

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Комбинаторная геометрия
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: В.Л. Дольников, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Комбинаторная геометрия (дискретная геометрия) — раздел математики, в котором изучаются геометрические объекты с точки зрения комбинаторики (дискретной математики). То есть мы рассматриваем конечное число (или счетное число) геометрических объектов и пытаемся понять их свойства. Эта область математики связана с теорией графов, теорией чисел и многими другими разделами геометрии и комбинаторики.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

освоение основных понятий комбинаторной геометрии.

### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области комбинаторной геометрии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области комбинаторной геометрии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических ис-следований в области комбинаторной геометрии.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы, цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области информатики и вычислительной техники, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.6 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте

ОПК-5 готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности (ОПК-5)	ОПК-1.1. знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
---	--

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

фундаментальные понятия, законы, теории комбинаторной геометрии;  
современные проблемы соответствующих разделов комбинаторной геометрии;  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач комбинаторной геометрии.

уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач комбинаторной геометрии;  
оценивать корректность постановок задач;  
строгое доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов комбинаторной геометрии;  
предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Каноническое расслоение над пространством Грассмана.		12		
2	Основные понятия и определения выпуклой геометрии.		12		
3	Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства.		12		
4	Применения теоремы Хелли.		12		
5	Теорема Борсука–Улама в простейшем случае.		12		45

Итого часов		60		45
Подготовка к экзамену	30 час.			
Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

##### 1. Каноническое расслоение над пространством Грассмана.

Соединение точек на плоскости графом с небольшим числом пересечений с любой прямой, теорема Шазеля–Вельцля.

##### 2. Основные понятия и определения выпуклой геометрии.

Теорема Каратеодори и теорема Хелли.

##### 3. Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства.

Теорема «о бутерброде». Кривая моментов и её обобщения, полиномиальный вариант теоремы о бутерброде.

##### 4. Применения теоремы Хелли.

Неравенство Юнга, теорема о центральной точке.

##### 5. Теорема Борсука–Улама в простейшем случае.

Техника минимизации и её применения. Цветная теорема Каратеодори и цветная теорема Хелли. Теорема Тверберга.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

#### 6. Перечень рекомендуемой литературы

##### Основная литература

1. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, О. С. Федько ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т. — М. : МФТИ, 2012. — 248 с.
2. Геометрия [Текст] : [учебник для вузов] / В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров. — 2-е изд., испр. — М. : Изд-во МЦНМО, 2007. — 328 с.

##### Дополнительная литература

1. Проблема Секефальви-Надя в комбинаторной геометрии [Текст]/В. Г. Болтянский, Э. Д. Баладзе, -М., Наука : Физматлит, 1997

#### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	В.Л. Дольников, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы, цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области информатики и вычислительной техники, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.6 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте
ОПК-5 готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности (ОПК-5)	ОПК-1.1. знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Комбинаторная геометрия» обучающийся должен:

### знать:

фундаментальные понятия, законы, теории комбинаторной геометрии;  
современные проблемы соответствующих разделов комбинаторной геометрии;  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач комбинаторной геометрии.

### уметь:

понять поставленную задачу;

использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач комбинаторной геометрии;

оценивать корректность постановок задач;

строго доказывать или опровергать утверждение;

самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;

самостоятельно видеть следствия полученных результатов;

точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

**владеть:**

навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);

навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;

культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов комбинаторной геометрии;

предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

Текущий контроль

1. Реализуйте локальные методы улучшения треугольной дискретной поверхности. В каких случаях её можно свести к сетке Делоне?
2. Как распределить точки на сфере, чтобы как объём выпуклой оболочки был максимальным?
3. С помощью дескриптора теплопроводности реализуйте сглаживание поверхности. Какие свойства поверхности можно извлечь с его помощью?
4. Сколько компонент у разложения Гельмгольца-Ходжа векторного поля? Какими свойствами они обладают?
5. Определите потоки (векторные поля) главных кривизн на дискретной поверхности и введите локальные координаты вдоль них.

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Основные понятия и определения выпуклой геометрии.
2. Теорема Каратеодори и теорема Хелли.
3. Применения теоремы Хелли: неравенство Юнга, теорема о центральной точке.
4. Техника минимизации и её применения. Цветная теорема Каратеодори и цветная теорема Хелли. Теорема Тверберга.
5. Степень отображения и некоторые её применения. Топологическая лемма об отображении симплекса в себя. Деление меры на выпуклые части заданного размера. Теорема Кнастера–Куратовского–Мазуркевича и теорема Брауэра о неподвижной точке. Усиления цветной теоремы Каратеодори.
6. Теорема Борсука–Улама в простейшем случае.
7. Теорема «о бутерброде». Кривая моментов и её обобщения, полиномиальный вариант теоремы о бутерброде.
8. Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства.
9. Теорема Семереди–Троттера о числе инцидентности точек и прямых. Оценки на множество сумм и множество произведений вещественных чисел.
10. Соединение точек на плоскости графом с небольшим числом пересечений с любой прямой, теорема Шазеля–Вельцля.
11. Теорема Дольникова о пересечениях гиперплоскостями и хроматическое число графа Кнезера. Обобщения теоремы Борсука–Улама для действия группы из двух элементов.
12. Каноническое расслоение над пространством Грассмана, теорема Дольникова о трансверсали и теорема о центральной трансверсали.
13. Обобщения теоремы Борсука–Улама для действия групп простого порядка. Топологическая теорема Тверберга и деление мер на равные части на прямой.



#### 14. Когомологии Чеха, лемма о нерве покрытия и топологическая теорема Хелли.

##### Примеры билетов

###### Билет 1:

1. Теорема Каратеодори и теорема Хелли.
2. Теорема «о бутерброде». Кривая моментов и её обобщения, полиномиальный вариант теоремы о бутерброде.

###### Билет 2:

1. Когомологии Чеха, лемма о нерве покрытия и топологическая теорема Хелли.
2. Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства.

##### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.