

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики  
А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Арифметическая геометрия
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: С.Л. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 30.05.2022

## Аннотация

На занятиях будут разбираться различные темы из арифметической геометрии, как современные, так и уже ставшие классикой (локальные и глобальные поля, дискриминанты, дифференты, вектора Витта, локальная и глобальная теория полей классов, законы взаимности и теорема Грюнвальда-Вонга, р-адическое соответствие Римана-Гильберта, дерамовость неприводимых р-адических локальных систем, геометричность локальных систем на комплексных многообразиях, резольвента Герстена, теорема Меркурьева-Суслина).

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

ознакомление слушателей с ключевыми понятиями и методами арифметической геометрии.

#### Задачи дисциплины

дать студентам необходимую основу для дальнейшего углубленного изучения предмета, что позволит в определенной степени ориентироваться в современных исследованиях в этой области математики.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности основные законы естествознания, современный математический аппарат и алгоритмы, современные информационно-коммуникационные технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационных технологий, владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности
	ПК-2.3 Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий
	ПК-2.4 Владеет методами и алгоритмами решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического поиска, опыт работы с научными источниками
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

базовую терминологию, относящуюся к арифметической геометрии, основные понятия и теоремы дисциплины.

уметь:

- решать задачи по всем разделам курса,
- доказывать основные факты арифметической геометрии.

владеть:

- основными понятиями арифметической геометрии, изложенными в курсе,
- навыками применения полученных знаний при решении как алгебраических задач, так и задач смежных дисциплин.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Пополнение колец дискретного нормирования; лемма Гензеля.	5	5		5
2	Продолжение нормы при конечном расширении полей: существование и единственность.	5	5		5
3	Расширения полных нормированных полей и кольца нормирований	5	5		5
4	Инварианты расширений полных нормированных полей, неразветвленные и вполне разветвленные расширения	5	5		5
5	Числовые поля: геометрическая реализация чисел, дискриминант	5	5		5
6	Перфектоидные поля	5	5		5
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Пополнение колец дискретного нормирования; лемма Гензеля.

Градуированные модули; ряд Пуанкаре, полином Гильберта. Фильтрации и лемма Артина-Риса. Теория размерности. Пополнения. Лемма Гензеля и структура разветвленных накрытий над полным кольцом дискретного нормирования.

2. Продолжение нормы при конечном расширении полей: существование и единственность.

Определения, примеры. Алгебраичность и трансцендентность, расширение Галуа. Теоремы, доказательства, следствия.

3. Расширения полных нормированных полей и кольца нормирований

Группы нормирования. Р-адические и гензелевы кольца. Теорема Гензеля-Рихлика.

4. Инварианты расширений полных нормированных полей, неразветвленные и вполне разветвленные расширения

Основные определения и конструкции, независимо разветвленные расширения, классификационная теорема,

5. Числовые поля: геометрическая реализация чисел, дискриминант

Определения. Примеры. Теорема Брилля. Теорема Штикельбергера. Граница Минковского. Теорема Минковского. Относительный дискриминант, разветвление. Корневой дискриминант.

6. Перфектоидные поля

Перфектоидные поля, перфектоидные алгебры, построение соответствия (tilting equivalence), геометрические объекты, связанные с такими полями (перфектоидные пространства).

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного/семинарского типа.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Алгебра [Текст] : Определения, теоремы, формулы : [учебник для вузов] / Б. Л. Ван дер Варден ; пер. с нем. А. А. Бельского .— 3-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2004 .— 624 с.
2. Основы алгебраической геометрии [Текст] / И. Р. Шафаревич - М.МЦНМО,2007
3. Нормированные кольца [Текст]/М. А. Наймарк, -М., Наука, 1968

### **Дополнительная литература**

1. Курс алгебры, Электронная версия печатной публикации / Э. Б. Винберг. — Москва, МЦНМО, 2013
2. Азбука римановых поверхностей / В. В. Прасолов, О. В. Шварцман, Москва, МЦНМО, 2014

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- проработку учебного материала;
- подготовку к практическим занятиям, выполнение домашних теоретических и практических заданий.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** С.Л. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности основные законы естествознания, современный математический аппарат и алгоритмы, современные информационно-коммуникационные технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационных технологий, владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности
	ПК-2.3 Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий
	ПК-2.4 Владеет методами и алгоритмами решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического поиска, опыт работы с научными источниками
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Арифметическая геометрия» обучающийся должен:

### знать:

базовую терминологию, относящуюся к арифметической геометрии, основные понятия и теоремы дисциплины.

### уметь:

- решать задачи по всем разделам курса,
- доказывать основные факты арифметической геометрии.

### владеть:

- основными понятиями арифметической геометрии, изложенными в курсе,
- навыками применения полученных знаний при решении как алгебраических задач, так и задач смежных дисциплин.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Пусть  $A^{\text{hdot}} = k[x_1, \dots, x_d]$  -- алгебра полиномов, градуированная по степени полинома, а  $k$  -- размерность над  $A^0 = k$ . Чему равно  $P(A, t)$ ?
2. Теорию размерности локальных колец.
3. Докажите, что обратный предел точных последовательностей абелевых групп по системе сюръективных отображений точен.
4. Дать определение фундаментального дискриминанта, кругового поля.
5. Кольцо ОК называется евклидовым относительно функции  $f : ОК \rightarrow \mathbb{N}$ , если  $f(x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ , и для всех  $\alpha, \beta \in ОК \setminus \{0\}$  существует такое  $\gamma \in ОК$ , что  $f(\alpha - \gamma\beta) < f(\beta)$ . Покажите, что, если ОК — евклидово, то оно является кольцом главных идеалов.
6. Найдите кольцо целых циклотомического (т.е. кругового) поля  $Q(\zeta_m)$  для произвольного  $m$ .
7. Посчитайте дискриминант кругового поля
8. Докажите, что кольцо многочленов  $K[x]$  над областью целостности  $K$  является кольцом главных идеалов тогда и только тогда, когда  $K$  — поле.
9. Существует ли бесконечное поле ненулевой характеристики?
10. Докажите, что поле из  $p^2$  элементов содержит единственное собственное подполе

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Коммутативные кольца, гомоморфизмы, идеалы, факторкольца.
2. Локальные кольца.
3. Градуированные кольца, однородные простые идеалы.
4. Спектр кольца.
5. Кольца непрерывных функций, определенных на бикомпактах.
6. Локальные системы на кэлеровых многообразиях.
7. Теория размерности коммутативных колец.
8. Поле частных. Рациональные отображения.
9. Поля алгебраических чисел и кольца целых алгебраических чисел.
10. Теорема Гильберта о нулях.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;



- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении дифференцированного зачёта обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося на зачёте не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения зачёта обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.