

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор института нано-, био-,
информационных, когнитивных
и социогуманитарных наук и
технологий**

Т.Е. Григорьев

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Теория групп
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Термоядерная энергетика и плазменные технологии Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова Кафедра математики и математических методов физики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.И. Шафаревич, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

Программа обсуждена на заседании Кафедры математики и математических методов физики 20.03.2021

Аннотация

Теория групп — раздел общей алгебры, изучающий алгебраические структуры, называемые группами, и их свойства. Группа является центральным понятием в общей алгебре, так как многие важные алгебраические структуры, такие как кольца, поля, векторные пространства, являются группами с расширенным набором операций и аксиом. Группы возникают во всех областях математики, и методы теории групп оказывают сильное влияние на многие разделы алгебры. В процессе развития теории групп построен мощный инструментарий, во многом определивший специфику общей алгебры в целом, сформирован собственный глоссарий, элементы которого активно заимствуются смежными разделами математики и приложениями. Наиболее развитые ветви теории групп — линейные алгебраические группы и группы Ли — стали самостоятельными областями математики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- формирование базовых знаний по уравнениям математической физики для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- формирование у обучающихся базовых знаний по теории групп;
- формирование общематематической культуры: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями;
- формирование умений и навыков применять полученные знания для решения задач теории групп, самостоятельного анализа полученных результатов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основы теории групп, определение и простейшие свойства групп, теоремы о гомоморфизмах, определение нормальной подгруппы и фактор-группы, теорему Лагранжа, теорему Кэли, структуру циклических групп; определение действия группы на множестве, свойства орбиты и стабилизатора; основы теории представлений, определение эквивалентных представлений, неприводимого и вполне приводимого представления, лемму Шура и следствия из нее, теорему Машке, определение характера представления, свойства характеров, соотношения ортогональности, число неприводимых представлений конечной группы, теорему о классификации неприводимых представлений конечной группы; определение группы Ли, касательной алгебры, левоинвариантных векторных полей и метрик, свойства гомоморфизмов групп Ли и их дифференциалов, представлений групп и алгебр Ли, классификацию неприводимых представлений алгебры $sl(2)$, групп $SU(2)$ и $SO(3)$, формулу Клебша – Гордана.

уметь:

- находить классы сопряженности и вычислять фактор-группы, исследовать орбиты и стабилизаторы действий групп, находить неприводимые представления конечной группы, вычислять тензорные произведения неприводимых представлений группы $SO(3)$.

владеть:

- аппаратом теории групп их представлений и его приложениями в физике.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Основные сведения о группах.	10	5		20
2	Представления простейших групп Ли.	10	5		20
3	Теория представлений групп.	10	5		20
Итого часов		30	15		60
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Основные сведения о группах.

Определение группы. Примеры групп. Подгруппы и гомоморфизмы. Три теоремы о гомоморфизмах. Фактор-группы. Конечные группы. Теорема Лагранжа. Теорема Кэли. Действия групп на множествах. Орбиты и стабилизаторы. Сопряженные элементы. Централизатор. Кристаллографические группы. Классификация плоских кристаллографических групп.

2. Представления простейших групп Ли.

Группы Ли. Левые и правые сдвиги. Присоединенное представление и коммутатор. Алгебра Ли группы Ли. Гомоморфизмы групп Ли. Связь между представлениями групп и алгебр Ли. Группы $SL(2)$, $SU(2)$ и $SO(3)$. Углы Эйлера. Накрытие $SU(2)$ над $SO(3)$. Неприводимые представления алгебры $sl(2)$. Классификация неприводимых представлений групп $SU(2)$ и $SO(3)$. Тензорное произведение представлений. Разложение на неприводимые тензорного произведения неприводимых представлений $SO(3)$. Формула Клебша - Гордана. Представления групп в физике.

3. Теория представлений групп.

Представления групп. Неприводимые представления. Эквивалентные представления. Примеры.

Унитарные представления. Теорема Машке. Лемма Шура и следствия из нее. Характеристики представлений и их свойства. Центральные функции. Классификация неприводимых представлений конечных групп.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

Фонд литературы кафедры

1. Винберг Э.Б. Линейные представления групп. Наука, 1975.
2. Шейнман О.К. Основы теории представлений. МЦНМО, 2008.
3. И. Р. Шафаревич, А.О. Ремизов. Линейная алгебра и геометрия. Физматлит, 2009.
4. Винберг Э.Б. Курс лекций по высшей алгебре. Наука, 2007.

Дополнительная литература

1. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 2-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2004 .— Ч.1 : Основы алгебры. - 2004. - 272 с.
2. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 3-е изд. — М. : Физматлит, 2004 .— Ч. 2 : Линейная алгебра. - 2004. - 368 с.
3. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— 3-е изд. — М. : Физматлит, 2004 .— Ч. 3 : Основные структуры алгебры. - 2004. - 272 с.

