

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Топологическая комбинаторика
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: О.Р. Мусин, д-р физ.-мат. наук, преподаватель

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 20.01.2025

Аннотация

Этот курс посвящен предмету, который стал активной и инновационной областью исследований в математике за последние сорок лет с растущим числом приложений в математике, информатике и других прикладных областях. Топологическая комбинаторика занимается решением комбинаторных задач с применением топологических инструментов. В большинстве случаев эти решения очень элегантны, и связь между комбинаторикой и топологией часто оказывается неожиданным сюрпризом. Курс охватывает такие темы, как теоремы о неподвижных точках и их дискретные версии, справедливое распределение, проблемы раскраски графов, проблемы вложения из дискретной геометрии, а также алгоритмические вопросы, связанные с этими темами. Предыдущие знания в топологии или теории графов полезны, но не обязательны.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

— дать обучающимся в руки новый для них инструмент решения комбинаторных задач. В результате обучающиеся смогут как решать задачи непосредственно с использованием топологических методов, так и в целом получать/улучшат навыки топологического анализа данных, которые могут быть полезными при разработке алгоритмов. Студенты также попрактикуются в командной работе над проектом, предполагающим реализацию полного цикла решения неформально поставленной задачи.

Задачи дисциплины

Задачи дисциплины включают ознакомление обучающихся с терминологией, методами и основными результатами топологической комбинаторики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности основные законы естествознания, современный математический аппарат и алгоритмы	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационных технологий, владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности

математический аппарат и алгоритмы, современные информационно-коммуникационные технологии	ПК-2.3 Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий
	ПК-2.4 Владеет методами и алгоритмами решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического поиска, опыт работы с научными источниками

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия топологической комбинаторики и основные теоремы;
- контекст их использования;
- релевантный математический аппарат, основную учебную литературу по данной дисциплине

уметь:

- доказывать основные теоремы топологической комбинаторики,
- применять результаты топологической комбинаторики для учебных (упрощённых) и реальных задач дискретной математики и дискретной оптимизации.

владеть:

- терминологией топологической комбинаторики и алгоритмами справедливого дележа.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Лемма Шпернера	3	1		6
2	Задачи справедливого распределения	3	2		6
3	Классические теоремы о неподвижных точках	3	1		6
4	Дискретные аналоги теорем о неподвижных точках	3	2		7
5	Алгоритмы для задач справедливого дележа	3	1		7
6	Задачи о раскраске графов	3	2		7
7	Гипотеза Кнезера	4	2		7
8	Свойства графов и их сложность	4	2		7
9	Теорема Тверберга и ее топологические обобщения	4	2		7
Итого часов		30	15		60
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Лемма Шпернера

Понятие Лемма Шпернера.

Применение Лемма Шпернера в комбинаторной топологии, теории игр и других областях математики.

Применение Леммы Шпернера для доказательства сложных теорем, таких как теорема Брауэра о неподвижной точке.

2. Задачи справедливого распределения

Виды задач справедливого дележа.

Комбинаторные предпочтения.

Аддитивные предпочтения.

3. Классические теоремы о неподвижных точках

Теорема Брауэра о неподвижной точке.

Теорема Банаха о неподвижной точке.

Теорема Нильсена о неподвижной точке.

4. Дискретные аналоги теорем о неподвижных точках

Теоремы Таккера о неподвижной точке.

Теорема Гейла о неподвижной точке.

Теорема Шепли о неподвижной точке.

5. Алгоритмы для задач справедливого дележа

Задача распределения множества ресурсов среди нескольких людей, которые претендуют на доли этих ресурсов, при этом каждое лицо получает часть, которая в той или иной степени устраивает его.

6. Задачи о раскраске графов

Раскраска графа.

Теоретико-графовая конструкция для раскраски графов.

Рёберная раскраска.

Тотальная раскраска.

7. Гипотеза Кнезера

Гипотеза Кнезера, её доказательства, обобщения и приложения.

