

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Комбинаторика и теория графов
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Современная комбинаторика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Д.Г. Ильинский, канд. экон. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 30.01.2025

Аннотация

Одна из основных задач курса - обучить студентов методам мышления, характерным для дискретной математики, основным понятиям комбинаторики и теории графов, а также развитию навыков алгоритмического мышления. В курсе слушатели знакомятся с наиболее важными областями и инструментами современной комбинаторики, здесь не только классические комбинаторные величины и тождества, но также и общая теория обращения Мебиуса, и диаграммы Юнга, и рекурсия, и производящие функции. Кроме того, курс служит введением в современную теорию графов. Рассматриваются

классические задачи теории графов, современные результаты и тенденции, например, затрагивается экстремальная теория графов.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- освоение базовых понятий комбинаторики и графов.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепции, методы и модели) в области комбинаторики и графиков;
- приобретение теоретических знаний и практических навыков в области комбинаторики и графиков;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области комбинаторики и графиков.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-4 Способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия	УК-4.3 Способен представлять результаты академической и профессиональной деятельности на различных научных мероприятиях, включая международные
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные правила и принципы комбинаторики и теории графов;
- основные комбинаторные величины и тождества с ними;
- основы теории обращения Мебиуса;
- основы теории разбиений;
- основы метода производящих функций, линейных рекуррентных соотношений и их решений;
- различные виды, характеристики и свойств графов;
- правильные раскраски графов.

уметь:

- решать простейшие комбинаторные задачи и теории графов;
- доказывать тождества;
- упрощать выражения, содержащие биномиальные коэффициенты;
- вычислять количества упорядоченных и неупорядоченных разбиений;
- находить формулы для линейных рекуррентных соотношений;
- вычислять производящие функции;
- уметь разными способами определять деревья и перечислять их.

владеть:

- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов теории графов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Основные принципы комбинаторики	2	2		6
2	Бином Ньютона. Полиномиальная формула. Формула включений и исключений	2	2		6
3	Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства.	2	2		6
4	Базовые понятия теории графов	4	4		5
5	Эквивалентные определения дерева, формула Кэли	4	4		5
6	Планарные графы, формула Эйлера	4	4		5
7	Унициклические графы и Эйлеровы циклы	4	4		4
8	Гамильтоновы циклы	4	4		4
9	Основные теоремы	4	4		4
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Основные принципы комбинаторики

Правило сложения. Правило умножения. Принцип Дирихле. Пример применения принципа Дирихле. Теорема о раскраске множества в два цвета(*). Мощности множества попарно неортогональных $\{-1,0,1\}$ -векторов : верхняя и нижняя оценки. Числа сочетаний, размещений и перестановок.

2. Бином Ньютона. Полиномиальная формула. Формула включений и исключений

Простейшие тождества. Треугольник Паскаля. Сумма биномиальных и полиномиальных коэффициентов. Сумма квадратов биномиальных коэффициентов. Формулы для суммы степеней натуральных чисел. Знакопеременное тождество.

3. Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства.

Повторение предыдущей лекции. Число сочетаний без повторений. Мыши в лаборатории. Коллекционеры. Кости домино. Число сочетаний с повторениями. Пример с сортами пирожных. Число сочетаний с повторениями. Число сочетаний с повторениями. Букеты из роз. Тренировочная группа.

4. Базовые понятия теории графов

Примеры графов, граф и его изображения. Ориентированные графы. Кёнигсбергские мосты. Граф интернета. Маршруты в графах. Связность, подграфы. Степень вершины.

5. Эквивалентные определения дерева, формула Кэли

Деревья, эквивалентные определения дерева. Теорема об эквивалентных определениях дерева и ее доказательство. Число деревьев. Построение кодов Прюфера. Взаимно однозначное соответствие кодов и деревьев, декодирование.

6. Планарные графы, формула Эйлера

Планарность, гипотеза о четырех красках. Примеры непланарных графов. Критерий Куратовского

Плоские графы, грани и теорема Жордана. Формула Эйлера. Хроматическое число планарных графов и доказательство оценки хроматического числа.

