

1. Для конечного множества элементарных событий $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$;
$\mathcal{F}_0=\sigma\{\Omega,\varnothing\}$, $\mathcal{F}_1=\sigma\{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\}\}$, $\mathcal{F}_2=\sigma\{\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\}\}$,
$\mathcal{F}_3=\sigma\{\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\}\}$, $\mathcal{F}_4=\sigma\{\{\omega_4,\omega_1\},\{\omega_5,\omega_2\},\{\omega_6,\omega_3\}\}$. Тогда
$\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_1\not\subset\mathcal{F}_4$;

2. Для несчетного множества элементарных событий $\Omega=(0,1]$;
$\mathcal{F}_0=\sigma\{\Omega,\varnothing\}$, $\mathcal{F}_1=\sigma\{(0,\frac{1}{2}],(\frac{1}{2},\frac{3}{4}],(\frac{3}{4},1]\}$, $\mathcal{F}_2=\sigma\{(0,\frac{1}{4}],(\frac{1}{4},\frac{1}{2}],(\frac{1}{2},\frac{3}{4}],(\frac{3}{4},1]\}$,
$\mathcal{F}_3=\sigma\{(0,\frac{1}{8}],(\frac{1}{8},\frac{2}{8}],...,(\frac{7}{8},1]\}$. Тогда $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\mathcal{F}_3$.

7. Доказать, что если X_t и Y_t являются модификациями случайных процессов и имеют почти всюду непрерывные справа траектории, то они являются неразличимыми.

8. Показать, что множество дифференцируемых траекторий имеет нулевую винеровскую меру.

9. Доказать, что класс множеств, инвариантных относительно сохраняющего меру преобразования, образует σ-алгебру.
10. Рассмотрите скачкообразный процесс, в котором интенсивность λ совершить скачок в интервале времени $[t, t+dt]$ является заданной функцией времени $\lambda = f(t)$. Найдите вероятность $P(n,t)$ к моменту времени t совершить n скачков.
11. Доказать, что имеется следующая связь между сходимостями
сходимость почти наверное $\Rightarrow$ сходимость в среднеквадратичном $\Rightarrow$сходимость по вероятности $\Rightarrow$ сходимость по распределению.
12. Найти характеристические функции для распределений

1. пуассоновского процесса $P\{N=n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $n = 0,1,\ldots$;
2. биномиального процесса $P\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0,1,\ldots,n$;
3. показательного $p(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$;
4. процесса Коши $p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(x-x_0)^2 + \gamma^2}$, $-\infty < x < \infty$.

13. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти распределение случайной величины $\chi_n^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{\chi_n^2}{n} - 1| > \varepsilon\} = 0$ для $\forall \varepsilon > 0$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\frac{\chi_n^2 - E\{\chi_n^2\}}{\sqrt{D\{\chi_n^2\}}} \le x\}$, $-\infty < x < \infty$.
14. Пусть условную вероятность $p(x, t+\Delta t \,|\, y, t)$ при $\Delta t \to 0$ можно представить в виде двух слагаемых $p(x, t+\Delta t \,|\, y, t) = (1 - a\Delta t)\delta(x-y) + \Delta t W(x \,|\, y)$, характеризующих вероятность частице остаться через Δt в точке y и вероятность перейти за Δt в точку x. Вывести из уравнения Чемпена-Колмогорова-Смолуховского кинетическое уравнение

$$\frac{\partial p(x,t \,|\, y,\tau)}{\partial t} = \int [\,p(x,t \,|\, z,\tau) W(z \,|\, y) - p(x,t \,|\, y,\tau) W(y \,|\, z)] dz .$$

15. Из уравнения Фоккера-Планка

$$\frac{\partial p(z,t \,|\, y,\tau)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(z,t \,|\, y,\tau)}{\partial z^2}, \; p(z,\tau \,|\, y,\tau) = \delta(z-y), \; p(z,t \,|\, y,\tau) \to 0 \text{ при } t \to \infty$$