8. Свойства графов и их сложность

Характеристики, описывающие структуру и поведение графов.

Топологическая Теорема Радона.

Теорема Ван Кампена-Флореса.

9. Теорема Тверберга и ее топологические обобщения

Обобщения теоремы Тверберга:

1. Обобщения для произвольных топологических пространств.

2. Теоремы о пересечениях

3. Комбинаторные структуры.

4. Обобщения на другие поля.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

компьютерный класс, техническое обеспечение: Microsoft Office, 3DExperience/Catia.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Комбинаторика и теория вероятностей [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— Долгопрудный : Интеллект, 2013 .— 104 с.

Дополнительная литература

1. Введение в теоретическое программирование. Беседы о методе [Текст] / А. П. Ершов : доп. М-вом высш. и сред. спец. обр. СССР - М.Наука,1977

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не требуется.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

Для успешного изучения дисциплины студент должен знать фундаментальные понятия, законы, теории.

Неотъемлемой частью курса являются семинары, на которых закрепляются теоретические знания и вырабатываются практические навыки.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- подготовку к экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	<u>2</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен	
Разработчик:	О.Р. Мусин, д-р физ.-мат. наук, преподаватель

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности основные законы естествознания, современный математический аппарат и алгоритмы, современные информационно-коммуникационные технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационных технологий, владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности
	ПК-2.3 Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий
	ПК-2.4 Владеет методами и алгоритмами решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического поиска, опыт работы с научными источниками

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Топологическая комбинаторика» обучающийся должен:

знать:

- основные понятия топологической комбинаторики и основные теоремы;
- контекст их использования;
- релевантный математический аппарат, основную учебную литературу по данной дисциплине

уметь:

- доказывать основные теоремы топологической комбинаторики,
- применять результаты топологической комбинаторики для учебных (упрощённых) и реальных задач дискретной математики и дискретной оптимизации.

владеть:

- терминологией топологической комбинаторики и алгоритмами справедливого дележа.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Привести полное доказательство леммы Шпернера для отрезка и треугольника (Шашкин).
2. Доказать лемму Таккера. .
3. Пусть f – непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ на себя. Докажите, что тогда отображение $g = f^2$ (композиция отображения f с самим собой) имеет по крайней мере две неподвижных точки. Верно ли это, если f отображает отрезок $[a, b]$ в себя, но не на себя?
4. Сформулируйте и докажите теорему Брауэра о неподвижной точке для квадрата.
5. Сформулируйте и докажите теорему Брауэра о неподвижной точке для круга.
6. Докажите теорему Брауэра о неподвижной точке, используя лемму Шпернера
7. Докажите теорему Борсука–Улама для окружности
8. Докажите первую и вторую теоремы о блинах

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1:

1. Задача 1 (лемма Шпернера) выбирается из следующего списка:

- (а) Шашкин 6 (т.е. задача № 6 из книжки Шашкина)
- (б) Шашкин 9
- (в) Шашкин 11:
- (г) Шашкин 8
- (д) Шашкин 12

2. Задача 2:

- (а) Привести полное доказательство теоремы о справедливом разрезании торта для двух участников.
- (б) Привести полное доказательство теоремы о справедливом распределении арендной платы для двух участников.
- (в) Дана триангуляция многоугольника с вершинами в его вершинах. Доказать, что можно расставить метки А, В, С так, что у каждого треугольника будут все три метки.

Билет №2:

1. Задача выбирается из следующего списка:

- (а) Мат, с. 23, Theorem 2.1.1. Доказать эквивалентность BU1a и BU2a
- (б) Мат, с. 23, Theorem 2.1.1. Доказать эквивалентность BU1a и BU2b
- (в) Мат, с. 23, Theorem 2.1.1. Доказать эквивалентность BU1a и LS-c

2. Задача выбирается из следующего списка:

- (а) Шашкин стр. 24 («Вторая теорема о блинах».)
- (б) Мат, с. 53: Exercise 1
- (в) Мат, с. 53: Exercise 4

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой.