

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Геометрическая теория групп. Часть 2
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: И.Г. Лысенко, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 30.05.2022

Аннотация

Курс условно можно разделить на две части. Первая часть является подготовительной и ее можно отнести скорее к классическим разделам комбинаторной теории групп, в которой изучаются группы, заданные с помощью порождающих и определяющих соотношений. Вторая часть относится к собственно геометрической теории групп. Курс состоит из следующих разделов: свободные группы; задания групп с помощью порождающих и определяющих соотношений; введение в алгоритмические проблемы для групп; графы в геометрической теории групп; асимптотические характеристики групп (функция роста и функция Дэна); свободные конструкции для групп (свободные произведения, свободные произведения с объединенной подгруппой и HNN-расширения); введение в теорию групп, действующих на деревьях; введение в грубую геометрию (квазиизометрии метрических пространств); гиперболические метрические пространства и группы. В курсе не предполагается доказательство глубоких теорем (например, основная теорема теории Басса-Серра будет сформулирована без доказательства), однако предполагается доказательство ряда принципиальных результатов, имеющих важное значение в понимании идей геометрической теории групп, в частности, теоремы Шрайера о подгруппах свободной группы, теорем о нормальной форме для свободных произведений и HNN-расширений групп, теоремы Милнора-Шварца и теоремы Громова об эквивалентности гиперболичности группы линейной оценке ее функции Дэна. Значительная часть курса (примерно одна треть) посвящена гиперболическим метрическим пространствам и группам. Для освоения курса необходимо знание теории групп в объеме стандартного курса высшей алгебры, а также желательно знакомство с основными понятиями топологии, в частности, топологического и метрического пространства, непрерывного отображения.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

ознакомление студентов с базовыми понятиями и результатами современной геометрической теории групп.

Задачи дисциплины

дать студентам необходимую основу для дальнейшего углубленного изучения предмета, что позволит в определенной степени ориентироваться в современных исследованиях в этой области математики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области информатики и вычислительной техники	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области информатики и вычислительной техники
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области информатики и вычислительной техники и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий

ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основное содержание курса: определения понятий и свойства соответствующих объектов, доказательство теорем.

уметь:

решать задачи по всем разделам курса.

владеть:

основными понятиями комбинаторной и геометрической теории групп, изложенными в курсе, а также соответствующей техникой, применяемой в доказательстве теорем и решении задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Введение в теорию групп, действующих на деревьях.	5	5		5
2	Введение в грубую геометрию.	5	5		5
3	Гиперболические метрические пространства.	5	5		5
4	Класс гиперболических групп.	5	5		5
5	Квазигеодезические пути и квазивыпуклость в гиперболических метрических пространствах.	5	5		5
6	Свойства гиперболических групп.	5	5		5
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Введение в теорию групп, действующих на деревьях.

Графы групп. Построение фундаментальной группы графа групп. Построение дерева действия группы для свободных конструкций. Построение дерева действия групп в общем случае.

2. Введение в грубую геометрию.

Квазиизометрические вложения. Квазиизометрии. Критерии квазиизометричности. Теорема Милнора-Шварца. Квазиизометрические инварианты групп.

3. Гиперболические метрические пространства.

Геометрические пространства. Метрические деревья (R-деревья). Эквивалентные определения гиперболических метрических пространств.

4. Класс гиперболических групп.

Теорема Громова об эквивалентности гиперболическости группы линейности ее функции Дэна. Примеры гиперболических групп: дискретные подгруппы движений гиперболического пространства; группы с условием малого сокращения.

5. Квазигеометрические пути и квазивыпуклость в гиперболических метрических пространствах.

Лемма Морса о близости квазигеометрических к геометрическим. Глобальность локальных квазигеометрических. Свойство Дэна гиперболических групп. Квазивыпуклые подгруппы.

6. Свойства гиперболических групп.

