

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Алгебра и анализ
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Современная комбинаторика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: Н.В. Богачев, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 30.01.2025

## Аннотация

О чем этот курс? Линейная алгебра - это, грубо говоря, «линейная часть» геометрии конечномерных пространств. Он изучает векторные и аффинные пространства, линейные операторы и аффинные преобразования, а также евклидовы и эрмитовы структуры. Линейная алгебра имеет важные приложения в чистой математике, информатике, физике, технике и многих других областях. Однако сама по себе эта тема очень интересна. Его важная особенность - красивое сочетание алгебры и геометрии. Предположим, мы выполняем какое-то преобразование, такое как отражение или растяжение пространства. Как меняются геометрические объекты при этой трансформации? А что остается неизменным, т.е. каковы инварианты этого преобразования? Линейная алгебра дает ответы на эти и другие подобные вопросы.

Ваша итоговая оценка будет основана на результатах вашего теста, вашей домашней работе и заключительном письменном экзамене.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Теоретическая и практическая разработка основных разделов линейной алгебры и аналитической геометрии. Курс должен дать студентам представление о математической строгости доказательств. Особое внимание уделяется практическому применению методов линейной алгебры в различных математических и междисциплинарных задачах, возможности применения аппарата линейной алгебры к широкому кругу задач.

### Задачи дисциплины

- приобретение студентами теоретических знаний и практических навыков в области векторной алгебры, матричной алгебры;
- подготовка студентов к изучению дополнительных математических дисциплин;
- приобретение навыков применения аналитических методов в физике и других естественных науках.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Организует и координирует работу участников проекта, способствует конструктивному преодолению возникающих разногласий и конфликтов
	УК-3.2 Учитывает в своей социальной и профессиональной деятельности интересы, особенности поведения и мнения (включая критические) людей, с которыми работает/взаимодействует, в том числе посредством корректировки своих действий

цели	УК-3.3 Способен предвидеть результаты (последствия) как личных, так и коллективных действий
	УК-3.4 Способен планировать командную работу, распределять поручения членам команды, организовать обсуждение разных идей и мнений
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии математических исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.2 Имеет практически опыт использования существующих методов и алгоритмов решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационно-коммуникационных технологий и информационных систем, задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия линейной алгебры: векторное пространство, линейные функции и операторы, билинейные формы, матрица, собственные значения и собственные значения;
- основные понятия общей алгебры: группы, кольца, поля;
- идеи координатного метода в аналитической геометрии;
- ключевые теоремы линейной алгебры: теорема матричного ранга, теорема изоморфизма линейного пространства, теорема Жордана о нормальной форме, теорема Кронекера, теоремы о приведении квадратичной формы и пары форм к канонической форме.

уметь:

- решать системы линейных алгебраических уравнений;
- выполнять замену координат для линейных и билинейных функций, линейных операторов;
- найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора;
- привести к каноническому виду матрицы квадратичной формы и линейного оператора;
- решать основные задачи аналитической геометрии;
- доказать ключевые теоремы линейной и общей алгебры;
- использовать аппарат линейной алгебры для решения прикладных задач.

владеть:

- общие понятия и определения, связанные с векторами: линейная независимость, базис, ориентация плоскости и пространства;
- ортогональная и аффинная классификация прямых и поверхностей второго порядка.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Векторные пространства. Линейная независимость. Основа. Измерение. Линейные карты. Координаты.	5	5		15
2	Аффинные преобразования и движения.	4	4		15
3	Симметричные билинейные функции (формы). Квадратичные формы. Инерционный закон. Ортогональный базис для симметричных билинейных форм.	4	4		15
4	Линейные операторы. Собственные пространства.	2	2		15
Итого часов		15	15		60
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

##### Семестр: 1 (Осенний)

1. Векторные пространства. Линейная независимость. Основа. Размер. Линейные карты. Координаты.

Аффинные пространства. Аффинная оболочка. Евклидова аффинная геометрия

2. Аффинные преобразования и движения.

