

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Дополнительные главы функционального анализа и элементы дифференциальной геометрии
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра проблем передачи информации и анализа данных
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

2 (весенний) - Дифференцированный зачет

3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: С.А. Пирогов, д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

Программа обсуждена на заседании кафедры проблем передачи информации и анализа данных 31.05.2023

## Аннотация

В рамках этого курса проводится знакомство с основными концепциями геометрии многообразий и римановой геометрии и их физических приложениях, рассматриваются ключевые понятия теории неограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве и о ее применениях к задачам математической физики.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- дать представление о геометрии многообразий и римановой геометрии и их физических приложениях; дать представление о теории неограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве и о ее применениях к задачам математической физики.

#### Задачи дисциплины

- научить вычислять значения различных геометрических величин (длины, углы, площади, кривизны кривых и гауссова кривизна) в римановой геометрии;
- познакомить с методами спектрального анализа неограниченных самосопряженных операторов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия геометрии многообразий и римановой геометрии;
- основные свойства и конкретные примеры неограниченных самосопряженных операторов.

уметь:

- находить длины кривых, углы, площади, гауссову кривизну на римановом многообразии (в двумерном случае);
- находить собственные функции и собственные значения дифференциальных операторов, связанных с задачами математической физики.

владеть:

- навыком освоения большого объема информации;
- навыками постановки научно-исследовательских задач.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Банаховы алгебры. Спектр.	15			7
2	Преобразование Гельфанда.	15			8
3	Теоремы о неподвижной точке и их применения. Сплаины.	15			8
4	Элементы дифференциальной геометрии.	15			7
Итого часов		60			30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

##### 1. Банаховы алгебры. Спектр.

Банаховы алгебры. Спектр. Спектр линейного оператора. Классификация операторов. Функциональное исчисление. Спектральная теорема для ограниченных операторов. Свойства неограниченных операторов. Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Пространство максимальных идеалов банаховой алгебры.

##### 2. Преобразование Гельфанда.

Преобразование Гельфанда. Граница Шилова. Топологические векторные пространства. Локально выпуклые пространства.

Семестр: 3 (Осенний)

##### 3. Теоремы о неподвижной точке и их применения. Сплаины.

Теоремы о неподвижной точке и их применения. Квазианалитические классы функций. Сплаины. Аппроксимация сплайнами. Некорректные задачи. Регуляризация.

#### 4. Элементы дифференциальной геометрии.

Кривые на плоскости и в пространстве. Формулы Френе.

Поверхности. Первая квадратичная форма.

Касательная плоскость. Нормаль. Вторая квадратичная форма.

Формулы Вейнгартена. Коэффициенты связности. Теорема Гаусса.

Необходимые и достаточные условия изометричности.

Связность на многообразии. Ковариантное дифференцирование.

Геодезические.

Кручение и кривизна.

Римановы пространства. Римановы связности.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория с проектором.

#### 6. Перечень рекомендуемой литературы

##### Основная литература

фонд литературы кафедры

1. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. М.: Издательство иностранной литературы, 1956. 251 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7-е. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 572 с. ISBN 5-9221-0266-4.
3. Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973. 336 с.
4. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.
5. Пирковский А.Ю. Спектральная теория и функциональное исчисление для линейных операторов. М.: МЦНМО, 2010. ISBN 978-5-94057-573-3.
6. Постников М.М. Риманова геометрия // Лекции по геометрии. Семестр V. М.: Факториал Пресс, 1998.
7. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2000.
8. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
9. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.
10. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Факториал Пресс, 2000.

##### Дополнительная литература

фонд литературы кафедры

1. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
2. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958.
3. Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика // УМН. 1948. Т.3. № 6. С. 89–185.
4. Пуляев В.Ф., Цалюк З.Б. Задачи по функциональному анализу. Краснодар: КубГУ, 1983.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
7. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Изд-во ЛКИ, 2010.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том V. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960.
9. Морен К. Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.
10. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

**7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Программное обеспечение и информационные технологии не требуются.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к семинаристу.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра проблем передачи информации и анализа данных
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 2 (весенний) - Дифференцированный зачет
- 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** С.А. Пирогов, д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дополнительные главы функционального анализа и элементы дифференциальной геометрии» обучающийся должен:

### знать:

- основные понятия геометрии многообразий и римановой геометрии;
- основные свойства и конкретные примеры неограниченных самосопряженных операторов.

### уметь:

- находить длины кривых, углы, площади, гауссову кривизну на римановом многообразии (в двумерном случае);
- находить собственные функции и собственные значения дифференциальных операторов, связанных с задачами математической физики.

### владеть:

- навыком освоения большого объема информации;
- навыками постановки научно-исследовательских задач.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого семинара или в конце занятия по пройденной теме.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

Перечень вопросов к дифференцированному зачёту в 10 семестре:

1. Вычислить гауссову кривизну плоскости Лобачевского в полярных координатах.
2. То же в полугеодезических координатах.
3. То же в орициклических координатах.
4. То же в конформных координатах Пуанкаре.
5. То же в конформных координатах Клейна.
6. Вычислить гауссову кривизну сферы в полярных координатах.
7. То же в полугеодезических (экваториальных) координатах.
8. То же в конформных координатах стереографической проекции.
9. Вычислить гауссову кривизну псевдосферы.
10. Найти собственные функции и собственные значения оператора дифференцирования на отрезке с периодическими граничными условиями.

Вопросы к дифференцированному зачёту в 11 семестре:

- 1..Найти собственные функции и собственные значения с анти-периодическими граничными условиями.
- 2..Найти собственные функции и собственные значения с граничными условиями типа смещения фазы на заданный угол.
- 3.Найти собственные функции и собственные значения оператора Лапласа (квадрата оператора дифференцирования) на отрезке с граничными условиями Дирихле.
- 4..Найти собственные функции и собственные значения с граничными условиями Неймана.
- 5..Найти собственные функции и собственные значения со смешанными (Дирихле-Нейман) граничными условиями.
6. Найти собственные функции и собственные значения с граничными условиями Неймана.
7. Найти собственные функции и собственные значения с периодическими граничными условиями.
8. Найти собственные функции и собственные значения с анти-периодическими граничными условиями.
9. Найти собственные функции и собственные значения с граничными условиями типа смещения фазы на заданный угол.
10. Что такое римановы пространства и римановы связности?

#### **Критерии оценивания**

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.



Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой. Дифференцированный зачёт проводится в устной форме по вопросам.