

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

Рабочая программа дисциплины (модуля)

| | |
|----------------------------|---|
| по дисциплине: | Методы выпуклой оптимизации |
| по направлению: | Информатика и вычислительная техника |
| профиль подготовки: | Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра проблем передачи информации и анализа данных |
| курс: | 1 |
| квалификация: | магистр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: А.В. Назин, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры проблем передачи информации и анализа данных 01.02.2024

Аннотация

В курсе предполагается, что студенты уже знакомы с элементами выпуклого анализа (в частности, с преобразованием Лежандра–Фенхеля и понятием субградиента выпуклой функции) и теорией вероятностей. Изучается метод зеркального спуска (МЗС) при возможности наблюдать градиент, а иногда и значение целевой функции (оракул 1-го порядка), представляющий собой нетривиальное обобщение стандартного градиентного метода. Показывается эффективность МЗС в классе выпуклых целевых функций с замкнутым выпуклым множеством ограничений. Подход распространяется как на детерминированные, так и на стохастические выпуклые задачи, а также на минимаксные задачи с выпукло-вогнутой целевой функцией. В качестве примеров рассматривается стохастическая задача о многоруком бандите (с доказательствами верхней и нижней границ), а также задача о нахождении главного собственного вектора стохастической матрицы (задача PageRank), и задача бинарной классификации (обучение с учителем). Курс носит теоретический характер и направлен на строгие постановки и математические доказательства.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- изучение студентами основных методов и алгоритмов выпуклой оптимизации (как для детерминированных, так и для стохастических задач), выяснение их сложности (по числу итераций, гарантирующему заданную точность оптимума) и их применение в таких задачах как PageRank, машинного обучения, в задаче о многоруком бандите.

Задачи дисциплины

- получение представлений о современных рекуррентных методах выпуклой оптимизации;
- обоснование сложности методов — числа итераций, гарантирующего заданную точность оптимума (по функции);
- знакомство с соответствующими методами решения задач машинного обучения, PageRank, о многоруком бандите.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий | УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними |
| | УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации |
| | УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности |
| ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области информатики и вычислительной техники | ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области информатики и вычислительной техники |
| | ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности |
| | ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области информатики и вычислительной техники и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности |

| | |
|--|--|
| ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности | ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке |
| | ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой |
| | ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности |

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- описание класса выпуклых задач оптимизации (как детерминированных, так и стохастических);
- основные рекуррентные методы выпуклой оптимизации и их сложность;
- конкретные алгоритмы прямо-двойственной оптимизации, предназначенные для машинного обучения.

уметь:

- формулировать задачи выпуклой оптимизации;
- описывать современные методы и алгоритмы выпуклой оптимизации, в частности, прямо-двойственного типа;
- обосновывать сложность указанных методов (по числу итераций);
- пользоваться основными прямо-двойственными алгоритмами выпуклой оптимизации, широко используемыми для задач машинного обучения.

владеть:

- навыком освоения большого объема информации;
- навыками постановки научно-исследовательских задач и навыками самостоятельной работы.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|---|--|---|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Адаптивный АЗС. Задача о многоруком бандите. | 5 | | | 10 |
| 2 | Введение: выпуклые множества и функции. Элементы выпуклого анализа. | 5 | | | 10 |
| 3 | Задача PageRank. Задача бинарной классификации. | 5 | | | 10 |
| 4 | Задача выпуклой стохастической оптимизации. Частный случай параметров МЗС. | 5 | | | 10 |
| 5 | Метод эллипсоидов, Идея метода зеркального спуска. | 5 | | | 10 |

| | | | | | |
|-----------------------|---|--------------------|--|--|----|
| 6 | Модель черного ящика. Метод центра тяжести. | 5 | | | 10 |
| Итого часов | | 30 | | | 60 |
| Подготовка к экзамену | | 0 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 90 час., 2 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Адаптивный АЗС. Задача о многоруком бандите.

Адаптивный АЗС (по обобщенной температуре), его верхняя граница и сложность. Другие варианты прямо-двойственных методов. Обсуждение.

Задача о многоруком бандите. Применение оптимизационного подхода и МЗС. Получение верхней границы. Сравнение с известной информационной нижней границей.

2. Введение: выпуклые множества и функции. Элементы выпуклого анализа.

Введение: выпуклые множества и функции. Задача выпуклой оптимизации (в n -мерном пространстве). Примеры: машинное обучение, классификация с учителем, регрессия.

Элементы выпуклого анализа: теоремы о разделении, об опорной гиперплоскости, определение и существование субградиента. Условия оптимальности 1-го порядка.

3. Задача PageRank. Задача бинарной классификации.

Задача PageRank как оценивание главного собственного вектора стохастической матрицы. Сведение к задаче выпуклой оптимизации и применение МЗС.

Задача бинарной классификации с учителем: применение МЗС для минимизации ошибки классификации на выпуклой оболочке «простых» правил разделения.

4. Задача выпуклой стохастической оптимизации. Частный случай параметров МЗС.

Задача выпуклой стохастической оптимизации на заданном компакте с оракулом 1-го порядка. МЗС и его анализ. Понятие прокси-функции через преобразование Лежандра-Фенхеля. Параметр сильной выпуклости.

Частный случай параметров МЗС; полностью рекуррентный алгоритм ЗС (АЗС), его верхняя граница и сложность. Доказательства.

5. Метод эллипсоидов, Идея метода зеркального спуска.

Метод эллипсоидов, его свойства и сложность.

Идея метода зеркального спуска (МЗС). Параметры метода: исходная и двойственная нормы, потенциал отображения сопряженного пространства и условие Липшица на градиент. Примеры (с доказательствами).

6. Модель черного ящика. Метод центра тяжести.

Модель черного ящика. Понятие об оракуле, его сложности, о методе оптимизации и его сложности. Обзор методов и результатов.

Метод центра тяжести. Доказательство верхней границы. Сложность метода.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

доска, ноутбук и мультимедийное оборудование (проектор или плазменная панель).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в оптимизацию [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. Т. Поляк .— М. : Наука, 1983 .— 384 с.

Фонд литературы базовой кафедры (организации):

2. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979. С. 384.
3. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М.: 2010.

Дополнительная литература

Фонд литературы базовой кафедры (организации):

1. Tutorial: Mirror Descent Algorithms for. Large-Scale Deterministic and Stochastic Convex Optimization. Arkadi Nemirovski.
<http://www.ttic.edu/colt2012/download/COLT-Mirror-Descent-Tutorial.pdf>
2. Назин А.В., Поляк Б.Т. Рандомизированный алгоритм нахождения собственного вектора стохастической матрицы с применением к задаче PageRank // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 2. С. 131-141.
3. N. Cesa-Bianchi and G. Lugosi. Prediction, Learning, and Games. Cambridge University Press, 2006.
4. P. Auer, N. Cesa-Bianchi, Y. Freund, and R. Schapire. The nonstochastic multiarmed bandit problem. SIAM Journal on Computing. 2002. 32:48–77.
5. Kiwiel, K.C., Proximal Minimization Methods with Generalized Bregman Functions, SIAM J. Control Optim., 1997. Vol. 35. N 4. P. 1142–1168.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://lib.mipt.ru> – электронная библиотека Физтеха.
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <http://benran.ru> – библиотека по естественным наукам Российской академии наук.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, алгоритмы.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

| | |
|---|---|
| по направлению: | Информатика и вычислительная техника |
| профиль подготовки: | Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра проблем передачи информации и анализа данных |
| курс: | <u>1</u> |
| квалификация: | магистр |
| Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет | |
| Разработчик: | А.В. Назин, д-р физ.-мат. наук, профессор |

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|--|--|
| УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий | УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними |
| | УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации |
| | УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности |
| ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области информатики и вычислительной техники | ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области информатики и вычислительной техники |
| | ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности |
| | ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области информатики и вычислительной техники и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности |
| ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности | ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке |
| | ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой |
| | ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности |

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Методы выпуклой оптимизации» обучающийся должен:

знать:

- описание класса выпуклых задач оптимизации (как детерминированных, так и стохастических);
- основные рекуррентные методы выпуклой оптимизации и их сложность;
- конкретные алгоритмы прямо-двойственной оптимизации, предназначенные для машинного обучения.

уметь:

- формулировать задачи выпуклой оптимизации;
- описывать современные методы и алгоритмы выпуклой оптимизации, в частности, прямо-двойственного типа;
- обосновывать сложность указанных методов (по числу итераций);
- пользоваться основными прямо-двойственными алгоритмами выпуклой оптимизации, широко используемыми для задач машинного обучения.

