

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Доказуемость и формальная арифметика. Дополнительные главы
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Л.Д. Беклемишев, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 04.06.2020

## Аннотация

Курс посвящен изучению основных свойств формальной арифметики Пеано на основе методов теории доказательств. Центральное место в курсе занимают результаты Г. Генцена, касающиеся границы доказуемости трансфинитной индукции в формальной арифметике, ее класса доказуемо тотальных вычислимых функций, явных примеров независимых утверждений комбинаторного характера. Изложение основано на погружении выводов в арифметике Пеано в логику с омега-правилом и оценках роста высоты выводов при устранении правила сечения.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

познакомить студентов с классическими методами Генцена и Шютте, лежащими в основе современной теории доказательств, и результатами, получаемыми на их основе.

#### Задачи дисциплины

научить студентов применять на практике методы теории доказательств на основе секвенциальных исчислений.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.4 Способен анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основы теории доказательств и формальной арифметки первого порядка.

уметь:

решать задачи по означенным темам, правильно выбирая методы и подходы.

владеть:

методами теории доказательств на основе секвенциальных исчислений.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Исчисление секвенций для логики предикатов в форме Тейта.	2	5		8
2	Омега-логика.	2	5		8
3	Устранение сечения в арифметике с омега-правилом.	2	5		8
4	Арифметика ординалов.	3	5		7
5	Трансфинитная индукция.	3	5		7
6	Доказуемо рекурсивные функции и недоказуемые комбинаторные утверждения.	3	5		7
Итого часов		15	30		45
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

###### 1. Исчисление секвенций для логики предикатов в форме Тейта.

Секвенциальное исчисление для логики предикатов в форме Тейта. Теорема об устранении правила сечения. Формализация арифметики Пеано в секвенциальном исчислении.

###### 2. Омега-логика.

Омега-правило. Доказуемость истинных  $\Pi_1$ -утверждений в арифметике с омега-правилом. Погружение выводов в арифметике Пеано в арифметику с омега-правилом.

###### 3. Устранение сечения в арифметике с омега-правилом.

Высота и ранг омега-вывода. Устранение правила сечения в арифметике с омега-правилом с оценками ранга и высоты.

###### 4. Арифметика ординалов.

Вполне упорядоченные множества, операции сложения, умножения, возведения в степень. Канторовская нормальная форма. Канторовская система обозначений для ординала  $\epsilon_0$ ; её вычислимость и арифметизация (опционально).

## 5. Трансфинитная индукция.

Принцип трансфинитной индукции. Арифметическая схема трансфинитной индукции для вычислимой системы обозначений. Доказуемость трансфинитной индукции для начальных отрезков ординала  $\epsilon_0$ . Недоказуемость трансфинитной индукции до ординала  $\epsilon_0$  в арифметике Пеано (теорема Генцена).

## 6. Доказуемо рекурсивные функции и недоказуемые комбинаторные утверждения.

Доказуемо рекурсивные функции. Иерархия функций Харди и порожденные ей классы. Принцип Гудстейна, принципы Червя и Геракла-Гидры. Их истинность и недоказуемость в арифметике Пеано (без подробных доказательств независимости).

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного / семинарского типа.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Основания математики : Логические исчисления и формализация арифметики [Текст] = Grundlagen der mathematik/Д. Гильберт, П. Бернайс , -М., Наука, 1979
2. Основания математики : Теория доказательств [Текст] = Grundlagen der mathematik/Д. Гильберт, П. Бернайс , -М., Наука, 1982
- W. Pohlers. Proof Theory: First Steps into Impredicativity.

### Дополнительная литература

1. Теория доказательств [Текст] = Proof theory/Г. Такеути , -М., Мир, 1978

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Степень овладения студентами компетенциями, формируемыми в процессе изучения дисциплины, проверяется в ходе дифференцированного зачета в конце курса. Успешное освоение курса требует напряженной самостоятельной работы студента, самостоятельной подготовки к практическим занятиям, выполнение домашних теоретических и практических заданий.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Информатика и вычислительная техника  
**профиль подготовки:** Прикладная математика и информатика  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра методов современной математики  
**курс:** 2  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** Л.Д. Беклемишев, д-р физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.4 Способен анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Доказуемость и формальная арифметика. Дополнительные главы» обучающийся должен:

### знать:

основы теории доказательств и формальной арифметики первого порядка.

