

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составили:

В.И. Агошков, д-р физ.-мат. наук, профессор

Е.И. Пармузин, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике 16.03.2020

Аннотация

В современном обществе всевозрастающую роль играют разнообразные обратные задачи, задачи управления сложными процессами, задачи идентификации, задачи усвоения данных наблюдений в математических моделях и др. Поэтому насущной проблемой в образовательном процессе является изучение методологий эффективного решения данных задач. Некоторые из таких методологий представлены в настоящем курсе лекций. Они базируются на подходах и результатах нескольких разделов современной математики: теории сопряженных уравнений, теории оптимального управления системами с распределёнными параметрами, теории линейных уравнений в банаховых пространствах, теории некорректно поставленных задач и общих методах их решения, современных итерационных алгоритмах для операторных уравнений.

Настоящий курс предназначен прежде всего для студентов старших и аспирантов, прослушавших основы теории задач математической физики и вычислительной математики. Однако в данном курсе в первой его части приводятся сведения (без доказательств) из теории дифференциальных уравнений, теории обратных задач, оптимального управления и ряда других разделов математики, необходимых для данного курса. Особое внимание уделяется теории сопряженных операторов и уравнений в силу их значимости в математическом моделировании, в теории разрешимости уравнений, в вычислительной и прикладной математике.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Целью учебной дисциплины является получение знаний о принципах и методах решения сопряженных уравнений и методах оптимального управления, в том числе методах исследования и решения экстремальных и обратных задач, методах теории сопряжённых уравнений и оптимального управления в исследовании и решении прикладных задач, а также практическая подготовка студентов к дальнейшей самостоятельной работе в области математического моделирования физических задач и современных технологий.

Задачи дисциплины

- ознакомление слушателей с методами решения сопряженных уравнений и методах оптимального управления;
- приобретение слушателями теоретических знаний, и практических умений и навыков в области теории сопряжённых уравнений и оптимального управления;
- оказание консультаций и помощи слушателям в проведении собственных исследований при решении прикладных задач методами сопряженных уравнений и оптимального управления.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники,	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость

способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.4 Способен анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия о линейных и банаховых пространствах, сопряжённых пространствах и сопряжённых операторах;
- основные понятия и типы разрешимости операторных уравнений в банаховых пространствах;
- основные определения элементы выпуклого анализа;
- основные понятия задач оптимального управления;
- свойства решений дифференциальных уравнений основных задач математической физики;
- методы регуляризации и штрафа в обратных и вариационных задачах, алгоритмы возмущений;
- формулировки обратных задач и задач управления как задач оптимального управления с регуляризацией;
- типы разрешимости и разрешимость задач оптимального управления;
- итерационные алгоритмы решения обратных задач и задач оптимального управления;
- методы теории сопряжённых уравнений и оптимального управления в исследовании и решении прикладных задач.

уметь:

- применять методы теории сопряжённых уравнений и оптимального управления к исследованию и решению прикладных задач;
- абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций;
- оценивать погрешности аппроксимации и точности приближенных решений;
- делать правильные выводы из сопоставления результатов аналитической теории и численного эксперимента;
- производить численные оценки по порядку величины;
- делать качественные выводы при переходе к предельным условиям в изучаемых проблемах;
- пользоваться справочной литературой научного и прикладного характера для быстрого поиска необходимых математических и физических данных и понятий.

владеть:

- базовыми знаниями в области сопряженных уравнений и методов оптимального управления и принципами их использования в профессиональной деятельности;
- навыками самостоятельного решения основных задач сопряженных уравнений и методов оптимального управления;
- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования физико-математических задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Описание классов задач и этапов их исследования и решения.	10			5
2	Понятие о математических моделях сложных физических процессах, об обратных задачах, задачах управления.	10			5
3	Сведения из теории линейных пространств.	10			5
Итого часов		30			15
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		45 час., 1 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Описание классов задач и этапов их исследования и решения.

Некоторые условия разрешимости задач и единственности решений. Условие единственности решений. Условия разрешимости задач. Итерационные алгоритмы решения задач.

