

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Гиперграфы
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Комбинаторика и цифровая экономика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 06.03.2023

## Аннотация

Курс посвящен экстремальным задачам в теории гиперграфов. Изучаются проблемы турановского типа в теории графов и гиперграфов, проблемы теории раскрасок гиперграфов, элементы аддитивной комбинаторики и теории Рамсея. Большое внимание уделяется различным вероятностным методам, лежащим в основе доказательств основных теорем.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- освоение основных понятий теории гиперграфов.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области гиперграфов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области гиперграфов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области гиперграфов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии математических исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, задач, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-3.4 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории случайных гиперграфов;
- современные проблемы соответствующих разделов случайных гиперграфов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных гиперграфов.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных гиперграфов;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных гиперграфов;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Теорема Турана	6	6		9
2	Теорема турановского типа для графов без треугольников	6	6		9
3	Теоремы турановского типа для гиперграфов с большим обхватом	6	6		9
4	Локальная лемма Ловаса и раскраски простых гиперграфов	6	6		9
5	Упаковки гиперграфов	6	6		9
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

###### 1. Теорема Турана

Теорема Эрдеша-Стоуна Числа Турана для гиперграфов.

2. Теорема турановского типа для графов без треугольников

Оценки чисел Рамсея Теоремы Алона и Ширера о графах, не содержащих больших клик.

3. Теоремы турановского типа для гиперграфов с большим обхватом

Проблема Эрдеша-Хайнала о раскрасках гиперграфов Критерий Плухара и теорема Черкашина-Козика.

4. Локальная лемма Ловаса и раскраски простых гиперграфов

Теорема Сауэра о регулярных гиперграфах с большим обхватом Теорема Косточки-Рёдля о конструкции гиперграфов с большим обхватом.

5. Упаковки гиперграфов

Метод контейнеров, теорема Ордентлича-Рота. Элементы аддитивной комбинаторики.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

Основная литература

1. Дискретная математика: логика, группы, графы [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / О. Е. Акимов .— 2-е изд., доп. — М. : Лаб. базовых знаний, 2003 .— 376 с
2. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, О. С. Федько ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2012 .— 248 с.

Дополнительная литература

1. Сборник задач по дискретному анализу. Комбинаторика. Элементы алгебры логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев [и др.] ; М-во образования Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд. — М. : МФТИ, 2000, 2004 .— 100 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru/>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Комбинаторика и цифровая экономика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии математических исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, задач, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-3.4 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Гиперграфы» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории случайных гиперграфов;
- современные проблемы соответствующих разделов случайных гиперграфов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных гиперграфов.