7. Унициклические графы и Эйлеровы циклы

Формула для числа унициклических графов и ее доказательство. Эйлеровы циклы. Критерий эйлеровости и его доказательство.

8. Гамильтоновы циклы

Гамильтоновы циклы, теорема Дирака и ее доказательство. Множества соседей концов максимального пути. Независимые множества. Вершинная связность, критерий Хватала. Подграф без максимального цикла. Соседи связной компоненты. Соседи компоненты и максимальный цикл. Число соседей больше связности. Пример гамильтонова графа.

Сравнение двух признаков гамильтоновости.

9. Основные теоремы

Теорема Холла. Теорема Кёнига. Теорема Турана. Аналог теоремы Турана. Теория Рамсея.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Комбинаторика и теория вероятностей [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— Долгопрудный : Интеллект, 2013 .— 104 с.

1. Комбинаторика и информатика [Текст]. Ч. 1. Комбинаторный анализ : учеб. пособие / В. К. Леонтьев; Моск. физ.- техн. ин-т (гос. ун-т) .— М : МФТИ , 2015 .— 174 с. + pdf-версия. - Библиогр.: с. 173. - 250 экз. - ISBN 978-5-7417-0545-2. — Полный текст (Доступ из сети МФТИ).
2. Комбинаторика и информация [Текст]. Ч. 2. Информационные модели : учеб. пособие для вузов / В. К. Леонтьев ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2016 .— 112 с. + pdf-версия. - Библиогр.: с. 111. - 250 экз. - ISBN 978-5-74170586-5 .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ).

Дополнительная литература

1. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, О. С. Федько ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2012 .— 248 с.
2. Сборник задач по дискретному анализу. Комбинаторика. Элементы алгебры логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев [и др.] ; М-во образования Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд. — М. : МФТИ, 2000, 2004 .— 100 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Современная комбинаторика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
Разработчик:	Д.Г. Ильинский, канд. экон. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-4 Способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия	УК-4.3 Способен представлять результаты академической и профессиональной деятельности на различных научных мероприятиях, включая международные
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий; владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Комбинаторика и теория графов» обучающийся должен:

знать:

- основные правила и принципы комбинаторики и теории графов;
- основные комбинаторные величины и тождества с ними;
- основы теории обращения Мёбиуса;
- основы теории разбиений;
- основы метода производящих функций, линейных рекуррентных соотношений и их решений;
- различные виды, характеристики и свойств графов;
- правильные раскраски графов.

уметь:

- решать простейшие комбинаторные задачи и теории графов;
- доказывать тождества;
- упрощать выражения, содержащие биномиальные коэффициенты;
- вычислять количества упорядоченных и неупорядоченных разбиений;
- находить формулы для линейных рекуррентных соотношений;
- вычислять производящие функции;
- уметь разными способами определять деревья и перечислять их.

владеть:

- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов теории графов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень вопросов к экзамену:

1. Правило сложения. Правило умножения. Принцип Дирихле.

2. Основные комбинаторные величины и их свойства. Размещения.
3. Сочетания с повторениями и без.
4. Комбинаторные тождества. Биномиальные коэффициенты. Тождества с биномиальными коэффициентами.
5. Полиномиальный коэффициент. Полиномиальная формула.
6. Формула включений и исключений. Применение формулы включений и исключений.
7. Выравнивания. Пример вычисления выравниваний.
8. Формула обращения Мёбиуса.
9. Понятие графа и виды графов.
10. Различные применения графов: от Кенигсбергских мостов до Интернета.
11. Связность графа, подграфы и степень вершины.
12. Эквивалентные определения деревьев.
13. Планарность и критерий Куратовского
14. Формула Эйлера.
15. Хроматическое число планарного графа.
16. Перечисление деревьев: код Прюфера и формула Кэли.

Билет 1:

1. Формула для числа унициклических графов.
2. Эйлеровы циклы и критерий эйлеровости.

Билет 2:

1. Гамильтоновы циклы. Критерий Дирака и критерий Хватала.
2. Паросочетания. Теорема Холла и Кенига.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.