

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Введение в теорию вероятностей
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Современная комбинаторика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 30.01.2025

Аннотация

Курс предназначен для магистров математики, интересующихся современными методами дискретной математики и приложениями вероятностей в информатике. В курс включены все основные определения и положения теории вероятностей: аксиоматика Колмогорова, распределения, случайные величины и векторы, математическое ожидание, вероятностные неравенства, законы больших чисел и центральная предельная теорема.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение основных современных методов теории вероятностей.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в теории вероятностей;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в теории вероятностей;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в теории вероятностей.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационно-коммуникационных технологий и информационных систем, задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;
- современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикл;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в теории вероятностей в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком теории вероятностей и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Дискретные вероятностные пространства.	6	6		8
2	Независимость произвольного набора случайных величин.	6	6		8
3	Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах.	6	6		8
4	Случайные элементы, случайные величины и векторы.	6	6		7
5	Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (док-во единственности).	2	2		7
6	Условные вероятности.	4	4		7
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Дискретные вероятностные пространства.

Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.

2. Независимость произвольного набора случайных величин.

Независимость произвольного набора случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся наборов независимых случайных величин.

3. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах.

Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Независимость случайных величин. Математическое ожидание случайной величины, его основные свойства. Дисперсия, ковариация и их свойства.

4. Случайные элементы, случайные величины и векторы.

Случайные элементы, случайные величины и векторы. Достаточное условие измеримости отображения, следствия для случайных величин и векторов. Действия над случайными величинами.

5. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (док-во единственности).

Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (док-во единственности). Теорема Лебега о функции распределения.

6. Условные вероятности.

Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вероятность [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов / А. Н. Ширяев .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МЦНМО, 2004 .— Т. 1 : Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. - 2004. - 520 с.
2. Курс теории вероятностей [Текст] : учеб. пособ. для вузов / В. П. Чистяков .— 4-е изд., испр. — М. : Агар, 1996 .— 256 с.
3. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб.пособие для вузов:рек.М-вом образования РФ .— 12-е изд.,перераб. — М. : Высшее образование, 2008 .— 479с.
4. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику для физиков [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. М. Чеботарев ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— М. : Изд-во МФТИ, 2009 .— 248 с.

Дополнительная литература

1. Линейная алгебра [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— 3 - е изд., доп. — М. : Наука, 1984 .— 295 с.
2. Введение в теорию вероятностей и ее приложения [Текст] : в 2 т : учеб. пособие для вузов. Т. 2 / В.Феллер ; пер. со 2-го англ. изд. Ю. В. Прохорова .— М. : Мир, 1984 .— 738 с.
3. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман .— 3-е изд. доп. — М. : Высш.школа, 1966 .— 379 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Современная комбинаторика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
Разработчик:	М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационно-коммуникационных технологий и информационных систем, задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в теорию вероятностей» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;
- современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в теории вероятностей в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком теории вероятностей и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Вероятностное пространство. Аксиомы Колмогорова. Теорема о непрерывности в "нуле" вероятностной меры.
2. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.
3. Геометрические вероятности. Примеры.
4. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Примеры.
5. Теорема о монотонных классах.
6. Независимость событий и систем событий. Пример Бернштейна. Лемма о достаточном условии независимости сигма-алгебр.
7. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (док-во единственности).
8. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Независимость случайных величин. Математическое ожидание случайной величины, его основные свойства. Дисперсия, ковариация и их свойства.
9. Случайные элементы, случайные величины и векторы. Достаточное условие измеримости отображения, следствия для случайных величин и векторов. Действия над случайными величинами.
10. Независимость произвольного набора случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся наборов независимых случайных величин.
11. Математическое ожидание случайной величины (интеграл Лебега по вероятностной мере): определение для простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Проверка корректности определений.
12. Основные свойства математического ожидания. Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин.
13. Дисперсия, ковариация и их свойства. Неравенство Коши - Буняковского. Дисперсия суммы независимых случайных величин. Матрица ковариаций случайного вектора, ее неотрицательная определенность.
14. Неравенство Маркова, Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Иенсена.
15. Виды сходимости случайных величин, их взаимосвязи. Критерий Коши сходимости с вероятностью 1.
16. Неравенство Колмогорова. Теорема о сходимости почти на верного ряда из случайных величин.
17. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями.
18. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема о монотонной сходимости, лемма Фату, теорема Лебега о мажорированной сходимости.
19. Лемма Бореля Кантелли. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожиданием.
20. Формула пересчета математических ожиданий. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега.
21. Теорема единственности для характеристических функций вероятностных. Независимость компонент случайного вектора в терминах характеристических функций.
22. Теорема непрерывности для характеристических функций (б/д). Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.
23. Теорема Берри Эссеена о скорости сходимости в центральной предельной теореме (б/д). Оценки константы в теореме Берри Эссеена.

Билет 1:

1. Прямое произведение вероятностных пространств. Теорема Фубини (б/д). Совместное распределение конечного набора случайных величин. Свертка распределений.
2. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер. Теорема Александрова (б/д). Теорема об эквивалентности сходимости по распределению случайных величин и сходимости функций распределения во всех точках непрерывности предельной функции.

Билет 2:

1. Схема испытаний Бернулли и полиномиальная схема. Предельные теоремы для схемы Бернулли: теорема Пуассона и теорема Муавра-Лапласа (б/д).
2. Характеристические функции вероятностных мер. функций распределения, случайных величин и векторов. Примеры. Основные свойства характеристических функций случайных величин.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.