

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Введение в теорию случайных графов
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Современная комбинаторика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составили:

Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

Курс посвящен классической теории случайных графов. Изучаются общая теория случайных подмножеств, распределения числа малых подграфов в случайном графе, эволюция случайного графа, вопросы о связности случайного графа.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение основных понятий теории случайных графов.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области случайных графов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области случайных графов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических ис-следований в области случайных графов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
	УК-2.4 Представляет публично результаты проекта (или отдельных его этапов) в форме отчетов, статей, выступлений на научно-практических конференциях, семинарах и т.п.
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Организует и координирует работу участников проекта, способствует конструктивному преодолению возникающих разногласий и конфликтов
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории случайных графов;
- современные проблемы соответствующих разделов случайных графов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных графов.

уметь:

понять поставленную задачу;
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных графов;
 оценивать корректность постановок задач;
 строго доказывать или опровергать утверждение;
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
 точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных графов;
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона.	6	6		5
2	Закон нуля или единицы для случайного графа.	4	4		8
3	Метод моментов.	4	4		8
4	Модели случайных графов.	4	4		8
5	Пороговые вероятности.	4	4		8
6	Теория случайных подмножеств, биномиальная и равномерная модели.	8	8		8
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона.

Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа.

2. Закон нуля или единицы для случайного графа.

Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств. Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры.

3. Метод моментов.

Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами.

4. Модели случайных графов.

Классические модели: биномиальная и равномерная.

5. Пороговые вероятности.

Обладание монотонными свойствами случайным подмножеством.

6. Теория случайных подмножеств, биномиальная и равномерная модели.

Монотонные свойства конечных подмножеств.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Модели случайных графов [Текст]/А. М. Райгородский, -М., МЦНМО, 2016
Вероятностный метод [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. Алон, Дж. Спенсер ; пер. 2-го англ. изд. под ред. А. А. Сапоженко. — М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2007, 2013, 2015 (эл.) .— 320 с. : ил. + pdf - версия. - Библиогр.: с. 305-313. - Предм. указ.: с. 314-318. - Имен. указ.: с. 319-320. - 400 экз. - ISBN 978-5-94774-556-6 (в пер.) .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

Дополнительная литература

1. Графы. Алгоритмы на языке C [Текст] / В. В. Прут ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ, 2017

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Современная комбинаторика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Разработчики:

Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент
М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
	УК-2.4 Представляет публично результаты проекта (или отдельных его этапов) в форме отчетов, статей, выступлений на научно-практических конференциях, семинарах и т.п.
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Организует и координирует работу участников проекта, способствует конструктивному преодолению возникающих разногласий и конфликтов
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в теорию случайных графов» обучающийся должен:

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории случайных графов;
современные проблемы соответствующих разделов случайных графов;
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
основные свойства соответствующих математических объектов;
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных графов.

уметь:

понять поставленную задачу;
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных графов;
оценивать корректность постановок задач;
строго доказывать или опровергать утверждение;
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных графов;
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1) В случайном процессе $\tilde{\Gamma} = \{\Gamma(m), m=0, \dots, N\}$ для возрастающего свойства Q определим $m^*_{\text{cal } Q} = \min\{m: \tilde{\Gamma}(m) \geq \text{cal } Q\}$. Докажите, что \widehat{m} является пороговой функцией для $\text{cal } Q$ тогда и только тогда, когда $m^*_{\text{cal } Q} = \Theta_P(\widehat{m})$, т.е. для любой положительной функции $w(n) \rightarrow \infty$ выполнено

\$\$

$$\left\{ \frac{1}{w(n)} \widehat{m} \leq m^*_{\text{cal } Q} \leq w(n) \widehat{m} \right\} \rightarrow 1.$$

1.

\$\$

2) Докажите, что в равномерной модели случайных подмножеств для монотонного свойства $\text{cal } Q$ существует точная пороговая функция тогда и только тогда, когда

\$\$

$$\frac{m^*_{\text{cal } Q}}{m(1/2; n)} \stackrel{P}{\rightarrow} 1.$$

\$\$.

3). Пусть X – число пар непересекающихся треугольников в случайном графе $G(n, p)$. Пусть $np \rightarrow c > 0$. Найдите предельное распределение случайной величины X с ростом n .

4). Пусть $G = \{1, \dots, n\}$. Найдите пороговую вероятность в $G(n, p)$ для свойства содержать арифметическую прогрессию длины k .

5) Пусть $np \rightarrow c$, $c > 1$. Докажите, что с вероятностью, стремящейся к 1, гигантская компонента является единственной сложной компонентой в случайном графе $G(n, p)$.

6) Докажите, что в модели $G(\lambda)$ максимальный размер древесной компоненты имеет порядок $\Omega_P(n^{2/3})$, т.е. для любой $w(n) \rightarrow 0$ в случайном графе найдется древесная компонента размера не меньше $n^{2/3} w(n)$.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Вопросы к экзамену:

1. Модели случайных графов. Классические модели: биномиальная и равномерная. Графовые случайные процессы. Общая теория случайных подмножеств, биномиальная и равномерная модели.

2. Монотонные свойства конечных подмножеств. Примеры. Лемма о монотонности вероятности обладания монотонным свойством для случайного подмножества. Выпуклые свойства, примеры.

3. Асимптотическая эквивалентность моделей $\Gamma(p)$ и $\Gamma(m)$: одинаковое асимптотическое поведение вероятности обладания свойством для случайных подмножеств в этих моделях. Две леммы и итоговое следствие для монотонных свойств.

4. Пороговые вероятности и пороговые функции обладания монотонными свойствами случайным подмножеством. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства Q . Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств. Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры.

5. Малые подграфы в случайном графе $G(n, p)$. Функция $m(G)$, сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу G . Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа $G(n, p)$, изоморфного данному фиксированному графу G .

6. Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами. Примеры таких случайных величин. Плотность и относительная компактность семейства вероятностных мер в метрическом пространстве. Теорема Прохорова, следствие из нее. Многомерный метод моментов.

7. Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу G . Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы. Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу G .

8. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np \rightarrow 0$: максимальный размер и структура компонент связности. Предельные теоремы для числа компонент фиксированного размера.
9. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c \in (0, 1)$: теорема о максимальном размере компоненты связности. Сложные и унициклические компоненты в таком графе — предельные теоремы для числа таких компонент. Общее число вершин в унициклических компонентах.
10. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c > 1$. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Уравнение для нахождения вероятности вырождения. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса. Теорема о размере максимальной связной компоненты случайного графа. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты.
11. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа. Лемма об отсутствии сложных компонент маленького размера. Ограниченность максимальной сложности компоненты в случайном графе. Следствие: количество, размер и сложность сложных компонент.
12. Свойства первого порядка в случайных графах.
13. Законы нуля или единицы.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Максимальный размер унициклических и сложных компонент.
2. Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами.

Билет №2

1. Пороговые вероятности и пороговые функции обладания монотонными свойствами случайным подмножеством.
2. Свойства первого порядка в случайных графах.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.