

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор института нано-, био-,  
информационных, когнитивных  
и социогуманитарных наук и  
технологий**

**П.А. Форш**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Общая геометрия и топология
<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Термоядерная энергетика и плазменные технологии Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.И. Шафаревич, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 19.03.2020

## Аннотация

Одной из основных задач математического образования является овладение такими понятиями, которые применяются в различных областях математики. Одним из таких понятий является понятие топологии, топологического пространства и стандартных методов изучения таких пространств. Это позволяет использовать эти методы при изучении различных математических курсов, прежде всего математического анализа и функционального анализа. Топология показывает, что понятия предела и непрерывности, которые естественно возникают в различных разделах математики и имеют единую природу.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по геометрии и топологии для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания;
- формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

#### Задачи дисциплины

- формирование у обучающихся базовых знаний по геометрии и топологии;
- формирование общематематической культуры: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями;
- формирование умений и навыков применять полученные знания для решения задач математической физики, самостоятельного анализа полученных результатов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- основы общей топологии; определение и основные свойства гладких многообразий; теоремы о вложениях многообразий в евклидово пространство; основы тензорного анализа на многообразиях;
- основы теории аффинных связностей; теорему существования и единственности римановой связности; свойства тензора Римана;
- определение и свойства групп когомологий де Рама;
- теорему о гомотопической инвариантности групп когомологий;
- свойства степени гладкого отображения; теорему о гомотопической инвариантности степени;
- основы симплектической геометрии и теории гамильтоновых систем.

уметь:

- исследовать свойства топологических пространств;
- строить атласы многообразий, исследовать их на компактность и ориентируемость;
- вычислять ковариантные производные тензорных полей; решать задачи параллельного перенесения;
- находить и исследовать геодезические; вычислять кривизну многообразий;
- находить простейшие группы когомологий;
- вычислять степени отображений;
- исследовать гамильтоновы системы и их инвариантные многообразия.

владеть:

- аппаратом тензорного анализа и анализа дифференциальных форм на многообразиях;
- техникой параллельного перенесения;
- аппаратом теории кохомологий.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Когомологии. Степень отображения. Основы симплектической геометрии.	8	5		15
2	Общая топология. Свойства гладких многообразий.	12	5		15
3	Тензорный анализ и аффинные связности.	10	5		15
Итого часов		30	15		45
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

###### 1. Когомологии. Степень отображения. Основы симплектической геометрии.

Замкнутые и точные формы на многообразии. Определение пространств когомологий де Рама. Свойства пространств  $H^0$  и  $H^1$ . Пространство  $H^1(S^1)$ .

Поведение форм и пространств когомологий при гладких отображениях.

Гомотопные отображения. Теорема о совпадении линейных операторов в когомологиях, соответствующих гомотопным отображениям.

Гомотопически эквивалентные многообразия и их пространства когомологий. Когомологии евклидовых пространств.

Степень отображения. Примеры. Теорема о гомотопической инвариантности степени.

Степень и интеграл. Теорема Гаусса – Бонне.

Индекс векторного поля. Теорема Пуанкаре – Бендиксона.

Симплектические многообразия. Теорема Дарбу. Лагранжевы многообразия.

Гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы системы. Скобки Пуассона. Интегралы гамильтоновых систем.

###### 2. Общая топология. Свойства гладких многообразий.

Топологическое пространство. Индуцированная топология, топология декартова произведения, фактор-топология.

Непрерывные отображения. Гомеоморфизм.

Топологические свойства пространств: связность, компактность, хаусдорфовость. Тихоновские произведения.

Топологические многообразия. Карты, атлас, локальные системы координат. Функции склейки.

Гладкие многообразия. Гладкие функции на многообразии и гладкие отображения гладких многообразий. Дiffeоморфизм. Ориентируемые и неориентируемые многообразия.

Касательный вектор в точке. Касательное пространство.

Дифференциал гладкого отображения. Вложения и погружения.

Вложение компактного многообразия в евклидово пространство достаточно большой размерности.

Теорема Уитни.

