

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Гиперграфы
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Современная комбинаторика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

Аннотация курса: курс посвящен экстремальным задачам в теории гиперграфов. Изучаются проблемы турановского типа в теории графов и гиперграфов, проблемы теории раскрасок гиперграфов, элементы аддитивной комбинаторики и теории Рамсея. Большое внимание уделяется различным вероятностным методам, лежащим в основе доказательств основных теорем.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение основных понятий теории гиперграфов.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области гиперграфов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области гиперграфов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области гиперграфов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории случайных гиперграфов;
- современные проблемы соответствующих разделов случайных гиперграфов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных гиперграфов.

уметь:

понять поставленную задачу;
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных гиперграфов;
 оценивать корректность постановок задач;
 строго доказывать или опровергать утверждение;
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
 точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных гиперграфов;
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Теорема Турана	6	6		6
2	Теорема турановского типа для графов без треугольников	6	6		6
3	Теоремы турановского типа для гиперграфов с большим обхватом	6	6		6
4	Локальная лемма Ловаса и раскраски простых гиперграфов	6	6		6
5	Упаковки гиперграфов	6	6		6
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Теорема Турана

Теорема Эрдеша-Стоуна Числа Турана для гиперграфов

2. Теорема турановского типа для графов без треугольников

Оценки чисел Рамсея Теоремы Алона и Ширера о графах, не содержащих больших клик

3. Теоремы турановского типа для гиперграфов с большим обхватом

Проблема Эрдеша-Хайнала о раскрасках гиперграфов Критерий Плухара и теорема Черкашина-Козица

4. Локальная лемма Ловаса и раскраски простых гиперграфов

Теорема Сауэра о регулярных гиперграфах с большим обхватом Теорема Косточки-Рёдля о конструкции гиперграфов с большим обхватом

5. Упаковки гиперграфов

Метод контейнеров, теорема Орденглича-Рота Элементы аддитивной комбинаторики

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Дискретная математика: логика, группы, графы [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / О. Е. Акимов .— 2-е изд., доп. — М. : Лаб. базовых знаний, 2003 .— 376 с
2. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, О. С. Федько ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2012 .— 248 с.

Дополнительная литература

1. Сборник задач по дискретному анализу. Комбинаторика. Элементы алгебры логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев [и др.] ; М-во образования Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд. — М. : МФТИ, 2000, 2004 .— 100 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Современная комбинаторика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Гиперграфы» обучающийся должен:

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории случайных гиперграфов;
современные проблемы соответствующих разделов случайных гиперграфов;
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
основные свойства соответствующих математических объектов;
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных гиперграфов.

уметь:

понять поставленную задачу;
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных гиперграфов;
оценивать корректность постановок задач;
строго доказывать или опровергать утверждение;
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных гиперграфов;
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Теорема Турана для графов. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости произвольного графа. Числа Турана $ex(n, G)$ для произвольного графа G . Верхняя оценка числа Турана $ex(n, K_{s,t})$, следствие из нее – оценки числа ребер дистанционного графа в R^2 и R^3 .
2. Теорема Эрдеша-Стоуна об асимптотическом поведении $ex(n, G)$.

3. Числа Турана $T(n,k,b)$ для гиперграфов, понятие (n,k,b) -системы. Рекуррентные неравенства для чисел $T(n,k,b)$, простая нижняя оценка $T(n,k,b)$. Турановские плотности $t(k,b)$, рекуррентное неравенство для турановских плотностей. Верхняя оценка турановской плотности $t(k,b)$ (конструкция А. Сидоренко). Теорема Турана для гиперграфов и нижняя оценка Спенсера для $T(n,k,b)$. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости k -однородного гиперграфа. Нижняя оценка для $t(k,b)$, ее порядок при фиксированном k и растущем b .

