

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики
А.М. Райгородский**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Введение в теорию сложности
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: В.В. Подольский

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 04.06.2020

Аннотация

Курс посвящен теоретическим основам компьютерных наук. Будут рассмотрены основные сложностные классы, такие как P, NP, coNP, PSPACE, BPP, P/poly, будут разобраны понятия сводимости и полноты, будут показаны примеры полных задач для части из перечисленных классов. Ближе к концу курса будут рассмотрены дополнительные темы из теории сложности вычислений, такие как коммуникационная сложность и ее приложения к потоковым алгоритмам.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Получение студентами основных представлений и базовых знаний по вопросам сложности вычислений.

Задачи дисциплины

Задачей дисциплины является изучение основных сложностных классов, и методов, использующихся в теории сложности вычислений. После освоения курса студенты должны оперативно владеть основными понятиями теории сложности вычислений, доказывать соотношения между сложностными классами.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основные понятия и результаты теории сложности вычислений.

уметь:

оперировать понятиями и результатами теории сложности вычислений.

владеть:

основными сложностными классами вычислительных задач, методами доказательства соотношений между ними, методами доказательства нижних оценок вычислительной сложности и методами дерандомизации.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост.

		лекции	семинары	лаборат. работы	работа
1	Введение: машины Тьюринга, универсальные машины	3			3
2	Класс NP, его базовые свойства. Полиномиальная сводимость и NP-полнота	3			3
3	Булевы схемы, класс P/poly	3			3
4	Примеры NP-полных задач, класс coNP.	3			3
5	Класс PSPACE	3			3
6	Вероятностные алгоритмы, классы BPP, RP, coRP, PP, ZPP	3			3
7	Релятивизация	4			4
8	Потоковые алгоритмы	4			4
9	Коммуникационная сложность, ее приложения	4			4
Итого часов		30			30
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Введение: машины Тьюринга, универсальные машины

Одноленточная и многоленточная машина Тьюринга, соотношения между ними. Ограничения на время и память. Сложностные классы P, PSPACE, EXP. Теоремы об иерархии.

2. Класс NP, его базовые свойства. Полиномиальная сводимость и NP-полнота

Класс NP, определения через сертификаты и через недетерминированные машины, их эквивалентность. Примеры. Полиномиальная сводимость, ее свойства. NP-трудность и NP-полнота, их свойства.

3. Булевы схемы, класс P/poly

Булевы схемы, примеры. Все функции вычислимы булевыми схемами. Существуют функции с экспоненциальной схемной сложностью. Класс P/poly, включение в него класса P.

4. Примеры NP-полных задач, класс coNP.

NP-полнота: Circuit-SAT, 3-SAT, NAE-SAT, Exactly-1-3-SAT, IND-SET, Subset-SUM, 3COLORING. Класс coNP, полнота задачи CIRC-TAUT в нем.

5. Класс PSPACE

Классы PSPACE и NPSPACE. Граф конфигураций. Включения между классами с ограничениями по времени и по памяти. Задача TQBF, ее PSPACE-полнота. PSPACE=NPSPACE. PSPACE-полнота задач TQBF-game и GEOGRAPHY.

6. Вероятностные алгоритмы, классы BPP, RP, coRP, PP, ZPP

Вероятностные алгоритмы. Вероятностные машины Тьюринга, класс BPP, независимость его определения от параметра ошибки. Классы RP, coRP, PP, ZPP, соотношения между ними. Принадлежность класса BPP классу P/poly.

7. Релятивизация

Вычисления с оракулом, основные свойства. Пример оракула A, для которого $P^A = NP^A$. Пример оракула B, для которого $P^B \neq NP^B$.

8. Потокотые алгоритмы

Потокотые алгоритмы. Поиска элемента в потоке, более частого, чем остальные вместе взятые. Вычисление F_2 . Нижние оценки на вычисление F_0 через одностороннюю коммуникационную сложность.

9. Коммуникационная сложность, ее приложения

Коммуникационная сложность. Функции EQ, GT, DISJ, IP. Методы трудных множеств и размеров комбинаторных прямоугольников. Ранговый метод. Недетерминированная коммуникационная сложность, примеры, соотношение с детерминированной сложностью. Вероятностная коммуникационная сложность, примеры. Теорема Ньюмана. Нижние оценки на время и память для машин Тьюринга.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений [Текст] / Д. Хопкрофт, Р. Мотвани, Д. Ульман ; пер. с англ. О. И. Васылык [и др.] .— 2-е изд. — М : Вильямс, 2002, 2008 .— 528 с.
2. Коммуникационная сложность [Текст] / А. А. Разборов ; пер. с англ. Ю. Л. Притыкина ; под ред. В. А. Клепцына, С. М. Львовского - М.МЦНМО, 2012
- Sipser, M. Introduction to the theory of computation / M. Sipser .— 3rd edition .— Boston : Cengage learning, 2013 .— 458 p. - Selected bibliogr.: p. 443-447. - Index: p. 448-458. - ISBN 978-1-133-18779-0.