Проблема сопряженности. Ограниченность конечных подгрупп. Квазивыпуклость циклических подгрупп

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Комбинаторная теория групп [Текст] = Combinatorial group theory/Р. Линдон, П. Шупп, -М., Мир, 1980
2. Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений [Текст] = Combinatorial group theory/В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, -М., Наука, 1974

Дополнительная литература

1. Лекции по применению теории групп в ядерной спектроскопии [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. Ф. Бейман ; пер. с англ. Ю. И. Харитоновой ; под ред. А. З. Долгинова .— М. : Физматгиз, 1961 .— 228 с.
2. Теория групп [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. Г. Курош .— М. : Физматлит, 2011 .— 808 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- проработку учебного материала;
- выполнение домашних теоретических заданий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: И.Г. Лысенко, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области информатики и вычислительной техники	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области информатики и вычислительной техники
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области информатики и вычислительной техники и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Геометрическая теория групп. Часть 2» обучающийся должен:

знать:

основное содержание курса: определения понятий и свойства соответствующих объектов, доказательство теорем.

уметь:

решать задачи по всем разделам курса.

владеть:

основными понятиями комбинаторной и геометрической теории групп, изложенными в курсе, а также соответствующей техникой, применяемой в доказательстве теорем и решении задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Доказать, что каждый путь на графе гомотопен единственному приведенному пути.
2. Вычислить функцию роста конечно порожденной абелевой группы.
3. Доказать, что функция Дэна конечной группы ограничена сверху линейной функцией.

4. Построить граф Кэли данной (конечной или бесконечной) группы.
5. Построить граф Шрайера для данной подгруппы данной группы.
6. Показать, что группу с данным заданием в терминах порождающих и соотношений можно представить в виде нетривиального HNN-расширения.
7. Показать, что данное множество элементов свободного произведения с объединенной подгруппой или HNN-расширения является базисом свободной группы.
8. Построить дерево действия для данной группы (пример: для группы Баумслэга-Солитера $BS(1,2)$).
9. Показать, что две данные группы квазиизометричны (или не квазиизометричны).
10. Доказать, что данное метрическое пространство является метрическим деревом.
11. Доказать, что данная группа является (или не является) гиперболической.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Примерные вопросы к дифференцированному зачёту:

1. Нормальная форма элементов свободной группы.
2. Универсальное свойство свободных групп.
3. Комбинаторное, алгебраическое и геометрическое описание выводов из соотношений в группах.
4. Преобразования Титце.
5. Лемма ван Кампена.
6. Фундаментальная группа графа.
7. Теорема Шрайера о подгруппах свободных групп.
8. Алгоритмическая разрешимость проблемы вхождения для свободных групп.
9. Функция роста конечно порожденной группы.
10. Функция Дэна конечно определенной группы.
11. Свободные произведения групп.
12. Свободные произведения групп с объединенной подгруппой.
13. Нормальная форма элементов свободного произведения групп с объединенной подгруппой.
13. HNN-расширения групп.
14. Нормальная форма элементов HNN-расширения. Лемма Бриттона.
15. Фундаментальная группа графа групп.
16. Квазиизометрии метрических пространств.
17. Теорема Милнора-Шварца.
18. Функция роста и функция Дэна как квазиизометрические инварианты.
19. Определение гиперболического метрического пространства и эквивалентные условия.
20. Гиперболичность групп с условием малого сокращения.
21. Гиперболичность дискретных кокомпактных групп движений гиперболической плоскости.
22. Глобальность локальных квазигеодезических в гиперболических метрических пространствах и близость к квазигеодезическим.
23. Гиперболичность метрических пространств как квазиизометрический инвариант.
24. Свойство Дэна гиперболических групп.
25. Проблема сопряженности в гиперболических группах.
26. Квазивыпуклые подгруппы гиперболических групп.
27. Ограниченность конечных подгрупп гиперболических групп.
28. Квазивыпуклость циклических подгрупп гиперболических групп.

Билет 1

1. Универсальное свойство свободных групп.
2. Гиперболичность дискретных кокомпактных групп движений гиперболической плоскости.

Билет 2

1. Функция Дэна конечно определенной группы.

2. Квазивыпуклые подгруппы гиперболических групп.

Билет 3

1. Теорема Милнора-Шварца.

2. Лемма ван Кампена.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачёта по дисциплине обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины. Диф. зачёт проходит путем специального опроса, проводимого в устной форме.