4. Теорема Турана для графов с большим обхватом. Нижняя оценка Айтаи-Комлоша-Семереди (теорема Ширера) для числа независимости графа без треугольников со средней степенью вершины d . Следствие: верхняя оценка числа Рамсея $R(3,t)$. Точность оценки в теореме Айтаи-Комлоша-Семереди (существование графов с небольшим числом независимости и ограниченной средней степенью вершины).

5. Верхняя оценка числа Рамсея $R(s,t)$ при фиксированном s и растущем t .

6. Теорема Ширера о числе независимости графа, не содержащего подграфов, изоморфных K_r .

7. Теорема Алона о нижней оценке числа независимости графа, в котором у каждой вершины подграф его соседей имеет ограниченное хроматическое число.

8. Теорема о нижней оценке числа независимости k -однородного гиперграфа с обхватом больше 4 и со средней степенью вершины d (б/д). Аналогичная теорема Рёдля-Дьюка-Лефманна для простых гиперграфов. Следствие: опровержение гипотезы Хейлбронна в комбинаторной геометрии.

9. Экстремальная задача Эрдеша-Хайнала о раскрасках гиперграфов, простая верхняя оценка. Вероятностная нижняя оценка $m(k,r)$. Следствие: нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Вероятностная верхняя оценка $m(k,r)$. Теорема Алона об асимптотическом поведении $m(k,r)$ при растущем r .

10. Критерий Плухара r -раскрашиваемости гиперграфа в терминах существования упорядоченных r -цепей. Нижняя оценка Радхакришнана-Сринивасана для $m(k,2)$ (доказательство Черкашина-Козика).

11. Теорема Эрдеша-Ловаса об оценке максимальной степени ребра (вершины) в однородном гиперграфе с большим хроматическим числом. Следствие: наилучшая нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Задача Эрдеша-Ловаса о раскрасках простых гиперграфов. Их теорема о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом и большим обхватом (б/д). Лемма о свойствах простых гиперграфов с большим хроматическим числом. Следствие: нижняя оценка $m^*(k,r)$. Теорема Косточки-Мубай-Рёдля-Тетали о нижней оценке $m^*(k,r)$ при больших r .

12. Теорема Сауэра о существовании однородных регулярных гиперграфов с большим обхватом.

13. Теорема Косточки-Рёдля о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом, большим обхватом и ограниченными степенями вершин.

14. Упаковки гиперграфов, теорема Лу-Секеи об отрицательных корреляциях в пространстве случайных биекций. Теорема о достаточном условии упаковки гиперграфов. Следствия: достаточное условие совершенной G -упаковки; оценка для нижней степени вершины, гарантирующей существование совершенного k -сочетания.

15. Метод контейнеров, теорема Орденглича-Рота о числе сильных независимых множеств в однородных регулярных простых гиперграфах.

16. Числа Ван дер Вардена $W(k,r)$, нижняя оценка в общем случае. Оценки $W(3,r)$: нижняя оценка Мозера, верхняя оценка Грэма-Шолимоши

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Основные определения и понятия.
2. Графические последовательности. Алгоритм определения, графические последовательности и теорема Галлаи-Эрдёша.
3. Связность. Остовное дерево. Различные задачи об остовных деревьях.
4. Простейшие задачи экстремальной теории графов.
5. Число независимости и кликовое число. Теорема Рамсея (напоминание) и (p, q) -свойство. Функция независимости графа. Критерий двудольности и функция независимости. Задачи рамсеевского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.

6. Трансверсаль в графе и число независимости. Реберные графы и теорема Галлаи о максимальном парасочетании.
7. Локальные теоремы Галлаи-Эрдёша о числе вершин и теорема Боллобаша о числе рёбер, гарантирующие существование k -трансверсали. Обобщения этих теорем для гиперграфов.
8. Задача Турана. Теорема Моцкина-Стросса. Обобщения для гиперграфов. Задачи туранского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.
9. Обобщения задачи Турана для графов и гиперграфов.
10. Экстремальная задача о графах без циклов длины 4 и конечные проективные плоскости.
11. Шенновская ёмкость графов и теорема Ловаса о ёмкости цикла длины 5.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.