Билинейные функции (формы)

3. Симметричные билинейные функции (формы). Квадратичные формы. Инерционный закон. Ортогональный базис для симметричных билинейных форм.

Евклидово и эрмитово пространства. Матрицы Грама. Евклидовы аффинные пространства. Выпуклые множества и выпуклые многогранники. Теорема Минковского-Вейля.

4. Линейные операторы. Собственные пространства.

Диагонализация симметричных операторов. Полярное разложение.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

стандартная аудиторная

#### 6.Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Линейная алгебра [Текст], учебник для вузов /В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. М., ФИЗМАТЛИТ, 2014
2. Линейная алгебра и некоторые ее приложения [Текст] : учеб. пособие для вузов / Л. И. Головина .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1979 .— 392 с.

#### Дополнительная литература

1. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : МФТИ, 2011 .— 544 с.

#### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

#### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Мультимедийные технологии можно использовать на лекциях и практических занятиях, в том числе на презентациях.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего использовать лекционные материалы.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Современная комбинаторика  
центр дополнительного, дополнительного профессионального и  
онлайн-образования "Пуск"  
кафедра дискретной математики  
**курс:** 1  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** Н.В. Богачев, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
УК-3 Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели	УК-3.1 Организует и координирует работу участников проекта, способствует конструктивному преодолению возникающих разногласий и конфликтов
	УК-3.2 Учитывает в своей социальной и профессиональной деятельности интересы, особенности поведения и мнения (включая критические) людей, с которыми работает/взаимодействует, в том числе посредством корректировки своих действий
	УК-3.3 Способен предвидеть результаты (последствия) как личных, так и коллективных действий
	УК-3.4 Способен планировать командную работу, распределять поручения членам команды, организовать обсуждение разных идей и мнений
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии математических исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат и алгоритмы, основные законы естествознания, современные языки программирования и программное обеспечение; операционные системы и сетевые технологии	ПК-2.2 Имеет практически опыт использования существующих методов и алгоритмов решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического разыскания и описания, опыт работы с научными источниками
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационно-коммуникационных технологий и информационных систем, задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгебра и анализ» обучающийся должен:

### знать:

- основные понятия линейной алгебры: векторное пространство, линейные функции и операторы, билинейные формы, матрица, собственные значения и собственные значения;
- основные понятия общей алгебры: группы, кольца, поля;
- идеи координатного метода в аналитической геометрии;
- ключевые теоремы линейной алгебры: теорема матричного ранга, теорема изоморфизма линейного пространства, теорема Жордана о нормальной форме, теорема Кронекера, теоремы о приведении квадратичной формы и пары форм к канонической форме.

### уметь:

- решать системы линейных алгебраических уравнений;
- выполнять замену координат для линейных и билинейных функций, линейных операторов;
- найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора;
- привести к каноническому виду матрицы квадратичной формы и линейного оператора;
- решать основные задачи аналитической геометрии;
- доказать ключевые теоремы линейной и общей алгебры;
- использовать аппарат линейной алгебры для решения прикладных задач.

### владеть:

- общие понятия и определения, связанные с векторами: линейная независимость, базис, ориентация плоскости и пространства;
- ортогональная и аффинная классификация прямых и поверхностей второго порядка.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

### Примеры заданий

1. Найдите базис и размерность пространства многочленов  $p(x)$  степени 4, таких что  $p(5)=0$ .
2. Докажите, что пространство непрерывных функций на отрезке  $[0,1]$  бесконечномерно.
3. Докажите, что если многогранник является одновременно простым и симплицальным, то он либо симплекс, либо многоугольник.
4. Докажите, что определитель целочисленной кососимметричной матрицы является квадратом целого числа.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

### 1. Векторная алгебра

Векторы и действия на них. База, координаты векторов в базе. Операции сложения векторов и умножения их на числа в координатах. Линейно зависимые системы векторов. Общая декартова система координат, прямоугольная система. Скалярное произведение, его свойства, выражение в декартовой системе координат. Формулы для определения расстояния между двумя точками и угла между двумя направлениями. Ориентированные тройки векторов. Векторное произведение, его свойства и выражение в координатах. Смешанный продукт, его свойства, выражение в общей декартовой системе координат. Параллелограмм, ориентированный по площади. Ориентированный объем коробки. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Изменение координат вектора при смене базиса.

