

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Матричные и тензорные вычисления
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра проблем передачи информации и анализа данных
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры проблем передачи информации и анализа данных 02.04.2024

Аннотация

Операции с матрицами и их многомерными аналогами, тензорами, лежат в основе многих современных приложений. Например, они используются в качестве весов в нейросетевых моделях, встречаются в рекомендательных системах, а также лежат в основе ключевых операций обработки сигналов и изображений. В этом курсе мы обсудим релевантные для этих приложений классические и современные результаты матричного анализа и вычислительной линейной алгебры, а также поговорим об их обобщении на многомерный случай.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- дать студентам углубленные знания по прикладной линейной и мультилинейной алгебре.

Задачи дисциплины

- освоение основных матричных и тензорных разложений,
- освоение алгоритмов их вычисления,
- знакомство с основными библиотеками вычислительной линейной и мультилинейной алгебры.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области информатики и вычислительной техники, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен разрабатывать и модернизировать программное и аппаратное обеспечение информационных и автоматизированных систем
	ОПК-3.7 Способен разрабатывать оригинальные алгоритмы и программные средства, в том числе с использованием современных интеллектуальных технологий, для решения профессиональных задач
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- формулировки основных матричных и тензорных разложений и связанных с ними математических объектов;
- формулировки и доказательства теорем существования и единственности разложений;

уметь:

- численно решать задачи вычислительной линейной и мультилинейной алгебры;

владеть:

- навыками по использованию изученных инструментов в конкретных приложениях.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Основы матричного анализа	5			10
2	Малоранговая аппроксимация матриц	5			10
3	Инструменты вычислительной мультилинейной алгебры	5			10
4	Классические тензорные разложения	5			10
5	Разложение тензорного произведения и иерархического Таккера	5			10
6	Тензорные сети	5			10
Итого часов		30			60
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Основы матричного анализа

Матричные нормы, унитарные матрицы и унитарная инвариантность, разложение Шура, нормальные матрицы, SVD, CUR разложение, псевдообратные матрицы, QR разложение, отражения Хаусхолдера и вращения Гивенса.

2. Малоранговая аппроксимация матриц

Теорема Экарта-Янга для унитарно-инвариантных норм, степенной метод и ALS, рандомизированный подход, знакомство с римановой оптимизацией.

3. Инструменты вычислительной мультилинейной алгебры

Кронекерово и тензорное произведения, их свойства, векторизация и матрицизация тензоров, функции reshape и transpose, умножение матрицы по k-й моде тензора, тензорные нормы, сингулярные числа тензора. Метод NOMP.

4. Классические тензорные разложения

Каноническое разложение, неустойчивость его вычисления, связь с билинейными алгоритмами, алгоритмы матричного умножения. Разложение Таккера, теорема о мультилинейном ранге, HOSVD разложение и HOSVD алгоритм.

5. Разложение тензорного произведения и иерархического Таккера

Разложение тензорного произведения (TT), TT-ранги, TT-SVD алгоритм, тензоризация операторов, сжатие нейронных сетей. Левая и правая ортогонализация TT-разложения. Алгоритмы нахождения TT-разложения (ALS, риманова оптимизация). Библиотеки в Python для работы с TT-разложением. Разложение иерархического Таккера, его связь с TT-разложением.

6. Тензорные сети

Запись тензорных разложений через тензорные диаграммы. Разложения тензорного кольца, тензорная сеть PEPS. MERA и понятие о дизентанглерах. Пакеты программ для работы с тензорными сетями.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Краткий курс численного анализа [Текст] / Е. Е. Тыртышников, [учеб. пособие для вузов]. - М, ВИНТИ, 1994
2. Методы вычислений : Численный анализ. Методы решения задач математической физики [Текст] / И. И. Ляшко, В. Л. Макаров, А. А. Скоробогатько - Киев Вища школа, 1977
3. Численные методы [Текст] : в 2 кн. : учебник для вузов / Н. Н. Калиткин, Е. А. Альшина .— М. : Академия, 2013 .— (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика) .— Кн. 1 : Численный анализ. - 2013. - 304 с.

