

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Основы теории множеств
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: С.Л. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 01.03.2024

## Аннотация

Курс представляет собой введение в аксиоматическую теорию множеств Цермело – Френкеля (ZF). В курсе формулируется аксиоматика ZF (как теории первого порядка), даются определения ординалов и кардиналов. В присутствии аксиомы выбора строится арифметика кардиналов. Определяются стационарные множества, доказывается теорема Сильвера о континуум-функции, обсуждаются вопросы бесконечной комбинаторики (теории Рамсея) и вопросы измеримости. Завершается курс обсуждением моделей теории множеств и доказательством совместимости ZF с аксиомой выбора и континуум-гипотезой.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- получение студентами представления о современной теории множеств.

#### Задачи дисциплины

- дать студентам запас базовых знаний по основным разделам теории множеств;
- обучить рациональному и эффективному использованию полученных знаний при решении типовых задач теории множеств;
- сформировать у студентов представление о теории множеств как методе изучения широкого круга объектов и процессов;
- сформировать знания, умения и навыки использования основных понятий теории множеств.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности основные законы естествознания, современный математический аппарат и алгоритмы, современные информационно-коммуникационные технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационных технологий, владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности
	ПК-2.3 Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий
	ПК-2.4 Владеет методами и алгоритмами решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического поиска, опыт работы с научными источниками
ПК-3 Владеет основами ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания

ПК-5 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- базовые понятия современной теории множеств, включая такие понятия, как аксиомы теории множеств, ординальные и кардинальные числа и их арифметика, начала дескриптивной теории множеств, булевы алгебры, ультрафильтры, ультрапроизведения и их приложения, большие кардиналы, основы общей теории моделей и теоретико-множественной теории моделей.

уметь:

- применять полученные знания при постановке задач как в области теории множеств, так и в смежных областях, таких как теория моделей, общая топология, в различных областях математической логики, в которых возникают теоретико-множественные задачи и подходы.

владеть:

- базовыми методами современной теории множеств.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Введение. Язык и аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля.	4			2
2	Порядковые числа, арифметика ординалов.	4			2
3	Кардинальные числа.	4			2
4	Вещественная прямая и её подмножества.	4			2

5	Аксиома выбора, арифметика кардиналов.	4			2
6	Аксиома регулярности, нефундированные множества.	5			2
7	Фильтры и ультрафильтры, булевы алгебры.	5			3
Итого часов		30			15
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		45 час., 1 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

##### 1. Введение. Язык и аксиомы теории множеств Цермело – Френкеля.

Возникновение теории множеств. Представление о различных теоретико-множественных системах. Язык теории множеств, формулы. Аксиомы теории множеств Цермело -- Френкеля. Множества и классы. Аксиомы объёмности, пары, объединения, степени и бесконечности. Схемы аксиом выделения и замены. Построение простейших математических объектов средствами данных аксиом.

##### 2. Порядковые числа, арифметика ординалов.

Частичные и линейные порядки. Полное упорядочение. Порядковые (ординальные) числа. Индукция и рекурсия. Ординальная арифметика. Фундированные отношения.

##### 3. Кардинальные числа.

Понятие мощности множества. Алефы. Каноническое полное упорядочение квадрата ординала. Конфинальность.

##### 4. Вещественная прямая и её подмножества.

Мощность континуума. Упорядочение вещественной прямой. Проблема Суслина. Топология вещественной прямой. Борелевские множества. Мера Лебега. Пространство Бэра. Польские пространства.

##### 5. Аксиома выбора, арифметика кардиналов.

Аксиома выбора. Принцип полного упорядочения Цермело. Использование аксиомы выбора в математике. Слабые формы аксиомы выбора: счётный выбор, зависимый выбор, теорема о простом идеале. Кардинальная арифметика. Бесконечные суммы и произведения. Континуум-функция. Континуум-гипотеза. Кардинальное возведение в степень. Бет-функция. Гипотеза сингулярных кардиналов. Недостижимые кардиналы.

##### 6. Аксиома регулярности, нефундированные множества.

Кумулятивная иерархия множеств фон Нейманна. Индукция по принадлежности. Фундированные отношения. Транзитивный коллапс, теорема Мостовского. Представление о нефундированных множествах. Теория множеств фон Нейманна -- Гёделя -- Бернайса.