### 2. Метод координат на плоскости и в пространстве.

Прямо в самолете. Векторное уравнение линии, уравнение линии в координатах. Различные формы уравнения прямой связаны с разными способами ее определения. Расстояние от точки до линии. Уравнение прямой в векторной и координатной форме. Различные формы плоского уравнения. Основные задачи на прямой и самолет в космосе.

### 3. Матрицы. Детерминанты. Ранг матрицы. Общая теория систем линейных уравнений. Метод Гаусса.



Сложение и умножение матриц. Обратная матрица. Определение и простейшие свойства определителей. Миноры, алгебраические сложения, разложение определителя на элементы строки и столбца. Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера. Ранг матрицы. Матричная теорема ранга. Базисная малая теорема. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение гетерогенной системы. Метод Гаусса.

#### 4. Линейное пространство.

Определение линейного пространства. Основа, размерность. Теорема об изоморфизме. Компоненты вектора в основе, запись операций над векторами через компоненты. Изменение компонентов вектора при изменении базиса. Матрица перехода. Подпространства в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма.

#### 5. Линейные операторы.

Линейные операторы, их матрицы. Операции над линейными операторами, обратный линейный оператор. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов. Инвариантные подпространства. Нахождение собственных векторов и собственных значений линейного оператора. Характеристическое уравнение. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих разным собственным значениям. Собственные пространства. Нормальная форма Джордана.

#### 6. Квадратичные формы

Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к канонической. Закон инерции квадратичных форм. Положительно определенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

#### 7. Евклидово пространство. Эрмитово пространство, сопряженные операторы

Евклидово пространство. Эрмитовское пространство. Скалярное произведение. Матрица Грама. Ортогональный нормированный базис, процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональные матрицы. Сопряженные операторы, их свойства. Самосопряженные операторы, свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса собственных векторов самосопряженного оператора. Полярное разложение линейного оператора в евклидовом пространстве. Псевдоевклидово пространство. Преобразования Лоренца.

#### 8. Алгебра многочленов.

Свойства корней многочленов, формальная производная, корни многочленов с действительными коэффициентами, теория делимости в евклидовом кольце, многочлены с рациональными коэффициентами, симметричные многочлены.

#### 9. Группы, кольца, поля.

Понятие группы, конечные группы, теорема Лагранжа, теорема Кэли. Абелевы группы, теорема о строении конечно порожденных абелевых групп. Концепция кольца, концепция поля. Поле отчислений, итоговые поля. Векторное пространство над произвольным полем, примеры.

#### 10. Приложения линейной алгебры:

Численные методы решения системы линейных уравнений. Матрицы малого ранга, скелетная декомпозиция. Метод главных компонент, проекторов и метод наименьших квадратов. Марковские матрицы. Дифференциальные уравнения, матричная экспонента.

#### 11. Тензоры

Понятие о тензорах. Векторы и ковекторы, тензорный ранг. Тензорное произведение, свертка. Тензор в пространстве с метрикой, повышающий и понижающий индекс. Примеры тензорных величин в физике.

#### 12. Линии и поверхности второго порядка.

Теорема о приведении уравнения прямой второго порядка на плоскости к каноническому виду. Эллипс, гипербола и парабола. Теоремы о хитростях и директрисах. Асимптоты гиперболы. Касательная к эллипсу, гиперболе и параболе. Поворот поверхности. Эллипсоид, параболоиды, гиперболоиды. Канонические уравнения и внешний вид.