### 3. Тензорный анализ и аффинные связности.

Тензорные поля на многообразии. Замена базиса в касательном пространстве при замене локальных координат. Закон преобразования координат тензорного поля при замене координат на многообразии.

Определение аффинной связности на многообразии. Символы Кристоффеля.

Коммутатор векторных полей и его свойства.

Симметричные связности. Тензор кручения связности.

Связности, согласованные с римановой метрикой. Теорема существования и единственности римановой связности (симметричной связности, согласованной с метрикой).

Параллельный перенос на многообразии с аффинной связностью и его общие свойства.

Геодезические линии на многообразии с аффинной связностью и их общие свойства. Свойства параллельного переноса и геодезических в римановой связности.

Оператор кривизны линейной связности и тензор кривизны Римана. Формулы для его коэффициентов.

Симметрии тензора кривизны Римана.

Тензор Риччи и скалярная кривизна. Тензор Римана и скалярная кривизна двумерных многообразий.

Теорема о связи скалярной кривизны поверхности с ее гауссовой кривизной.

Дифференциальные формы на многообразии. Внешнее дифференцирование форм.

Интегрирование форм по ориентированным многообразиям.

Многообразия с краем. Согласование ориентаций многообразия и его края.

Теорема Стокса.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором и экраном.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : учебник для вузов / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко .— М. : Физматлит, 2004 .— 304 с.

2. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев, А. Т. Фоменко ; под общ. ред. А. Т. Фоменко .— М. : Физматлит, 2004 .— 412 с.

Фонд литературы кафедры

### Дополнительная литература

1. Современная геометрия : Методы и приложения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко .— 5-е изд., испр. — М. : Эдиториал УРСС ; Добросвет, 2001 .— Т. 2 : Геометрия и топология многообразий. - 2001. - 296 с.

2. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии: Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
3. Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1968.

#### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

- <http://math.mipt.ru/study/>  
2. <http://dfgm.math.msu.su/materials.php>

#### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

Для контроля и коррекции знаний обучающиеся могут использовать компьютерное тестирование, в том числе на портале [www.i-exam.ru](http://www.i-exam.ru).

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, Scilab и др.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях;
- подготовку к практическим занятиям, коллоквиумам, экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций. Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения. Значительно облегчить решение задачи может хорошо выполненный чертеж, если он соответствует условию задачи (прямой угол нарисован прямым, равнобедренный треугольник – равнобедренным и т. д.). При подготовке к практическим занятиям необходимо повторять ранее изученные основные определения, формулировки теорем. В начале занятия, как правило, проводится короткий (10-15 минут) опрос по материалу прошедших занятий в устной или письменной форме. Обычно придерживаются следующей схемы: изучение материала лекции по конспекту в тот же день, когда была прослушана лекция (10-15 минут); повторение материала накануне следующей лекции (10-15 минут), проработка учебного материала по конспектам лекций, учебной и научной литературе, подготовка ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения (1 час неделю), подготовка к практическому занятию, решение задач (1 час). Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

Обязательным требованием является выполнение домашних работ, которые оформляются в специально отведённой для этого тетради и систематически сдаются на проверку.

Промежуточный контроль знаний проводится в виде коллоквиумов, на которых студенту предлагается письменно ответить на теоретический вопрос и решить две задачи по теме коллоквиума, а также студенту в ходе освоения курса необходимо выполнить две домашних индивидуальные работы с их последующей защитой.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладные математика и физика
<b>профиль подготовки:</b>	Термоядерная энергетика и плазменные технологии Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Дифференцированный зачет	
<b>Разработчик:</b>	А.И. Шафаревич, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Общая геометрия и топология» обучающийся должен:

### знать:

- основы общей топологии; определение и основные свойства гладких многообразий; теоремы о вложениях многообразий в евклидово пространство; основы тензорного анализа на многообразиях;
- основы теории аффинных связностей; теорему существования и единственности римановой связности; свойства тензора Римана;
- определение и свойства групп когомологий де Рама;
- теорему о гомотопической инвариантности групп когомологий;
- свойства степени гладкого отображения; теорему о гомотопической инвариантности степени;
- основы симплектической геометрии и теории гамильтоновых систем.