### уметь:

решать задачи по означенным темам, правильно выбирая методы и подходы.

### владеть:

методами теории доказательств на основе секвенциальных исчислений.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примерные типы домашних заданий:

1. Дана общезначимая формула в языке исчисления предикатов. Построить её вывод в исчислении Тейта.
2. Противоречит ли свойство подформульности для секвенциального исчисления Тейта алгоритмической неразрешимости проблемы выводимости в исчислении предикатов? Почему?
3. Дана истинная арифметическая формула. Построить её вывод в арифметике с омега-правилом. Найти его высоту.
4. Выполняется ли свойство подформульности для выводов без сечения в арифметике с омега-правилом?
5. Даны два ординала в канторовской нормальной форме. Найдите нормальную форму их суммы, произведения.

6. Выполняется ли для операций сложения и умножения на ординалах левый (правый) закон дистрибутивности?
7. Обратимы ли правила введения конъюнкции и дизъюнкции в исчислении Тейта?

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Примеры вопросов для дифференцированного зачета:

1. Секвенциальное исчисление для логики предикатов в форме Тейта. Формализация арифметики Пеано в секвенциальном исчислении.
2. Теорема об устранении правила сечения для исчисления Тейта.
3. Арифметика с омега-правилом. Погружение выводов в арифметике Пеано в арифметику с омега-правилом.
4. Доказуемость истинных  $\Pi_1$ -утверждений в арифметике с омега-правилом.
5. Высота и ранг омега-вывода. Устранение правила сечения в арифметике с омега-правилом с оценками ранга и высоты.
6. Вполне упорядоченные множества, операции сложения, умножения, возведения в степень. Канторовская нормальная форма.
7. Канторовская система обозначений для ординала  $\epsilon_0$ ; её вычислимость.
8. Принцип трансфинитной индукции. Арифметическая схема трансфинитной индукции для вычислимой системы ординальных обозначений.
9. Доказуемость трансфинитной индукции для начальных отрезков ординала  $\epsilon_0$  в арифметике Пеано.
10. Недоказуемость трансфинитной индукции до ординала  $\epsilon_0$  в арифметике Пеано.
11. Доказуемо рекурсивные функции. Простейшие свойства класса доказуемо рекурсивных функций данной теории.
12. Иерархия функций Харди и порожденные ей классы. Доказуемая рекурсивность функций Харди до ординала  $\epsilon_0$ .
13. Принцип Гудстейна, принципы Червя и Геракла-Гидры. Их истинность и недоказуемость в арифметике Пеано (без доказательства недоказуемости).

Примеры задач

1. Докажите, что всякое истинное арифметическое предложение можно доказать в арифметике с омега-правилом с помощью вывода высоты не больше  $\omega$ .
2. Докажите, что непротиворечивость арифметики Пеано доказуема в арифметике с омега-правилом выводом высоты  $\omega$ .
3. Докажите консервативность формальной арифметики в языке со свободными переменными по множествам над арифметикой Пеано первого порядка.
4. Докажите, что  $PA$  и  $PA + Con(PA)$  имеют один и тот же класс доказуемо рекурсивных функций.
5. Приведите пример теории, класс доказуемо рекурсивных функций которой строго расширяет этот класс для  $PA$ .
6. Доказуема ли непротиворечивость арифметики  $I\Sigma_1$  в арифметике Пеано?

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений

- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Оценка по курсу устанавливается в ходе дифференцированного зачета в конце курса. Выполнение домашних заданий позволяет студентам глубоко и в полном объеме освоить программу курса.

Во время дифференцированного зачета студенты могут пользоваться материалом лекций.