

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики  
А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Структурная теория доказательств и алгебраическая логика
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: С.Л. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 30.05.2022

## Аннотация

Курс состоит из двух основных частей — структурной теории доказательств и алгебраической логики. В первой части курса даются определения исчислений секвенций (в генценовском формате) для классической и интуиционистской логик, доказывается фундаментальная теорема об устранимости правила сечения и следствия из неё. Аналогичные исчисления строятся и для некоторых модальных логик. Доказываются теоремы об интерполяции. Далее вводятся субструктурные логики (линейная и аффинная), доказываются их свойства. Особый акцент делается на приложениях субструктурных логик для моделирования вычислительных процессов и в математической лингвистике. Вторая часть курса посвящена алгебраической логике. Вводится алгебраическая семантика, общая для всех логик, изучавшихся в первой части курса, доказывается абстрактная теорема о полноте. Устанавливается связь между интерполяцией и некоторым алгебраическим свойством (амальгамируемость). Для освоения курса желательно знать основы математической логики и теории алгоритмов.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Цель курса — познакомить студентов с двумя разделами современной математической логики: структурной теорией доказательств (в т.ч. для субструктурных логик) и алгебраической логикой.

### Задачи дисциплины

Среди основных задач курса — показать взаимосвязь этих двух разделов, а также применения субструктурных логических систем в задачах моделирования вычислительных процессов и в математической лингвистике.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области информатики и вычислительной техники	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области информатики и вычислительной техники
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области информатики и вычислительной техники и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке

проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основы структурной теории доказательств (в формате генцевских секвенциальных исчислений), теории субструктурных логик и алгебраической логики.

уметь:

решать задачи по означенным темам, правильно выбирая методы и подходы.

владеть:

методами субструктурных логик для моделирования вычислительных процессов и в приложениях из математической лингвистики.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Исчисление секвенций для классической и интуиционистской логики предикатов.	5	5		5
2	Субструктурные логики	4	4		4
3	Сложность субструктурных логик	4	4		4
4	Исчисления секвенций для модальных логик	4	4		5
5	Интерполяция	4	4		4
6	Алгебраическая семантика	5	5		4
7	Решётки с делениями	4	4		4
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Исчисление секвенций для классической и интуиционистской логики предикатов.

Исчисление секвенций для классической и интуиционистской логики предикатов.

Определения секвенциальных исчислений. Теорема об устранении правила сечения (синтаксическое доказательство). Дизъюнктивное свойство и теоремы Харропа для интуиционистской логики предикатов. Теорема Эрбрана для классической логики предикатов и её обобщения. Перевод Гёделя — Генцена классической логики в интуиционистскую (синтаксическое доказательство).

## 2. Субструктурные логики

Субструктурные логики.

Структурные правила. Линейная и аффинная логики, их неформальная интерпретация как логик ресурсов. Секвенциальные исчисления для субструктурных логик, теоремы об устранении сечения. Экспоненциальная и субэкспоненциальные модальности, их применение для моделирования вычислительных процессов. Применение субструктурных логик в математической лингвистике.

## 3. Сложность субструктурных логик

Сложность субструктурных логик.

Неразрешимость линейной логики с экспоненциальной модальностью (коммутативный и некоммутативный случаи). PSPACE-полнота мультипликативно-аддитивной линейной логики. NP-полнота мультипликативной линейной логики (исчисления Ламбека), без детального доказательства. Сложность субструктурных логик с итерацией Клини

## 4. Исчисления секвенций для модальных логик

Исчисления секвенций для модальных логик.

Исчисления секвенций для логик K, K4 и S4, их свойства.

## 5. Интерполяция

Интерполяция

Интерполяционные леммы Крейга и Линдона для классической и интуиционистской логик высказываний (синтаксическое доказательство методом Маехары — Шютте). Интерполяция с учётом счётчиков для исчисления Ламбека. Примеры логик без интерполяционного свойства.

## 6. Алгебраическая семантика

Алгебраическая семантика.

Решётки. Булевы и гейтинговы алгебры. Теоремы Биркгофа и Стоуна. Алгебраическая интерпретация классической и интуиционистской логик высказываний. Булевы алгебры с операторами, алгебраическая семантика модальных логик. Субструктурные логики как (ин)эквациональные теории соответствующих классов алгебр, теорема о полноте (конструкция Линденбаума — Тарского). Связь интерполяции и амальгамируемости.

## 7. Решётки с делениями

Решётки с делениями

Решётки с делениями как интерпретация мультипликативно-аддитивной интуиционистской линейной логики, теорема о полноте. Закон дистрибутивности, гиперсеквенциальное исчисление для системы с законом дистрибутивности. Теоремы о конечных и о теоретико-множественных моделях.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного и семинарского типа.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Теория доказательств [Текст] = Proof theory/Г. Такеути, -М., Мир, 1978
2. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. — 5-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2004, 2006. — 256 с.
2. N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, H. Ono. Residuated lattices: an algebraic glimpse at substructural logics. Vol. 151 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier, 2007.

