

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

| | |
|----------------------------|---|
| | Рабочая программа дисциплины (модуля) |
| по дисциплине: | Дополнительные главы теории случайных графов |
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Современная комбинаторика центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск" кафедра дискретной математики |
| курс: | 2 |
| квалификация: | магистр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составили:

Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

Курс предназначен для магистров математиков, интересующихся современной дискретной математикой, вероятностным методом и приложениями вероятности в компьютерных науках. Центральные объекты, изучаемые в курсе - биномиальный и равномерный случайные графы. В курсе освещены следующие три темы: пороговые вероятности монотонных свойств и асимптотическая эквивалентность биномиальной и равномерной модели случайных графов, эволюция случайного графа от леса до связности, законы 0 или 1 для логики первого порядка.

Курс состоит из 12 модулей (недель), включающих лекцию, семинарские задачи с разбором и домашние задачи, предложенные в виде теста. В конце студенты пишут итоговую контрольную, после чего принимают участие в экзамене, состоящем из письменной и устной части. Итоговая оценка складывается из балла за домашние задачи, за итоговую контрольную, за письменный и устный экзамены.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение продвинутого курса теории случайных графов.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области случайных графов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области случайных графов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области случайных графов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|--|---|
| УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки | УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности |
| ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики | ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности |
| ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности | ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации модели программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой |

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории случайных графов;
- современные проблемы соответствующих разделов случайных графов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных графов.

уметь:

понять поставленную задачу;
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных графов;
 оценивать корректность постановок задач;
 строго доказывать или опровергать утверждение;
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
 точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных графов;
 предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|-----------------------|--|---|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Гамильтоновы циклы в случайном графе. | 4 | 4 | | 8 |
| 2 | Неравенства концентрации в теории вероятностей. | 4 | 4 | | 7 |
| 3 | Пути и маршруты в графах. | 4 | 4 | | 8 |
| 4 | Распределение степеней вершин в случайном графе. | 6 | 6 | | 7 |
| 5 | Случайные подграфы неполных графов. | 4 | 4 | | 8 |
| 6 | Совершенные паросочетания в случайном графе. | 8 | 8 | | 7 |
| Итого часов | | 30 | 30 | | 45 |
| Подготовка к экзамену | | 30 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 135 час., 3 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Гамильтоновы циклы в случайном графе.

Распределение степеней вершин в случайном графе.

2. Неравенства концентрации в теории вероятностей.

Неравенство Янсона, следствия из него. Неравенство Азумы–Хеффдинга для мартингалов с ограниченными мартингальными разностями.

3. Пути и маршруты в графах.

Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами.

4. Распределение степеней вершин в случайном графе.

Пороговые вероятности и пороговые функции обладания монотонными свойствами случайным подмножеством.

5. Случайные подграфы неполных графов.

Теорема о фазовом переходе в случайном подграфе.

6. Совершенные паросочетания в случайном графе.

Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Случайные графы [Текст]/В. Ф. Колчин, -М., Физматлит, 2004
2. Модели случайных графов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский ; Летняя школа "Современная математика", Дубна, июль 2008 г. — М. : МЦНМО, 2011 .— 136 с.

Дополнительная литература

1. Графы. Алгоритмы на языке С [Текст] / В. В. Прут ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ,2017

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Современная комбинаторика
центр дополнительного, дополнительного профессионального и
онлайн-образования "Пуск"
кафедра дискретной математики
курс: 2
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Разработчики:

Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент
М.Е. Жуковский, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|--|---|
| УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки | УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности |
| ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики | ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности |
| ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности | ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации модели программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой |

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дополнительные главы теории случайных графов» обучающийся должен:

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории случайных графов;
современные проблемы соответствующих разделов случайных графов;
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
основные свойства соответствующих математических объектов;
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных графов.

уметь:

понять поставленную задачу;
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных графов;
оценивать корректность постановок задач;
строго доказывать или опровергать утверждение;
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных графов;
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры домашних задач 1. Пусть Q — возрастающее свойство подмножеств множества $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, которым обладают ровно 29 подмножеств. Найдите $P(\Gamma(1/3) \models Q)$. 2. Пусть Q — свойство подмножеств множества $\{1, \dots, N\}$ содержать хотя бы 2 элемента. Пусть $p = p(1/3)$ для этого свойства при $N = 3$. В ответ запишите число $3p^2 - 2p^3$. 3. Сколько существует классов эквивалентности формул первого порядка глубины 2? В этой задаче считайте, что истинность формул валидируется на множестве графов, в которых есть хотя бы 2 вершины.

4. Пусть $0 < c < 1$, $p = c/n$. Найдите такое k , что с вероятностью, стремящейся к 1, хроматическое число случайного графа $G(n, p)$ либо равно k , либо равно $k+1$.
5. Найдите предел γ вероятности того, что в графе $G(n, 1/2n)$ нет ни цикла на трех вершинах, ни цикла на четырех вершинах.

Примеры задач итоговой контрольной

1. Найдите количество связных графов (попарно неизоморфных) на 4 вершинах, каждый из которых с вероятностью, стремящейся к 1, содержится в случайном графе $G(n, p=5/4)$. Найдите ту же величину для графа $G(n, 2/n)$ и для графа $G(n, \ln n/n)$. В ответ запишите произведение трех полученных чисел.
2. Пусть ξ — случайная величина с равномерным распределением на множестве $\{0, 1, 2, 3\}$. Найдите вероятность вырождения ветвящегося процесса, порожденного ξ . Если полученное число является дробным, то запишите ответ в виде десятичной дроби с точностью до трех знаков после запятой.
3. Найдите предел вероятности (при $n \rightarrow \infty$) того, что для случайного графа $G(n, 1/3\sqrt{n})$ истинна ровно половина формул первого порядка глубины 4.
4. Найдите вероятность того, что для любого k у Консерватора есть выигрышная стратегия в игре Эренфойхта на двух независимых случайных графах в равномерной модели $G(5, 3)$.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин степени k в случайном графе $G(n, p)$. Аналогичные теоремы для числа вершин степени не менее (не более) k . Теоремы о предельной концентрации максимальной и минимальной степеней вершин в случайной графе $G(n, p)$.
2. Связность случайного графа $G(n, p)$. Теорема о предельной вероятности связности $G(n, p)$ при условии $p = (\ln n + c + o(1))/n$. Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности $G(n, p)$. Следствия из этой теоремы: точная пороговая вероятность для свойства отсутствия изолированных вершин, пороговая функция для связности случайного графа $G(n, m)$.
3. Вершинная и реберная k -связность графов, сепараторы в графах. Лемма о сепараторах в $G(n, p)$. Теорема об одновременном наступлении k -связности и отсутствии вершин степени меньше k в графовом случайном процессе G^\sim .
4. Совершенные паросочетания в случайном графе. Точная пороговая вероятность появления в случайном графе $G(n, p)$ совершенного паросочетания.
5. Пути и маршруты в графах. Теорема Комлоша–Семереди о длине максимального пути в случайном графе $G(n, p)$. Понятие случайного двухцветного мультиграфа $G(n, r, r)$, алгоритм поиска пути в ветном мультиграфе, его формальное описание.
6. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Трансформации путей и лемма Поша.
7. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа $G(n, p)$ при условии $p = (\ln n + \ln \ln n + \omega(n))/n$, где $\omega(n) \rightarrow +\infty$.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.