

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики
А.М. Райгородский**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория чисел
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: И.С. Резвякова, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 30.05.2022

Аннотация

В данном курсе будут изложены классические результаты аналитической теории чисел, связанные с дзета-функцией Римана и ее нулями, рассказан метод производящих функций (формулы суммирования Перрона), позволяющий сводить задачи теории чисел к задачам анализа и, как следствие, будет доказан асимптотический закон распределения простых чисел.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Получение студентами представления о классических результатах аналитической теории чисел.

Задачи дисциплины

Развитие у студентов навыков, необходимых для работы в области теории чисел.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

Классические методы теории чисел.

уметь:

Работать с основными задачами в сфере теории чисел.

владеть:

Методами теории чисел.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Простые числа	1	1		3
2	Мультипликативные функции и ряды Дирихле	1	1		3
3	Дзета-функция Римана	1	1		3
4	Функциональное уравнение для ζ -функции Римана	2	2		3
5	Формула Вейерштрасса для ζ -функции	2	2		3
6	Распределение нетривиальных нулей дзета-функции	2	2		3
7	Метод комплексного интегрирования	2	2		4
8	Оценка дзета-функции при больших значениях мнимой части аргумента	2	2		4
9	Характеры и L-функции Дирихле	2	2		4
Итого часов		15	15		30
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Простые числа

Теорема Евклида о бесконечности простых чисел. Решето Эратосфена. Основная теорема арифметики.

2. Мультипликативные функции и ряды Дирихле

Функция Мёбиуса и формула обращения. Ряды Дирихле. Эйлерово произведение для рядов Дирихле.

3. Дзета-функция Римана

Определение дзета-функции в области $\text{Re } s > 1$ и отсутствие там нулей. Логарифмическая производная дзета-функции. Формулы суммирования Абеля и Эйлера. Продолжение дзета-функции в область $\text{Re } s > 0$.

4. Функциональное уравнение для ζ -функции Римана

Формула суммирования Пуассона, функциональное уравнение для дзета-функции и ее продолжение на всю комплексную плоскость, тривиальные и нетривиальные нули дзета-функции и их свойства, гипотеза Римана.

5. Формула Вейерштрасса для ζ -функции

Формула Йенсена, теорема Бореля-Каратеодори, теорема Вейерштрасса для целых функций применительно к ζ -функции Римана и к Гамма-функции

6. Распределение нетривиальных нулей дзета-функции

Формула Римана-Мангольда о количестве нулей кси-функции в области $0 < \text{Im } s < T$, теорема Валле-Пуссена о границе нетривиальных нулей дзета-функции

7. Метод комплексного интегрирования

Формула суммирования Перрона, асимптотический закон распределения (АЗРПЧ) простых чисел, связь остаточного члена в АЗРПЧ и границы нулей кси-функции

8. Оценка дзета-функции при больших значениях мнимой части аргумента

Простейшие свойства. Символ Лежандра. Теорема Эйлера.

9. Характеры и L-функции Дирихле

Характеры, аддитивные характеры Дирихле, L-функции Дирихле, простые числа в арифметических прогрессиях

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Основы теории чисел [Текст] : учебник для вузов / И. М. Виноградов .— 6-е изд., испр. — М. : Гостехиздат, 1953 .— 180 с.
 2. Введение в теорию алгебраических чисел [Текст]/М. М. Постников, -М., Наука, 1982
 3. Основы теории чисел [Текст], монография/А. Вейль , -М., Мир, 1972
Виноградов, И. М.
Основы теории чисел [Электронный ресурс] : учеб. пособие / И. М. Виноградов .— 13-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2019 .— (Классическая учебная литература по математике) .— Электрон. версия печ. публикации .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).
- [] Детальная информация]

А.А. Карацуба, С.М. Воронин, Дзета-функция Римана

Дополнительная литература

1. Вычислительно сложные задачи теории чисел [Текст] : учеб. пособие для вузов / Е. А. Гречников [и др.] ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова .— М. : Изд-во Моск. ун-та, 2012 .— 312 с.
2. Основы аналитической теории чисел [Текст]/А. А. Карацуба, -М., Наука, 1975

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы и составление конспектов по ней;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен	
Разработчик:	И.С. Резвякова, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория чисел» обучающийся должен:

знать:

Классические методы теории чисел.

уметь:

Работать с основными задачами в сфере теории чисел.

владеть:

Методами теории чисел.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

- Доказать, что дзета-функция Римана не имеет нулей при $0 < s < 1$.
- Доказать, что кси-функция Римана не имеет нулей при $|\operatorname{Im} s| < 6$.
- С помощью формулы суммирования Эйлера найти продолжение дзета-функции в область $\operatorname{Re} s > -1$.
- Найти оценку в остаточном члене АЗРПЧ, если известно, что дзета-функция не имеет нулей в области $\operatorname{Re} s > c$ при некотором $c > 1/2$.
- Построить все характеры Дирихле по модулю 5.
- Доказать, что если справедлива гипотеза Римана, то все нули производной кси-функции Римана также лежат на критической прямой.
- Вывести асимптотика для конечной суммы гармонического ряда.

8. Вывести асимптотику для конечной суммы мультипликативной функции.
9. Найти среднее расстояние между соседними простыми числами на заданном начальном отрезке вещественных чисел.
10. Продолжить L-функции Дирихле в область $\operatorname{Re} s > 0$.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Доказать формулу Римана-Мангольда.
2. Доказать формулу суммирования Эйлера.
3. Доказать оценку границы нулей Валле-Пуссена.
4. Доказать АЗРПЧ.
5. Доказать бесконечность простых чисел в арифметических прогрессиях (допустимых).
6. Доказать, что L-функции Дирихле не имеют нулей в области $\operatorname{Re} s > 1$.
7. Доказать функциональное уравнение для тета-ряда.
8. Доказать формулу Вейерштрасса для кси-функции Римана.
9. Оценить рост дзета-функции в критической полосе.
10. Доказательство формулы суммирования Перрона.

Примеры билетов:

Билет 1.

1. Доказать, что L-функции Дирихле не имеют нулей в области $\operatorname{Re} s > 1$.
2. Доказать, что если справедлива гипотеза Римана, то все нули производной кси-функции Римана также лежат на критической прямой.

Билет 2.

1. Доказать формулу суммирования Эйлера.
2. Построить все характеры Дирихле по модулю 7.

Билет 3.

1. Доказать формулу Вейерштрасса для кси-функции Римана.
2. Вывести асимптотику для конечной суммы мультипликативной функции.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

К экзамену допускаются студенты, сдавшие половину задач всех домашних заданий.