Дополнительная литература

1. Теория сложности вычислений. 1 [Текст], сб. работ/под ред. Д. Ю. Григорьева, А. О. Слисенко, -Л., Наука, 1982
- Eyal Kushilevitz, Noam Nisan: Communication complexity. Cambridge University Press 1997, ISBN 978-0-521-56067-2, pp. I-XIII, 1-189

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Tim Roughgarden, Communication Complexity (for Algorithm Designers), lecture notes, <http://timroughgarden.org/w15/l/w15.pdf>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять материал курса при решении задач.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Для успешного освоения курса рекомендуется:

- посещения занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- регулярная самостоятельная работа студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- решение задач домашних заданий;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение отвечать на вопросы по темам дисциплины и способность восстановить результаты, рассказанные в курсе без использования материалов.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем следует обращаться за консультациями преподавателю.

Предусмотрен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач домашних заданий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки: Прикладная математика и информатика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра методов современной математики
курс: 1
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Разработчик: В.В. Подольский

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в теорию сложности» обучающийся должен:

знать:

основные понятия и результаты теории сложности вычислений.

уметь:

оперировать понятиями и результатами теории сложности вычислений.

владеть:

основными сложностными классами вычислительных задач, методами доказательства соотношений между ними, методами доказательства нижних оценок вычислительной сложности и методами дерандомизации.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры задач домашних заданий.

- Докажите NP-полноту задачи MAX-CUT
- Докажите, что NP лежит в RP
- Докажите, что вероятностная сложность функции MCS не больше $O(n)$

Примеры вопросов коллоквиума.

- Вычисления с оракулом, базовые свойства
- Недетерминированная коммуникационная сложность функций EQ, GT, IP, DISJ
- NP-полнота задач IND-SET и 3COL

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Понятие алгоритма. Машины Тьюринга. Рекурсивные, рекурсивно перечислимые языки. Тезис Черча.
2. Сложность алгоритмов. Полиномиальные, экспоненциальные алгоритмы. Временная, пространственная сложность.
3. Общая задача распознавания. Классы сложности P, EXPTIME, PSPACE, L.
4. Недетерминированные алгоритмы. Классы сложности NP, co-NP, NL.
5. Теорема о соотношении между классами сложности.
6. Два определения класса NP. Их эквивалентность.

7. Полиномиальная сводимость. Сведение задачи ГАМИЛЬТОНОВ ПУТЬ к задаче ВЫПОЛНИМОСТЬ.
8. NP-полные задачи. Теорема Кука-Левина.
9. NP-полнота задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ.
10. Принадлежность классу P задачи 2-ВЫПОЛНИМОСТЬ.
11. NP-полнота задачи МАКС-2-ВЫПОЛНИМОСТЬ.
12. NP-полнота задач НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО, ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ, КЛИКА.
13. NP-полнота задачи 3-РАСКРАСКА.
14. NP-полнота задачи ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ.
15. NP-полнота задачи 3-СОЧЕТАНИЕ.
16. NP-полнота задачи РАЗБИЕНИЕ.
17. NP-полнота задачи РЮКЗАК.
18. Псевдополиномиальные алгоритмы и NP-полнота в сильном смысле.
19. Вероятностные машины Тьюринга. Классы RP и co-RP.
20. Класс сложности BPP.
21. Класс сложности RP.
22. Класс сложности ZPP.
23. Сводимость по Тьюрингу. Эквивалентность задач оптимизации и распознавания.
24. Приближенные алгоритмы. 1/2-приближенный алгоритм для задачи ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ.
25. Несуществование приближенного полиномиального алгоритма для задачи ВЕРШИННОЕ ПОКРЫТИЕ.
26. Аппроксимационная граница для задачи РЮКЗАК.
27. Связь между псевдополиномиальными алгоритмами и вполне полиномиальными приближенными схемами.
28. Теорема об альтернативе для задачи НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО.

Билет 1

1. Одноленточная и многоленточная машина Тьюринга, соотношения между ними.
2. Пусть языки L и M лежат в классах NP и coNP, докажите, что симметрическая разность L и M тоже лежит в этих классах.

Билет 2

1. Класс NP, определения через сертификаты и через недетерминированные машины, их эквивалентность.
2. Докажите, что задача IN-SPACE-ACCEPTANCE является PSPACE-полной.

Билет 3

1. Булевы схемы, примеры.
2. Докажите, что проблема остановки является NP-трудной.

Билет 4

1. Классы PSPACE и NPSPACE. Граф конфигураций.
2. Докажите, что ZPP равен пересечению RP и coRP.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен проводится в сессию после окончания курса. Экзамен проводится в письменной форме, задачи по уровню сложности сопоставимы с задачами домашних заданий. Во время экзамена допускается использование печатных и рукописных материалов.

За каждый элемент контроля выставляется оценка от 1 до 10. Контроли дают следующий вклад в итоговую оценку:

Домашние задания 35%

Коллоквиум 35%

Экзамен 30%

Округление промежуточных оценок не производится. При выставлении итоговой оценки округление вверх.