#### Дополнительная литература

1. Теория структур [Текст] , Lattice theory/Г. Биркгоф, -М., Изд-во иностранной лит., 1952
1. M. Pentus. Complexity of the Lambek calculus and its fragments. In: Advances in Modal Logic, vol. 8, College Publications, London, 2010 — P. 310-329.

#### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

#### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Информационные технологии используются традиционным образом (электронная почта для связи со студентами, публикация материалов на странице курса и проч.).

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- проработку учебного материала;
- выполнение домашних теоретических заданий.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** С.Л. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области информатики и вычислительной техники	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области информатики и вычислительной техники
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области информатики и вычислительной техники и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Структурная теория доказательств и алгебраическая логика» обучающийся должен:

### знать:

основы структурной теории доказательств (в формате генценовских секвенциальных исчислений), теории субструктурных логик и алгебраической логики.

### уметь:

решать задачи по означенным темам, правильно выбирая методы и подходы.

### владеть:

методами субструктурных логик для моделирования вычислительных процессов и в приложениях из математической лингвистики.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примерные типы заданий коллоквиума / контрольной работы:

1. Дана формула в языке исчисления предикатов. Построить её вывод в исчислении секвенций (классическом либо интуиционистском).
2. Дана формула в языке исчисления высказываний. Искрывающим поиском вывода в секвенциальном исчислении установить её недоказуемость.
3. Доказать корректность перевода Куроды (формулировку приводит преподаватель).
4. Привести пример формулы, выводимой в аффинной логике, но не выводимой в линейной.
5. Доказать, что дополнительные аксиомы логик  $K4$  и  $S4$  недоказуемы в логике  $K$ , путём исчерпывающего поиска вывода.
6. Доказать, что проблема выводимости в аффинной логике без экспоненциальной модальности алгоритмически разрешима и принадлежит классу  $PSPACE$ .
7. Доказать алгоритмическую разрешимость проблемы выводимости в линейной логике для формул, в которых экспоненциал разрешается применять только к пропозициональным переменным.
8. Сформулировать и доказать аналог дизъюнктивного свойства для одной из модальных логик ( $K$ ,  $K4$ ,  $S4$ ).
9. С помощью генценовского исчисления доказать алгоритмическую разрешимость одной из модальных логик ( $K$ ,  $K4$ ,  $S4$ ).
10. Доказать, что проблема выводимости в чисто мультипликативном фрагменте линейной логики принадлежит классу  $NP$ .

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Теорема об устранении правила сечения для классического и интуиционистского исчислений секвенций (случай логики предикатов).
2. Теоремы Харропа. Теорема Эрбрана.
3. Перевод Гёделя — Генцена.
4. Секвенциальные исчисления для линейной и аффинной логик, теорема об устранении сечения.
5. Моделирование вычислений на машине Минского с помощью экспоненциальной модальности в коммутативной линейной логике.
6. Моделирование вычислений на машине Тьюринга с помощью экспоненциальной модальности в некоммутиативной линейной логике.
7. Неразрешимость линейной логики.
8.  $PSPACE$ -полнота мультипликативно-аддитивного фрагмента линейной логики.
9. Моделирование бесконечных вычислений на машине Минского в коммутативной линейной логике с итерацией Клини.
10. Исчисления секвенций для логик  $K$ ,  $K4$ ,  $S4$ . Теоремы об устранимости сечения.
11. Интерполяционная лемма в форме Линдона для классической и интуиционистской логик высказываний.
12. Интерполяционная лемма с учётом счётчиков для исчисления Ламбека.
13. Теорема Биркгофа о представлении конечных дистрибутивных решёток.
14. Теорема Линденбаума — Тарского об алгебраической полноте для алгебраической логики относительно соответствующего многообразия алгебр.

##### Примеры задач

- Коммутирует ли в интуиционистской логике двойное отрицание с квантором всеобщности?
- Докажите, что если для субэкспоненциальной модальности разрешить только правило локального сокращения одной формулы, то полученное исчисление не будет обладать свойством устранимости сечения.
- Найдите все недистрибутивные решётки из 5 элементов.

##### Примеры билетов:

###### Билет 1

1. Свойство конечных моделей для дистрибутивного мультипликативно-аддитивного исчисления Ламбека.



2. Гиперсеквенциальное дистрибутивное мультипликативно-аддитивное исчисление Ламбека, его разрешимость.
3. Приведите пример гейтинговой алгебры, в которой нарушаются законы де Моргана.

Билет 2.

1. Теорема Линденбаума — Тарского об алгебраической полноте для алгебраической логики относительно соответствующего многообразия алгебр.
2. Секвенциальные исчисления для линейной и аффинной логик, теорема об устранении сечения.
3. Докажите обратимость правила введения импликации направо в интуиционистском исчислении секвенций.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Степень овладения студентами компетенциями, формируемыми в процессе изучения дисциплины, проверяется в ходе дифференцированного зачёта в конце курса. Текущий контроль осуществляется посредством коллоквиума или контрольной работы, на усмотрение преподавателя.

Оценка по курсу устанавливается в ходе дифференцированного зачёта в конце курса. Коллоквиум или контрольная работа в середине курса позволяет студентам предварительно оценить уровень своей подготовки, однако его / её результат не используется при вычислении оценки за курс.