

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Спектральные методы в теории графов
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.Б. Купавский, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 01.03.2024

## Аннотация

Курс посвящен тому, какие свойства графа можно описать в терминах связанных с графом матриц: лапласиана и матрицы смежности. Курс будет содержать условно более алгебраические темы (в частности, экспандеры и их построение, sensitivity conjecture, решенная Хуангом, сильно регулярные графы, графы Кэли) и более аналитические (неравенства Чигера и квазислучайность, изображение планарных графов, разрезы и потоки). Часть курса будет посвящена алгоритмическим приложениям. Под конец курса мы обсудим неожиданную связь между алгоритмической задачей о максимальном потоке с несколькими источниками и стоками, минимальным разрезом и вопросами о приближениях произвольных метрических пространств с помощью метрики  $l_1$ .

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Дать представление о том какую информацию содержит спектр матриц, связанных с графом. Разобраться в разнообразных применениях спектральной техники.

### Задачи дисциплины

- изучение информации, которую содержит спектр матриц, связанных с графом;
- приобретение слушателями знаний в области спектральной техники.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности основные законы естествознания, современный математический аппарат и алгоритмы, современные информационно-коммуникационные технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационных технологий, владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности
	ПК-2.3 Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий

ПК-2.4 Владеет методами и алгоритмами решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического поиска, опыт работы с научными источниками

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные принципы какие свойства графа можно описать в терминах связанных с графом матриц: лапласиана и матрицы смежности;
- Графы Пэли, обобщенный гиперкуб и его спектр;
- оценки числа ребер между подмножествами графа.

уметь:

- решать задачу о графах минимального диаметра с заданной степенью;
- применять теорему Татта об изображении 3-связных планарных графов.

владеть:

- навыками решения задач.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Графы и матрицы (матрица смежности, Лапласиан)	4	2		8
2	Теорема Хоффмана об оценке числа независимости графа	4	2		8
3	Графы Пэли и Кэли	4	2		8
4	Оценки числа ребер между подмножествами графа.	4	2		8
5	Оценки Чигера, теорема Перрона-Фробениуса, Коши	4	2		8
6	Задача о графах минимального диаметра с заданной степенью	4	2		8
7	Экспандеры. Теорема Татта	4	2		6
8	Задача о максимальном потоке с несколькими источниками и стоками	2	1		6
Итого часов		30	15		60
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

##### 1. Графы и матрицы (матрица смежности, Лапласиан)

Спектр, теорема Куранта-Фишера, характеристика второго собственного значения через квадратичную форму.

## 2. Теорема Хоффмана об оценке числа независимости графа

Спектр графа Кнезера и вывод теоремы Эрдеша-Ко-Радо о максимальном размере пересекающегося семейства.

## 3. Графы Пэли и Кэли

Графы Пэли, обобщенный гиперкуб и его спектр. Графы Кэли.

## 4. Оценки числа ребер между подмножествами графа.

Еще один вывод теоремы Эрдеша-Ко-Радо. Вероятностный тест на простоту и генерация псевдослучайных чисел. Характеризация квазислучайности.

## 5. Оценки Чигера, теорема Перрона-Фробениуса, Коши

Оценки Чигера. Теорема Перрона-Фробениуса, Теорема Коши о собственных значениях, теорема Вильфа. Решение Хуангом гипотезы о чувствительности (sensitivity conjecture).

## 6. Задача о графах минимального диаметра с заданной степенью

Сильно регулярные графы. Построение контрпримера к гипотезе Борсука с помощью сильно регулярных графов.

## 7. Экспандеры. Теорема Татта

Конструкция экспандеров. Теорема Татта об изображении 3-связных планарных графов. Теорема о числе остовных деревьев в графе.

## 8. Задача о максимальном потоке с несколькими источниками и стоками

Двойственная задача, сведение к задаче о метриках на конечном множестве. Приближения конечных метрических пространств с помощью  $l_2$  и  $l_1$ -метрики. Связь между минимальным разрезом и задаче о потоке с несколькими источниками и стоками.

# 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Элементы дискретной математики в задачах, Электронная версия печатной публикации / А. А. Глибичук, А. Б. Дайняк, Д. Г. Ильинский, А. Б. Купавский [и др.]. — Москва, МЦНМО, 2016
2. Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии / А. М. Райгородский. — Москва: МЦНМО, 2023.

### Дополнительная литература

1. Хроматические числа [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2015 .— 44 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Учебная аудитория.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	А.Б. Купавский, д-р физ.-мат. наук, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности основные законы естествознания, современный математический аппарат и алгоритмы, современные информационно-коммуникационные технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационных технологий, владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности
	ПК-2.3 Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий
	ПК-2.4 Владеет методами и алгоритмами решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического поиска, опыт работы с научными источниками

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Спектральные методы в теории графов» обучающийся должен:

### знать:

- основные принципы какие свойства графа можно описать в терминах связанных с графом матриц: лапласиана и матрицы смежности;
- Графы Пэли, обобщенный гиперкуб и его спектр;
- оценки числа ребер между подмножествами графа.

### уметь:

- решать задачу о графах минимального диаметра с заданной степенью;
- применять теорему Татта об изображении 3-связных планарных графов.

### владеть:

- навыками решения задач.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

#### Задачи по курсу

1. Найдите спектр цикла на  $n$  вершинах.
2. Пусть  $M$  - это матрица размера  $d \times n$ . Докажите, что мультимножества ненулевых собственных значений матриц  $MM^T$  и  $M^T M$  совпадают.
3. Пусть  $G$  это  $d$ -регулярный граф на  $n$  вершинах, и пусть абсолютная величина всех собственных значений его матрицы смежности, кроме первого, не превосходит  $\lambda$ . Пусть  $N(v)$  - это множество соседей вершины  $v$ , а для данного множества вершин  $B$  размера  $|B| = b$   $NB(v) = N(v) \cap B$ . Докажите, что для любого множества вершин  $B$  имеем:  
$$\sum_{v \in V} |NB(v) - bd| \leq \lambda^2 b(1 - b)n$$

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Графы и матрицы (матрица смежности, Лапласиан.
2. Теорема Хоффмана об оценке числа независимости графа.
3. Теорема Эрдеша-Ко-Радо о максимальном размере пересекающегося семейства.
4. Графы Пэли, обобщенный гиперкуб и его спектр.
5. Графы Кэли.
6. Теорема Перрона-Фробениуса.
7. Теорема Коши о собственных значениях.
8. Теорема Вильфа.
9. Характеризация и другие спектральные свойства реберных графов.
10. Характеризация графа с помощью его спектра

Примеры экзаменационных билетов:

##### Билет №1

1. Графы Кэли.
2. Найдите спектр цикла на  $n$  вершинах.

##### Билет №2

1. Экспандеры и их конструкция.
2. Теорема Татта об изображении 3-связных планарных графов.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;



- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.