Условие плотной ("аппроксимативной") разрешимости задач. Условие плотной разрешимости. Решение системы вариационных уравнений в задаче о плотной разрешимости. Итерационные алгоритмы решения задач.

2. Понятие о математических моделях сложных физических процессах, об обратных задачах, задачах управления.

Понятие о математических моделях сложных физических процессах, об обратных задачах, задачах управления. Цели курса и основные его разделы.

Множества и области из R^n Классы функций.

Понятие о дифференциальном уравнении с частными производными, о краевых и начальных условиях. Понятие о дифференциальном уравнении с частными производными, о краевых и начальных условиях. Типичные примеры задач математической физики.

Понятие об обратных задачах. Понятие об обратных задачах. Примеры обратных задач и задач управления

Задачи оптимального управления как форма обобщенных постановок задач. Задачи оптимального управления как форма обобщенных постановок задач.

3. Сведения из теории линейных пространств.

Сведения из теории линейных пространств.

Линейные уравнения в банаховых пространствах.

Сопряженные пространства и операторы.

Экстремальные задачи и методы их решения.
Некорректные задачи и методы их решения.
Некоторые понятия теории оптимального управления.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Доска, ноутбук и мультимедийное оборудование (проектор или плазменная панель).

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Математический анализ [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов ; под ред. А. Н. Тихонова .— М. : Наука, 1979 .— 719 с.
1. В. И. Агошков Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики; Рос. акад. наук, Ин-т вычислит. математики .— Научное изд. — М. : ИВМ РАН, 2003 .— 256 с. - Библиогр.: с. 250-256. - 250 экз. - ISBN 5-901854-06-3.
2. В. И. Агошков, П. Б. Дубовский, В. П. Шутяев Методы решения задач математической физики: [учеб. пособие для вузов]; под ред. Г. И. Марчука .— М. : Физматлит, 2002 .— 320 с. - Библиогр.: с. 316-320. - 3000 экз. - ISBN 5-9221-0257-5 (в пер.).
3. В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов Математический анализ. В 2 ч. Ч. 1 : учебник для вузов; под ред. А. Н. Тихонова ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова .— 3-е изд., пере-раб. и доп. — М. : Проспект : Изд-во Моск. ун-та, 2004 .— 672 с. — (Классический университетский учебник). - 3000 экз. - ISBN 5-98032-668-5 (в пер.)
4. В. А. Ильин, Э. Г. Позняк Основы математического анализа. В 2 ч. Ч. 1 : учебник для ун-тов; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова .— 7-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2005 .— 648 с. : ил. + pdf-версия .— (Курс высшей математики и математической физики ; вып. 2). - Алф. указ.: с. 613-616. - 80 000 экз. (в пер.) .— Полный текст (Дос-туп из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

1. Численные методы [Текст] : учеб. пособие для вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков .— М. : Наука, 1987 .— 630 с.
2. Оптимальное управление распределенными системами : Теория и приложения [Текст] / А. В. Фурсиков - Новосибирск: Научная книга, 1999
1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. --- М.: Наука, 1981.
3. Владимирова В.С. Уравнения математической физики. --- М.: Наука, 1988.
4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. --- М.: Изд-во МГУ, 1994.
5. Крейн С.Г. . Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
6. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. --- М.: Наука, 1989.
7. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. --- М.: Наука, 1992.
8. Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П. Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. --- М.: Наука, 1993.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
10. Треногин В.А. Функциональный анализ. --- М.: Наука, 1980.
11. Фурсиков А.В. (1999) Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. --- Новосибирск: Научная книга, 1999.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

доступные через Internet электронные конспекты лекций, учебные пособия и сборники задач, разработанные для данного курса.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Программное обеспечение и информационные технологии не требуются.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, алгоритмы.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к дифференциальному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и биоматематике
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчики:

В.И. Агошков, д-р физ.-мат. наук, профессор

Е.И. Пармузин, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.4 Способен анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики» обучающийся должен:

знать:

основные понятия о линейных и банаховых пространствах, сопряжённых пространствах и сопряжённых операторах;

основные понятия и типы разрешимости операторных уравнений в банаховых пространствах;

основные определения элементы выпуклого анализа;

основные понятия задач оптимального управления;

свойства решений дифференциальных уравнений основных задач математической физики;

методы регуляризации и штрафа в обратных и вариационных задачах, алгоритмы возмущений;

формулировки обратных задач и задач управления как задач оптимального управления с регуляризацией;

типы разрешимости и разрешимость задач оптимального управления;

итерационные алгоритмы решения обратных задач и задач оптимального управления;

методы теории сопряжённых уравнений и оптимального управления в исследовании и решении прикладных задач.

