

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория чисел. Часть 2
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: М.Р. Габдуллин

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 30.05.2022

Аннотация

В курсе будет изложен целый ряд как классических, так и современных результатов теории чисел, связанных с диофантовыми приближениями и трансцендентными числами, распределением простых чисел и нулями дзета-функции Римана, анализом Фурье на конечных абелевых группах. Кроме того, курс предусматривает разбор и самостоятельное решение наиболее характерных задач по перечисленным разделам. Для освоения курса желательно знание основ алгебры и теории функций комплексного переменного, однако большая часть необходимых сведений будет дана слушателям по ходу изложения.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Получение студентами представления об элементарной и аналитической теории чисел.

Задачи дисциплины

Развитие у студентов навыков, необходимых для работы в области теории чисел.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области информатики и вычислительной техники	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области информатики и вычислительной техники
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области информатики и вычислительной техники и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны
знать:

Классические методы теории чисел.

уметь:

Работать с основными задачами в сфере теории чисел.

владеть:

Методами теории чисел.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Простые числа.	4	4		4
2	Дзета-функция Римана.	4	4		4
3	Числовые сравнения	6	4		6
4	Теория характеров Дирихле.	6	6		6
5	Алгебраические и трансцендентные числа.	6	6		6
6	Цепные дроби и их свойства.	4	6		4
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Простые числа.

Теорема Евклида о бесконечности простых чисел. Решето Эратосфена. Функция Чебышева и её оценки. Основная теорема арифметики. Асимптотический закон распределения простых чисел. Свойства простых чисел. Теорема о существовании простого числа в промежутке $[n, 2n]$.

2. Дзета-функция Римана.

Простейшие свойства Дзета-функции Римана, ее связь с простыми числами.

Представление дзета-функции в области $\text{Re } s > 1$ и отсутствие там нулей. Логарифмическая производная дзета-функции. Тождество Эйлера.

Формула суммирования Абеля. Продолжение дзета-функции в область $\text{Re } s > 0$. Оценки дзета-функции и ее производной в области $1 \leq \text{Re } s \leq 2$. Отсутствие нулей дзета-функции на единичной прямой.

3. Числовые сравнения

Сравнения и классы вычетов по заданному модулю. Малая теорема Ферма. Теорема Эйлера и порядке группы всех обратимых классов вычетов по заданному модулю.

4. Теория характеров Дирихле.

Теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях. Следствия теоремы. Характеры: аддитивные и мультипликативные. Свойства характеров. Суммы характеров. L-функции Дирихле. Связь с простыми числами в арифметических прогрессиях. Построение всех аддитивных характеров по заданному модулю. Продолжение L-функции Дирихле в область $\text{Re } s > 0$. Отсутствие нулей в области $\text{Re } s > 1$.

5. Алгебраические и трансцендентные числа.

Определение и вопросы существования. Теорема Лиувилля и конструирование трансцендентных чисел. Алгебраические числа и их свойства. Аннулирующий многочлен. Целые алгебраические числа. Теорема Линдемана - Вейерштрасса.

6. Цепные дроби и их свойства.

Теорема Дирихле о приближении иррационального числа рациональными.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Основы теории чисел [Текст] : учебник для вузов / И. М. Виноградов .— 6-е изд., испр. — М. : Гостехиздат, 1953 .— 180 с.
2. Введение в теорию алгебраических чисел [Текст]/М. М. Постников, -М., Наука, 1982
3. Основы теории чисел [Текст], монография/А. Вейль , -М., Мир, 1972

Дополнительная литература

1. Вычислительно сложные задачи теории чисел [Текст] : учеб. пособие для вузов / Е. А. Гречников [и др.] ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова .— М. : Изд-во Моск. ун-та, 2012 .— 312 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта лекций;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки: Прикладная математика и информатика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра методов современной математики
курс: 1
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: М.Р. Габдуллин

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области информатики и вычислительной техники	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области информатики и вычислительной техники
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области информатики и вычислительной техники и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория чисел. Часть 2» обучающийся должен:

знать:

Классические методы теории чисел.

уметь:

Работать с основными задачами в сфере теории чисел.

владеть:

Методами теории чисел.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

- Доказать, что ряд $\sum_p 1/p$ расходится, где суммирование ведется по всем простым числам."
- Оценить расстояние между соседними простыми числами.
- Найти количество делителей натурального числа исходя из его канонического разложения на простые множители.

4. Построить все аддитивные характеры по модулю 8.
5. Доказать, что e^a — трансцендентно, если a — алгебраическое число.
6. Найти модуль суммы Гаусса. Вычислить сумму Гаусса.
7. Доказать, что множество действительных чисел, которые можно приблизить рациональными лучше в показателе степени, чем в теореме Дирихле, имеет Лебегову меру нуль."

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Теорема о существовании простого числа в промежутке $[n, 2n]$.
2. Основная теорема арифметики.
3. Представление дзета-функции в области $\sigma > 1$ и отсутствие там нулей. Логарифмическая производная дзета-функции. Тождество Эйлера.
4. Формула суммирования Абеля. Продолжение дзета-функции в область $\sigma > 0$.
5. Оценки дзета-функции и ее производной в области $1 \leq \sigma \leq 2$.
6. Формула суммирования Перрона. Асимптотический закон распределения простых чисел.
7. Теорема Эйлера и порядке группы всех обратимых классов вычетов по заданному модулю.
8. Бесконечность простых чисел в прогрессиях вида $4n \pm 1$.
9. Суммы характеров.
10. Продолжение L-функции Дирихле в область $\sigma > 0$. Отсутствие нулей в области $\sigma > 1$.
11. Бесконечность простых чисел в произвольных арифметических прогрессиях.
12. Алгебраические числа и их свойства. Аннулирующий многочлен. Целые алгебраические числа.
13. Алгебраические числовые поля. Теорема о примитивном элементе. Кольцо целых алгебраических чисел.
14. Теорема Линдемана-Вейерштрасса.
15. Цепные дроби и их свойства. Теорема Дирихле о приближении иррационального числа рациональными.
16. Доказать, что приведенная квадратичная иррациональность раскладывается в периодическую цепную дробь.

Задачи.

1. Доказать, что ряд $\sum 1/p$ расходится, где суммирование ведется по $p=1$ всем простым числам.
2. Оценить расстояние между соседними простыми числами.
3. Построить все аддитивные характеры по модулю 8.
4. Оценить сверху функцию количества делителей $\tau(n)$ натурального числа n .
5. Найти асимптотику для числа целых точек под гиперболой $xy = N$.
6. Решить систему сравнений с использованием Китайской теоремы об остатках.
7. Найти первообразный корень по модулю $2 \cdot 73$.
8. Решить $x^3 + 3x + 3 \equiv 0 \pmod{49}$.
9. Доказать, что множество действительных чисел, которые можно приблизить рациональными лучше в показателе степени, чем в теореме Дирихле, имеет Лебегову меру нуль.
10. Приблизить рациональным числом $\sqrt{7}$ с точностью не хуже 10^{-3} .

Примеры билетов

Билет 1

1. Теорема Евклида о бесконечности простых чисел. Решето Эратосфена. Функция Чебышева и ее оценки.
2. Доказать, что e^a — трансцендентно, если a — алгебраическое число.

Билет 2.

1. Отсутствие нулей дзета-функции на единичной прямой.
2. Найти модуль суммы Гаусса. Вычислить сумму Гаусса.

Билет 3.

1. Построение всех аддитивных характеров по заданному модулю.
2. Найти количество делителей натурального числа исходя из его канонического разложения на простые множители.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачёта обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.