владеть:

- навыком освоения большого объема информации;
- навыками постановки научно-исследовательских задач и навыками самостоятельной работы.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов для сдачи дифференцированного зачета:

1. Определения выпуклого множества и выпуклой функции; строгие выпуклые множества и функции; сильно выпуклые функции. Задача выпуклой оптимизации на заданном множестве в конечномерном пространстве. Формулировка задач машинного обучения, бинарной классификации с учителем и линейной регрессии как задачи выпуклой оптимизации. Возможные варианты этих задач: Support Vector Machines (SVM) и Hinge Loss в классификации, МНК, гребневая регрессия и LASSO для регрессии.
2. Формулировка теоремы о разделении и теоремы об опорной гиперплоскости. Определение субградиента; соответствующая теорема о существовании и доказательство. Важность задач выпуклой оптимизации. Условия оптимальности 1-го порядка.
3. Понятие черного ящика и оракула. Порядок оракула. Понятие метода оптимизации. Сложность оракула и метода; понятие о дефекте метода (регрет). О структурной оптимизации. Краткий обзор методов и результатов выпуклой оптимизации.
4. Формулировка метода центра тяжести. Исходные предположения о задаче и оракуле. Теорема о дефекте метода (о верхней границе); доказательство с использованием леммы Грюнбаума. Сложность метода и его реализуемость.
5. Лемма об отсечении эллипсоида плоскостью, проходящей через его центр. Метод эллипсоидов, его свойства: сложность и трудоемкость.
6. Понятие о методе зеркального спуска (МЗС) в непрерывном времени. Исходное и сопряженное векторные пространства в \mathbb{R}^n , исходная и двойственная нормы, потенциальное гладкое отображение сопряженного пространства $\text{grad } W$ и условие Липшица (на градиент потенциала $\text{grad } W$). Пример с евклидовыми нормами и квадратичным потенциалом, приводящий МЗС к стандартному субградиентному методу.
7. Задача выпуклой стохастической оптимизации на заданном компакте с оракулом градиентного типа. МЗС (в дискретном времени) и его анализ. Преобразование Лежандра-Фенхеля. Параметр обобщенной температуры. Определение прокси-функции V , ее связь с потенциальным отображением сопряженного пространства на допустимое множество. Параметр сильной выпуклости прокси-функции и связь с условием Липшица на $\text{grad } W$. Пример оптимизации на стандартном симплексе. Прокси-функция энтропийного типа, ее свойства выпуклости по отношению к норме в l_1 ; соответствующее преобразование Лежандра-Фенхеля (с параметром обобщенной температуры) и прямое обоснование условия Липшица на градиент.
8. Выбор последовательностей коэффициента усиления и обобщенной температуры: частный случай параметров МЗС; полностью рекуррентный алгоритм ЗС (АЗС), доказательство его верхней границы (дефекта), сложность и трудоемкость АЗС. Обобщение метода как прямо-двойственный. Пример оптимизации на заданном евклидовом шаре с квадратичной прокси-функцией: АЗС как алгоритм проекции субградиента.
9. Адаптивный АЗС (по обобщенной температуре и постоянному коэффициентом усиления). Условие о равномерно ограниченной норме субградиента минимизируемой функции почти наверное. Теорема о верхней границе, доказательство. Сравнение с нижней границей Немировского-Юдина (без доказательства). Сложность АЗС. Другие варианты прямо-двойственных алгоритмов.
10. Стохастическая задача о многоруком бандите. Применение оптимизационного подхода и алгоритма ЗС с целью синтеза рандомизированной стратегии, минимизирующей функцию средних потерь. Получение верхней границы (дефекта функции потерь). Сравнение с известной информационной нижней границей (Auer et al., 2002) без доказательства.
11. Задача PageRank как задача оценивания главного собственного вектора стохастической матрицы. Сведение к задаче выпуклой стохастической оптимизации с оракулом градиентного типа. Применение МЗС с проксифункцией энтропийного типа. Рандомизированные АЗС.

12. Задача бинарной классификации с учителем, сведение к задаче выпуклой стохастической оптимизации на стандартном симплексе. Понятие и примеры функций фи-риска: экспоненциальные, используемые в SVM, и логит-потери. Применение МЗС для online-минимизации среднего фи-риска на выпуклой оболочке решающих правил (т.е. на классе агрегированных решающих правил). Явная неасимптотическая верхняя граница.

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачет проводится в устной форме.

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 20 минут на подготовку. Опрос обучающегося проводится в течение 30 минут.

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.