уметь:

применять методы теории сопряжённых уравнений и оптимального управления к исследованию и решению прикладных задач;

абстрагироваться от несущественных влияний при моделировании реальных физических ситуаций;

оценивать погрешности аппроксимации и точности приближенных решений;

делать правильные выводы из сопоставления результатов аналитической теории и численного эксперимента;

производить численные оценки по порядку величины;

делать качественные выводы при переходе к предельным условиям в изучаемых проблемах;

пользоваться справочной литературой научного и прикладного характера для быстрого поиска необходимых математических и физических данных и понятий.

владеть:

базовыми знаниями в области сопряженных уравнений и методов оптимального управления и принципами их использования в профессиональной деятельности;

навыками самостоятельного решения основных задач сопряженных уравнений и методов оптимального управления;

навыками освоения большого объёма информации;

культурой постановки и моделирования физико-математических задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Линейные операторы и функционалы. Сопряженные пространства.
2. Сопряженные, симметричные и самосопряженные операторы .
3. Приложения сопряженных операторов и уравнений в теории разрешимости уравнений, вычислительной математике, теории возмущений, теории чувствительности.
4. Линейные уравнения. Теория разрешимости линейных операторных уравнений.
5. Уравнение $A^*Au=A*f$. Уравнение $au+A^*Au=A*f$.
6. Об итерационных методах решения линейных операторных уравнений.
7. Определения и сведения из нелинейного анализа.
8. Экстремальные задачи и критические точки функционалов. Методы минимизации функ-ционалов.
9. Понятие о задаче оптимального управления. Условия оптимальности. О подходах к реше-нию задач оптимального управления.
10. Некорректные, условно корректные задачи и понятие регуляризирующего оператора.
11. Метод М.М. Лаврентьева.

12. Метод В.К. Иванова.
13. Метод регуляризации А.Н.Тихонова.
14. Итерационные методы решения некорректных задач.
15. Описание классов обратных задач и задач управления и этапов их исследования и решения.
16. Формы записи вариационных уравнений.
17. Некоторые условия разрешимости задач и единственности решений.
18. Итерационные алгоритмы решения некорректных задач.
19. Условие плотной ("аппроксимативной") разрешимости задач.
20. Решение системы вариационных уравнений в задаче о плотной разрешимости.
21. Итерационные алгоритмы решения обратных задач и задач управления.
22. Условие корректной разрешимости задачи. Сходимость регуляризованных решений.
23. Обобщенные постановки и решения задач математической физики. Сведение краевой задачи к операторному уравнению.
24. Эллиптическая задача о внутренних источниках.
25. Задача о локальном граничном управлении.
26. Задача точного управления для параболического уравнения.
27. Параболическая задача о граничном управлении.
28. Задача усвоения данных наблюдений.
29. Обратная задача для возмущенной системы Стокса.
30. Подходы к решению нелинейных задач.
31. Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в применении к построению вычислительных алгоритмов.
32. Вычислительный процесс решения возмущенной системы Стокса.

Приблизительный перечень билетов:

Билет №1.

1. Линейные уравнения. Теория разрешимости линейных операторных уравнений. Уравнение $A * Au = A * f$. Уравнение $au + A * Au = A * f$.
2. Определения и сведения из нелинейного анализа.

Билет №2.

1. Об итерационных методах решения линейных операторных уравнений.
2. Экстремальные задачи и критические точки функционалов. Методы минимизации функционалов.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференциального зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций. Зачет проводится путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.