Фонд литературы кафедры

4. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. Наука, 1986.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://math.mipt.ru/study/>
2. <http://dfgm.math.msu.su/materials.php>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

Для контроля и коррекции знаний обучающиеся могут использовать компьютерное тестирование, в том числе на портале www.i-exam.ru.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, Scilab и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях;
- подготовку к практическим занятиям, коллоквиумам, экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций. Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения. Значительно облегчить решение задачи может хорошо выполненный чертеж, если он соответствует условию задачи (прямой угол нарисован прямым, равнобедренный треугольник – равнобедренным и т. д. При подготовке к практическим занятиям необходимо повторять ранее изученные основные определения, формулировки теорем. В начале занятия, как правило, проводится короткий (10-15 минут) опрос по материалу прошедших занятий в устной или письменной форме. Обычно придерживаются следующей схемы: изучение материала лекции по конспекту в тот же день, когда была прослушана лекция (10-15 минут); повторение материала накануне следующей лекции (10-15 минут), проработка учебного материала по конспектам лекций, учебной и научной литературе, подготовка ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения (1 час неделю), подготовка к практическому занятию, решение задач (1 час). Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

Обязательным требованием является выполнение домашних работ, которые оформляются в специально отведённой для этого тетради и систематически сдаются на проверку.

Промежуточный контроль знаний проводится в виде коллоквиумов, на которых студенту предлагается письменно ответить на теоретический вопрос и решить две задачи по теме коллоквиума, а также студенту в ходе освоения курса необходимо выполнить две домашних индивидуальных работы с их последующей защитой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Термоядерная энергетика и плазменные технологии Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра математики и математических методов физики
курс:	<u>4</u>
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Экзамен	
Разработчик:	А.И. Шафаревич, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория групп» обучающийся должен:

знать:

- основы теории групп, определение и простейшие свойства групп, теоремы о гомоморфизмах, определение нормальной подгруппы и фактор-группы, теорему Лагранжа, теорему Кэли, структуру циклических групп; определение действия группы на множестве, свойства орбиты и стабилизатора; основы теории представлений, определение эквивалентных представлений, неприводимого и вполне приводимого представления, лемму Шура и следствия из нее, теорему Машке, определение характера представления, свойства характеров, соотношения ортогональности, число неприводимых представлений конечной группы, теорему о классификации неприводимых представлений конечной группы; определение группы Ли, касательной алгебры, левоинвариантных векторных полей и метрик, свойства гомоморфизмов групп Ли и их дифференциалов, представлений групп и алгебр Ли, классификацию неприводимых представлений алгебры $sl(2)$, групп $SU(2)$ и $SO(3)$, формулу Клебша – Гордана.

уметь:

- находить классы сопряженности и вычислять фактор-группы, исследовать орбиты и стабилизаторы действий групп, находить неприводимые представления конечной группы, вычислять тензорные произведения неприводимых представлений группы $SO(3)$.

владеть:

- аппаратом теории групп их представлений и его приложениями в физике.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В целях текущего контроля успеваемости предусмотрен краткий опрос по темам предыдущих занятий по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Теория групп» осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена в 8 семестре:

1. Определение группы. Примеры групп. Подгруппы и гомоморфизмы.
2. Три теоремы о гомоморфизмах. Фактор-группы.
3. Конечные группы. Теорема Лагранжа. Теорема Кэли.
4. Действия групп на множествах. Орбиты и стабилизаторы. Сопряженные элементы. Централизатор.
5. Кристаллографические группы. Классификация плоских кристаллографических групп.
6. Представления групп. Неприводимые представления.
7. Эквивалентные представления. Примеры.
8. Унитарные представления. Теорема Машке.
9. Лемма Шура и следствия из нее.
10. Характеры представлений и их свойства.
11. Центральные функции. Классификация неприводимых представлений конечных групп.
12. Группы Ли. Левые и правые сдвиги. Присоединенное представление и коммутатор. Алгебра Ли группы Ли.
13. Гомоморфизмы групп Ли. Связь между представлениями групп и алгебр Ли.
14. Группы $SL(2)$, $SU(2)$ и $SO(3)$. Углы Эйлера. Накрытие $SU(2)$ над $SO(3)$.
15. Неприводимые представления алгебры $sl(2)$. Классификация неприводимых представлений групп $SU(2)$ и $SO(3)$.
16. Тензорное произведение представлений. Разложение на неприводимые тензорного произведения неприводимых представлений $SO(3)$. Формула Клебша - Гордана.
17. Представления групп в физике.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Определение группы. Примеры групп. Подгруппы и гомоморфизмы.
2. Лемма Шура и следствия из нее.

Билет №2

1. Три теоремы о гомоморфизмах. Фактор-группы.
2. Характеры представлений и их свойства.

Билет №3

1. Конечные группы. Теорема Лагранжа. Теорема Кэли.
2. Центральные функции. Классификация неприводимых представлений конечных групп.

4. Критерии оценивания

Оценка	Баллы	Критерии
отлично	10	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	9	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.
	8	Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.
хорошо	7	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.
	6	Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.
	5	Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.
удовлетворительно	4	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные

		формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.
	3	Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.
неудовлетворительно	2	Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.
	1	Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении экзамена обучающемуся предоставляется не менее 40 минут на подготовку. Опрос по билету и ответы на дополнительные вопросы не должны превышать двух астрономических часов. По завершении отведенного на опрос времени, экзаменатор должен выставить обучающемуся экзаменационную оценку.