для одномерного винеровского процесса получить уравнение для среднего квадрата смещения $<(z-y)^2>$ и решить его.
16. Доказать, что в случае отсутствия диффузионного слагаемого решение уравнения Фоккера-Планка

$$\frac{\partial p(z,t \,|\, y,\tau)}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial [A_i(z) p(z,t \,|\, y,\tau)]}{\partial z_i}, \; p(z,\tau \,|\, y,\tau) = \delta(z-y),$$

будет иметь вид

$$p(z,t \,|\, y,\tau) = \delta(z - x(y,t)),$$

где $x(y,t)$ - решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx(y,t)}{dt} = A_i[x(y,t), t]$$

с начальным условием

$$x(y,\tau) = y .$$

17. Пусть дан одномерный стационарный случайный процесс X_t, $t \ge 0$ со спектральной плотностью $e^{-|\omega|}$. Найдите спектральную плотность процесса $\int\limits_t^{t+\tau} X_s ds$.

18. Пусть $W(t)$ является стандартным одномерным винеровским процессом. Доказать, что следующие процессы винеровские

19.1. $W^{(1)}(t) = \begin{cases} 0, t = 0; \\ tW(1/t), t > 0; \end{cases}$

19.2. $W^{(2)}(t) = \sqrt{c}W(t/c)$, $t \geq 0$, $c > 0$;

19.3. $W^{(3)}(t) = W(f(t))$, $f(t)$ является гладкой монотонно возрастающей функцией

Определите параметры процессов $W^{(i)}(t)$, $i = 1,2,3$.

19. Пусть $\tau(z)$, $z > 0$ - случайный момент времени, в который винеровский процесс $W(t)$ впервые достигает значения z. Найти плотность распределения $\tau(z)$. Найти ее характеристическую функцию. Показать, что математическое ожидание $\tau(z)$ бесконечно.

20. Пусть $W(s)$ - винеровский процесс, $X_t = e^{-t}W(e^{2t})$. Показать, что X_t - стационарный марковский процесс. Найти его ковариационную функцию и спектральную плотность.

21. Определить параметры случайных процессов

21.1. $\int\limits_{t_0}^{t} f(t')W(t')dt'$, 21.2. $\int\limits_{t_0}^{t} f(W(t'))dt'$, где $W(t)$ - стандартный винеровский процесс, а $f(t)$ - заданная гладкая функция.

22. Вычислить интегралы (получить рекуррентные формулы) и определить параметры случайных процессов

22.1. $\int\limits_{t_0}^{t} \exp[W(t')]dW(t')$, 22.2. $\int\limits_{t_0}^{t} \sin[W(t')]dW(t')$, 22.3. $\int\limits_{t_0}^{t} \cos[W(t')]dW(t')$.

23. Доказать, что для любых неупреждающей функции $G(t)$ и целого $n \geq 0$ выполняются соотношения $\int\limits_{t_0}^{t} G(t')[dW(t')]^{2+n} = \int\limits_{t_0}^{t} G(t')dW(t')dt' = 0$.

24. Рассмотрите замену временной переменной $t = t(s)$ для монотонной гладкой функции $t = t(s)$ в простейшем СДУ $dx(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$. Напишите СДУ для временного параметра s и стандартного винеровского процесса $\widetilde{W}(s)$, построенного из процесса $W(t(s))$.

25. Вычислить интегралы (получить рекуррентные формулы) и определить параметры случайных процессов

25.1. $\overleftarrow{T}\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} W(t')dt'\right)$, 25.2. $\overleftarrow{T}\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} W(t')dW(t')\right)$, где $W(t)$ - стандартный винеровский процесс.

26. Решить стохастические дифференциальные уравнения

26.1. $dx(t) = a(t)dt + b_1(t)dW_1(t) + b_2(t)dW_2(t)$,

26.2. $dx(t) = kx(t)dt + b_1dW_1(t) + b_2dW_2(t)$,

26.3. $dx(t) = cx(t)dW_1(t) + b_2dW_2(t)$.