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных гиперграфов;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных гиперграфов;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Теорема Турана для графов. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости произвольного графа. Числа Турана  $ex(n, G)$  для произвольного графа  $G$ . Верхняя оценка числа Турана  $ex(n, K_{s,t})$ , следствие из нее – оценки числа ребер дистанционного графа в  $R^2$  и  $R^3$ .
2. Теорема Эрдеша-Стоуна об асимптотическом поведении  $ex(n, G)$ .
3. Числа Турана  $T(n, k, b)$  для гиперграфов, понятие  $(n, k, b)$ -системы. Рекуррентные неравенства для чисел  $T(n, k, b)$ , простая нижняя оценка  $T(n, k, b)$ . Турановские плотности  $t(k, b)$ , рекуррентное неравенство для турановских плотностей. Верхняя оценка турановской плотности  $t(k, b)$  (конструкция А. Сидоренко). Теорема Турана для гиперграфов и нижняя оценка Спенсера для  $T(n, k, b)$ . Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости  $k$ -однородного гиперграфа. Нижняя оценка для  $t(k, b)$ , ее порядок при фиксированном  $k$  и растущем  $b$ .
4. Теорема Турана для графов с большим обхватом. Нижняя оценка Айтаи-Комлоша-Семереди (теорема Ширера) для числа независимости графа без треугольников со средней степенью вершины  $d$ . Следствие: верхняя оценка числа Рамсея  $R(3, t)$ . Точность оценки в теореме Айтаи-Комлоша-Семереди (существование графов с небольшим числом независимости и ограниченной средней степенью вершины).
5. Верхняя оценка числа Рамсея  $R(s, t)$  при фиксированном  $s$  и растущем  $t$ .
6. Теорема Ширера о числе независимости графа, не содержащего подграфов, изоморфных  $K_r$ .
7. Теорема Алона о нижней оценке числа независимости графа, в котором у каждой вершины подграф его соседей имеет ограниченное хроматическое число.
8. Теорема о нижней оценке числа независимости  $k$ -однородного гиперграфа с обхватом больше 4 и со средней степенью вершины  $d$  ( $b/d$ ). Аналогичная теорема Рёдля-Дьюка-Лефманна для простых гиперграфов. Следствие: опровержение гипотезы Хейлбронна в комбинаторной геометрии.
9. Экстремальная задача Эрдеша-Хайнала о раскрасках гиперграфов, простая верхняя оценка. Вероятностная нижняя оценка  $m(k, r)$ . Следствие: нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Вероятностная верхняя оценка  $m(k, r)$ . Теорема Алона об асимптотическом поведении  $m(k, r)$  при растущем  $r$ .
10. Критерий Плухара  $g$ -раскрашиваемости гиперграфа в терминах существования упорядоченных  $g$ -цепей. Нижняя оценка Радхакришнана-Сринивасана для  $m(k, 2)$  (доказательство Черкашина-Козика).
11. Теорема Эрдеша-Ловаса об оценке максимальной степени ребра (вершины) в однородном гиперграфе с большим хроматическим числом. Следствие: наилучшая нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Задача Эрдеша-Ловаса о раскрасках простых гиперграфов. Их теорема о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом и большим обхватом ( $b/d$ ). Лемма о свойствах простых гиперграфов с большим хроматическим числом. Следствие: нижняя оценка  $m^*(k, r)$ . Теорема Косточки-Мубай-Рёдля-Тетали о нижней оценке  $m^*(k, r)$  при больших  $r$ .
12. Теорема Сауэра о существовании однородных регулярных гиперграфов с большим обхватом.
13. Теорема Косточки-Рёдля о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом, большим обхватом и ограниченными степенями вершин.
14. Упаковки гиперграфов, теорема Лу-Секеи об отрицательных корреляциях в пространстве случайных биекций. Теорема о достаточном условии упаковки гиперграфов. Следствия: достаточное условие совершенной  $G$ -упаковки; оценка для нижней степени вершины, гарантирующей существование совершенного  $k$ -сочетания.
15. Метод контейнеров, теорема Ордентлича-Рота о числе сильных независимых множеств в однородных регулярных простых гиперграфах.
16. Числа Ван дер Вардена  $W(k, r)$ , нижняя оценка в общем случае. Оценки  $W(3, r)$ : нижняя оценка Мозера, верхняя оценка Грэма-Шолимоши



#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Основные определения и понятия.
2. Графические последовательности. Алгоритм определения, графические последовательности и теорема Галлаи-Эрдёша.
3. Связность. Остовное дерево. Различные задачи об остовных деревьях.
4. Простейшие задачи экстремальной теории графов.
5. Число независимости и кликовое число. Теорема Рамсея (напоминание) и  $(p, q)$ -свойство. Функция независимости графа. Критерий двудольности и функция независимости. Задачи рамсеевского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.
6. Трансверсаль в графе и число независимости. Реберные графы и теорема Галлаи о максимальном парасочетании.
7. Локальные теоремы Галлаи-Эрдёша о числе вершин и теорема Боллобаша о числе рёбер, гарантирующие существование  $k$ -трансверсали. Обобщения этих теорем для гиперграфов.
8. Задача Турана. Теорема Мощкина-Стросса. Обобщения для гиперграфов. Задачи туранского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.
9. Обобщения задачи Турана для графов и гиперграфов.
10. Экстремальная задача о графах без циклов длины 4 и конечные проективные плоскости.
11. Шенновская ёмкость графов и теорема Ловаса о ёмкости цикла длины 5.

Билет 1:

1. Задача Турана. Теорема Мощкина-Стросса. Обобщения для гиперграфов. Задачи туранского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.
2. Связность. Остовное дерево. Различные задачи об остовных деревьях.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.