##### 7. Фильтры и ультрафильтры, булевы алгебры.

Фильтры и ультрафильтры. Ультрафильтры на множестве натуральных чисел. карра-полные фильтры и идеалы. Булевы алгебры. Фильтры и идеалы на булевых алгебрах. Полные булевы алгебры. Полные и регулярные подалгебры. Насыщенность. Дистрибутивность полных булевых алгебр.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная доской для записей, а также проектором и экраном для возможных показов слайдов.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова .— 5-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2004, 2006 .— 256 с.
2. Теория моделей [Текст]/Г. Дж. Кейслер, Ч. Ч. Чэн , -М., Мир, 1977
3. Теория множеств [Текст] = Set theory/К. Куратовский, А. Мостовский , -М., Мир, 1970
1. Jech Thomas, Set theory, 3ed., Springer-Verlag, Berlin--Heidelberg--New York, 2003.

### **Дополнительная литература**

1. Начала теории множеств [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов. Ч.1 / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 3-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2008 .— 128 с.
2. Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов [Текст], учеб. пособие для вузов /М. М. Глухов, А. Б. Шишков. -СПб., Лань, 2012
1. Kanamori Akihiro, The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin--Heidelberg--New York, 2003.
2. Кейслер Дж., Чэн Ч., Теория моделей, Изд. Мир, Москва, 1977.
3. Барвайс Дж. (ред.), Справочная книга по математической логике, в 4 тт., Москва, 1983.
4. Кановой В. Г., Любецкий В. А., Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы, Изд. МЦМНО, Москва, 2013.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала.

Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем.

В ходе подготовки к дифференцированному зачёту изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Основной целью подготовки является развитие навыков решения практических задач и анализа приёмов, встречающихся в этих задачах.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** С.Л. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности основные законы естествознания, современный математический аппарат и алгоритмы, современные информационно-коммуникационные технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационных технологий, владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности
	ПК-2.3 Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий
	ПК-2.4 Владеет методами и алгоритмами решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического поиска, опыт работы с научными источниками
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Основы теории множеств» обучающийся должен:

**знать:**

- базовые понятия современной теории множеств, включая такие понятия, как аксиомы теории множеств, ординальные и кардинальные числа и их арифметика, начала дескриптивной теории множеств, булевы алгебры, ультрафильтры, ультрапроизведения и их приложения, большие кардиналы, основы общей теории моделей и теоретико-множественной теории моделей.

**уметь:**

- применять полученные знания при постановке задач как в области теории множеств, так и в смежных областях, таких как теория моделей, общая топология, в различных областях математической логики, в которых возникают теоретико-множественные задачи и подходы.

**владеть:**

- базовыми методами современной теории множеств.

**3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

1. Докажите, что множество натуральных чисел транзитивно.
2. Докажите, что любое натуральное число конечно по Тарскому.
3. Докажите, что для любого предельного ординала существует больший его предельный ординал.
4. Докажите, что ординал неразложим тогда и только тогда, когда он является степенью ординала  $\omega$ .
5. Докажите, что  $\omega^2$  не является объединением счётного семейства счётных множеств.
6. Докажите, что если два множества конечны по Дедекинду, то таковы их объединение и декартово произведение.
7. Какую мощность имеет множество всех открытых подмножеств множества действительных чисел?
8. Какую мощность имеет множество всех непрерывных функций из множества действительных чисел в себя?
9. Какую мощность имеет множество всех алгебраических действительных чисел?
10. Докажите, что для данного бесконечного множества  $X$  множество его конечных подмножеств равномощно самому  $X$ .

**4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

Примерный перечень вопросов:

1. Каноническое полное упорядочение квадрата ординала.
2. Дистрибутивность полных булевых алгебр.
3. Транзитивный коллапс.
4. Теорема Мостовского.
5. Теорема о простом идеале.
6. Стационарные множества. Лемма Фодора.
7. Теорема Сильвера о континуум-функции на кардиналах несчётной конфинальности.
8. Теорема Эрдёша – Радо.
9. Теорема Душника – Миллера.
10. Измеримые кардиналы. Нормальные меры.

Билет 1.

1. Каноническое полное упорядочение квадрата ординала.
2. Из плоскости выбросили произвольное счётное множество точек. Докажите, что оставшаяся часть плоскости линейно связна и, более того, любые две невыброшенные точки можно соединить двухзвенной ломаной, не



задающей выброшенных точек.

#### Билет 2

1. Дистрибутивность полных булевых алгебр.
2. Докажите, что множество всех прямых на плоскости равномощно множеству всех точек на плоскости.

#### Билет 3

1. Транзитивный коллапс, теорема Мостовского.
2. Дано бесконечное частично упорядоченное множество  $X$ . Докажите, что в нём всегда найдётся либо бесконечное подмножество попарно несравнимых элементов, либо бесконечное подмножество, на котором индуцированный порядок линейен.

#### Билет 4

1. Теорема о простом идеале.
2. Докажите, что если отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна отрезку.

#### Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений.

Оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

Оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачёта обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, конспектами лекций или другими материалами.