Здесь $dW_1(t)$ и $dW_2(t)$ - инкременты двух независимых стандартных винеровских процессов, $a(t)$, $b_1(t)$ и $b_2(t)$ - заданные вещественные функции времени, c и k - вещественные постоянные. Исходя из полученных решений вычислить величины $< x(t) >$ и $< x(t)x(t') >$ для неслучайного начального значения $x(0)$.

27. Решить стохастические дифференциальные уравнения

27.1. $dx(t) = a(t)dt + b_1(t)dW(t) + b_2(t)dN(t)$,

27.2. $dx(t) = kx(t)dt + b_1dW(t) + b_2dN(t)$, 27.3. $dx(t) = x(t)(b_1 dW(t) + b_2 dN(t)$.

Здесь $dW(t)$ и $dN(t)$ - инкременты двух стандартных винеровского и пуассоновского процессов, $a(t)$, $b_1(t)$ и $b_2(t)$ - заданные вещественные функции времени, c, $b_{1,2}$ и k - вещественные постоянные. Исходя из полученных решений вычислить величины $< x(t) >$ и $< x(t)x(t') >$ для неслучайного начального значения $x(0)$.

28. Получить СДУ, а из него - кинетическое (управляющее) уравнение, для кубита (двухуровневой квантовой частицы) в шумовом классическом электромагнитном поле. Кубит в классическом поле описывается следующими уравнениями для медленных амплитуд матрицы плотности ρ

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = id_{10}E^{(-)}\hbar^{-1}(-\rho_{22} + \rho_{11}), \ \frac{d\rho_{12}}{dt} = -id_{21}^{*}E^{(+)}\hbar^{-1}(\rho_{11} - \rho_{22}),$$

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = i(-d_{10}^{*}E^{(+)}\rho_{21} + \rho_{12}d_{10}E^{(-)})\hbar^{-1}, \ \frac{d\rho_{11}}{dt} = i(-\rho_{12}d_{21}E^{(-)} + d_{21}^{*}E^{(+)}\rho_{21})\hbar^{-1}.$$

Рассмотреть моделирование амплитуд $E^{(\pm)}$ классического поля напряженности $E = E^{(+)}e^{-i\omega t} + E^{(-)}e^{i\omega t}$ комплексным винеровским процессом общего вида.

29. Вывести СДУ для телеграфного процесса и из него получить кинетическое уравнение. Найти решение уравнений.

Примеры экзаменационных билетов (заданий, тестов и др. материалов, используемых для проведения дифференцированного зачета):

1. Теорема Винера-Хинчина.
2. Доказать, что в случае отсутствия диффузионного слагаемого решение уравнения Фоккера-Планка

$$\frac{\partial p(z,t\,|\,y,\tau)}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial [A_i(z)p(z,t\,|\,y,\tau)]}{\partial z_i}, \ p(z,\tau\,|\,y,\tau) = \delta(z-y),$$

будет иметь вид

$$p(z,t\,|\,y,\tau) = \delta(z - x(y,t)),$$

где $x(y,t)$ - решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx(y,t)}{dt} = A_i[x(y,t),t]$$

с начальным условием

$$x(y,\tau) = y.$$

3. Решить стохастическое дифференциальное уравнение
$dx(t) = cx(t)dW_1(t) + b_2 dW_2(t)$.

Здесь $dW_1(t)$ и $dW_2(t)$ - инкременты двух независимых стандартных винеровских процессов, c и b_2 - вещественные постоянные. Исходя из полученных решений вычислить величины $< x(t) >$ и $< x(t)x(t') >$ для неслучайного начального значения $x(0)$.

4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, заданных после каждой лекции. Для получения зачета студент должен ответить на два контрольных вопроса по теории и представить решение задач, задаваемых после каждой лекции (контрольное задание). Если такой материал у студента отсутствует, то на зачете ему дается третий вопрос, который представляет собой задачу из контрольных заданий. Список задач может меняться от года к году.

При решении задач контрольных заданий обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку двух вопросов по теории. Опрос обучающегося не превышает двух астрономических часов. Во время проведения зачета обучающиеся могут пользоваться своими записями лекций.