Оценка «отлично (10)» выставляется студенту, который проявил всестороннее, систематическое и глубокое знание материала образовательной программы, самостоятельно выполнил все задачи, предусмотренные программой, глубоко изучил основную и дополнительную литературу, рекомендованную программой. , активно работает в классе и понимает основные научные концепции по изучаемой дисциплине, проявил творческий подход и научный подход в понимании и представлении материала образовательной программы, ответ на который характеризуется использованием богатых и адекватных терминов, а также последовательным и логичным изложением материала;

Оценка «отлично (9)» дается студенту, который продемонстрировал всестороннее систематическое знание материала образовательной программы, самостоятельно выполнил все задачи, предусмотренные программой, глубоко усвоил основную литературу и знаком с рекомендуемой дополнительной литературой. по программе, активно проработал на занятиях, показал системность знаний по дисциплине, достаточную для дальнейшего изучения, а также умение самостоятельно расширять ее, ответ которой отличается точностью используемых терминов, а изложение материала в нем последовательное и логичное;

Оценка «отлично (8)» выставляется студенту, который проявил полное знание материала образовательной программы, не допускает существенных неточностей в своем ответе, самостоятельно выполнил все задания, предусмотренные программой, изучил основную литературу, рекомендованную учебной программой. программа, активно проработанная на занятиях, показала системность его знаний по дисциплине, достаточных для дальнейшего изучения, а также способность самостоятельно их усиливать;

Оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, который проявил достаточно полное знание материала образовательной программы, не допускает существенных неточностей в ответе, самостоятельно выполнил все задания, предусмотренные программой, изучил основную рекомендованную литературу по программе, активно работал на занятиях, показал системность своих знаний по дисциплине, достаточных для дальнейшего изучения, а также умение самостоятельно их усиливать;

Оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, который проявил достаточно полное знание материала образовательной программы, не допускает существенных неточностей в своем ответе, самостоятельно выполнил основные задачи, предусмотренные программой, изучил основную литературу. рекомендован программой, показал систематичность своих знаний по дисциплине, достаточную для дальнейшего изучения;

Оценка «хорошо (5)» дается студенту, продемонстрировавшему знание материала основной образовательной программы в объеме, необходимом для дальнейшего обучения и будущей работы по профессии, который, не проявляя достаточной активности на уроках, тем не менее самостоятельно выполнял овладел основными задачами, предусмотренными программой, освоил основную литературу, рекомендованную программой, допустил ошибки в их выполнении и ответе во время тестирования, но имеет необходимые знания для исправления этих ошибок самостоятельно;

Оценка «удовлетворительно (4)» дается студенту, обнаружившему знание материала основной образовательной программы в объеме, необходимом для дальнейшего обучения и будущей работы по профессии, который, не проявляя достаточной активности на уроках, тем не менее самостоятельно выполнял основные задачи, предусмотренные программой, изучил основную литературу, но допустил ошибки в их выполнении и в своем ответе во время тестирования, но имеет необходимые знания для исправления этих ошибок под руководством преподавателя;

Оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, проявившему знание материала основной образовательной программы в объеме, необходимом для дальнейшего обучения и будущей работы по профессии, не проявившего активности на занятиях, самостоятельно выполнившего основные задания, предусмотренные законодательством. программа, но допускающая ошибки в их выполнении и в ответе при тестировании, но обладающая необходимыми знаниями для устранения под руководством преподавателя наиболее существенных ошибок;

Оценка «неудовлетворительно (2)» дается студенту, который показал пробелы в знаниях или недостаток знаний по значительной части материала основной образовательной программы, не выполнил самостоятельно основные задачи, требуемые программой, допустил принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой задач, который не может продолжить учебу или начать профессиональную деятельность без дополнительной подготовки по рассматриваемой дисциплине;

Оценка «неудовлетворительно (1)» ставится студенту при отсутствии ответа (отказ от ответа) или когда представленный ответ не соответствует сути вопросов, содержащихся в задании.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении дифференциального теста студенту дается не менее 60 минут на подготовку. Продолжительность опроса студента по дифференциальному тесту не должна превышать двух астрономических часов.

Во время дифференциального теста студенты могут пользоваться программой дисциплины.