Дополнительная литература

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://scitation.aip.org/>

<http://www.sciencemag.org/>

Журналы по математическому моделированию

(Математическое моделирование, Квантовая электроника, ЖТФ, Письма в ЖТФ, Physica Status Solidi b, Physical Review B и др.),

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Нет.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- подготовку докладов и выступлений на тему домашних заданий.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки: Прикладная математика и информатика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра проблем передачи информации и анализа данных
курс: 1
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области информатики и вычислительной техники, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен разрабатывать и модернизировать программное и аппаратное обеспечение информационных и автоматизированных систем
	ОПК-3.7 Способен разрабатывать оригинальные алгоритмы и программные средства, в том числе с использованием современных интеллектуальных технологий, для решения профессиональных задач
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Матричные и тензорные вычисления» обучающийся должен:

знать:

- формулировки основных матричных и тензорных разложений и связанных с ними математических объектов;
- формулировки и доказательства теорем существования и единственности разложений;

уметь:

- численно решать задачи вычислительной линейной и мультилинейной алгебры;

владеть:

- навыками по использованию изученных инструментов в конкретных приложениях.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Понятие тензора.
2. Вектор.
3. Компоненты вектора.
4. Матричное представление.
5. Переход к другим координатам.

6. Длина вектора в прямоугольных координатах.
7. Скаляр.
8. Скалярное произведение.
9. Длина вектора в произвольных координатах.
10. Для чего это нужно?

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Матричные нормы: операторные нормы, норма Фробениуса.
2. Унитарные матрицы и унитарная инвариантность.
3. Разложение Шура, его существование и единственность.
4. Нормальные матрицы и их диагонализуемость.
5. SVD разложение, виды записи.
6. QR разложение, отражения Хаусхолдера и вращения Гивенса.
7. Теорема Эккарта-Янга для унитарно-инвариантных норм.
8. Степенной метод и ALS.
9. Рандомизированные алгоритмы для малорангового приближения, вероятностные оценки на ошибку приближения.
10. Понятие о методах римановой оптимизации, риманов градиент и ретракция для многообразия матриц фиксированного ранга, пакет rumanopt.
11. Кронекерово и тензорное произведения, их свойства.
12. Кронекерово произведение матричных разложений.
13. Векторизация и матрицизация тензоров, функции reshape и transpose.
14. Формула векторизации произведения.
15. Тензорные нормы: вторая норма и норма Фробениуса.
16. Сингулярные числа тензора.
17. Степенной метод для тензоров (HOPM).
18. Каноническое тензорное разложение.
19. Незамкнутость множества тензоров ранга, не превышающего заданного.
20. Запись билинейного алгоритма с помощью канонического разложения, матричное умножение и алгоритм Штрассена.
21. Разложение Таккера, формулы его векторизации и матрицизаций.
22. Теорема о мультилинейном ранге тензора.
23. HOSVD разложение и HOSVD алгоритм.
24. Разложение тензорного произведения (TT), TT-ранги тензора, левая и правая ортогонализации разложения.
25. TT-SVD алгоритм.
26. Тензоризация операторов, сжатие нейронных сетей.
27. Алгоритмы нахождения TT-разложения (ALS, риманова оптимизация).
28. Разложение иерархического Таккера, его связь с TT-разложением.
29. Запись тензорных разложений через тензорные диаграммы. Оценка на ранги матриц разверток, преимущества и недостатки наличия циклов в тензорных сетях.
30. Разложения тензорного кольца, разложение PEPS.
31. Тензорная сеть MERA и понятие о дизентанглерах.

Критерии оценивания

Оценка отлично (10) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (9) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично (8) выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо (7) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо (6) выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо (5) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно (4) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно (3) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно (2) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно (1) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачёт проводится в устной форме.

При проведении устного дифференцированного зачёта обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку.

Во время проведения дифференцированного зачёта обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой и проч.