### уметь:

- исследовать свойства топологических пространств;
- строить атласы многообразий, исследовать их на компактность и ориентируемость;
- вычислять ковариантные производные тензорных полей; решать задачи параллельного перенесения;
- находить и исследовать геодезические; вычислять кривизну многообразий;
- находить простейшие группы когомологий;
- вычислять степени отображений;
- исследовать гамильтоновы системы и их инвариантные многообразия.

### владеть:

- аппаратом тензорного анализа и анализа дифференциальных форм на многообразиях;
- техникой параллельного перенесения;
- аппаратом теории когомологий.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

### **3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков**

Промежуточная аттестация по дисциплине «Общая геометрия и топология» осуществляется в форме дифференцированного зачета. Дифференцированный зачет проводится в устной форме.

Перечень контрольных вопросов для сдачи дифференцированного зачета в 4 семестре:

1. 1. Топологическое пространство. Индуцированная топология, топология декартова произведения, фактор-топология.
2. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм.
3. Топологические свойства пространств: связность, компактность, хаусдорфовость. Тихоновские произведения.
4. Топологические многообразия. Карты, атлас, локальные системы координат. Функции склейки.
5. Гладкие многообразия. Гладкие функции на многообразии и гладкие отображения гладких многообразий. Диффеоморфизм. Ориентируемые и неориентируемые многообразия.
6. Касательный вектор в точке. Касательное пространство.
7. Дифференциал гладкого отображения. Вложения и погружения.
8. Вложение компактного многообразия в евклидово пространство достаточно большой размерности.
9. Теорема Уитни.
10. Тензорные поля на многообразии. Замена базиса в касательном пространстве при замене локальных координат. Закон преобразования координат тензорного поля при замене координат на многообразии.
11. Определение аффинной связности на многообразии. Символы Кристоффеля.
12. Коммутатор векторных полей и его свойства.
13. Симметричные связности. Тензор кручения связности.
14. Связности, согласованные с римановой метрикой. Теорема существования и единственности римановой связности (симметричной связности, согласованной с метрикой).
15. Параллельный перенос на многообразии с аффинной связностью и его общие свойства.
16. Геодезические линии на многообразии с аффинной связностью и их общие свойства. Свойства параллельного переноса и геодезических в римановой связности.



17. Оператор кривизны линейной связности и тензор кривизны Римана. Формулы для его коэффициентов.
18. Симметрии тензора кривизны Римана.
19. Тензор Риччи и скалярная кривизна. Тензор Римана и скалярная кривизна двумерных многообразий.
20. Теорема о связи скалярной кривизны поверхности с ее гауссовой кривизной.
21. Дифференциальные формы на многообразии. Внешнее дифференцирование форм.
22. Интегрирование форм по ориентированным многообразиям.
23. Многообразия с краем. Согласование ориентаций многообразия и его края.
24. Теорема Стокса.
25. Замкнутые и точные формы на многообразии. Определение пространств когомологий де Рама. Свойства пространств  $H^0$  и  $H^1$ . Пространство  $H^1(S^1)$ .
26. Поведение форм и пространств когомологий при гладких отображениях.
27. Гомотопные отображения. Теорема о совпадении линейных операторов в когомологиях, соответствующих гомотопным отображениям.
28. Гомотопически эквивалентные многообразия и их пространства когомологий. Когомологии евклидовых пространств.
29. Степень отображения. Примеры. Теорема о гомотопической инвариантности степени.
30. Степень и интеграл. Теорема Гаусса – Бонне.
31. Индекс векторного поля. Теорема Пуанкаре – Бендиксона.
32. Симплектические многообразия. Теорема Дарбу. Лагранжевы многообразия.
33. Гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы системы. Скобки Пуассона. Интегралы гамильтоновых систем.

#### 4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
неудовлетворительно	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должны превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся оценку.