

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Лямбда-исчисление
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	2
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: С.Л. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 04.06.2020

Аннотация

В курсе «Лямбда-исчисления» излагаются основы лямбда-исчисления в его бестиповом и типизованном вариантах, связь последнего с системой естественного вывода для интуиционистской логики (соответствие Карри — Говарда) и применения к задачам компьютерного построения и проверки математических доказательств. Для освоения курса желательно знать основы математической логики и теории алгоритмов, в т.ч. неклассических логик.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

познакомить студентов с лямбда-исчислением, логической системой, лежащей в основе функционального программирования и некоторых систем автоматизированного построения и проверки математических доказательств (Coq, Agda)

Задачи дисциплины

задача дисциплины - научить студентов применять лямбда-исчисления и соответствия Карри — Говарда в функциональном программировании и автоматизации математических доказательств.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.4 Способен анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основы лямбда-исчисления, его связь с интуиционистской логикой (соответствие Карри — Говарда).

уметь:

решать задачи по означенным темам, правильно выбирая методы и подходы.

владеть:

применениями лямбда-исчисления и соответствия Карри — Говарда в функциональном программировании и автоматизации математических доказательств.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Лямбда-термы. Бета-редукция. Свойство Чёрча — Россера.	2	4		6
2	Теорема о неподвижной точке. Кодирование вычислимых функций в бестиповом лямбда-исчислении	2	4		6
3	Алгоритм выведения типов для простого типизованного лямбда-исчисления	2	4		6
4	Интуиционистская логика высказываний (естественный вывод). Соответствие Карри — Говарда	2	4		6
5	Интуиционистская логика высказываний (гильбертовское исчисление). Комбинаторная логика	2	4		6
6	Теоретико-множественная семантика простого типизованного лямбда-исчисления	2	4		7
7	Компьютерные доказательства. Система Coq (введение)	3	6		8
Итого часов		15	30		45
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Лямбда-термы. Бета-редукция. Свойство Чёрча — Россера.

Определение понятия лямбда-терма. Подстановка, корректность подстановки, альфа-эквивалентные термы. Бета-редукция. Свойство Чёрча — Россера (с доказательством). Нормальные формы. Единственность нормальной формы. Понятие сильной и слабой нормализуемости. Нормальная стратегия редукции.

2. Теорема о неподвижной точке. Кодирование вычислимых функций в бестиповом лямбда-исчислении

Комбинаторы неподвижной точки (КНТ) в бестиповом лямбда-исчислении, их нетипизируемость. Использование КНТ для моделирования рекурсии. Кодирование вычислимых (рекурсивных) функций в бестиповом лямбда-исчислении.

3. Алгоритм выведения типов для простого типизованного лямбда-исчисления

Задача выведения типов для простого типизованного лямбда-исчисления. Понятие наиболее общего (наилучшего) с точки зрения подстановок типа, теорема о его существовании. Унификация, алгоритм Робинсона. Алгоритм выведения наиболее общего типа.

4. Интуиционистская логика высказываний (естественный вывод). Соответствие Карри — Говарда

Исчисление естественного вывода для импликативного фрагмента интуиционистской логики высказываний. Связь между формулами и типами, доказательствами и лямбда-термами (соответствие Карри — Говарда). Исчисление естественного вывода для интуиционистской логики в полном языке (конъюнкция, дизъюнкция, импликация, константа «ложь») и связанное с ним по Карри — Говарду расширение языка лямбда-термов.

5. Интуиционистская логика высказываний (гильбертовское исчисление). Комбинаторная логика

Исчисление гильбертовского типа для интуиционистской логики высказываний (импликативный фрагмент). Комбинаторы K и S, слабая редукция, комбинаторная логика. Операция λ^* , связь комбинаторной логики и простого типизованного лямбда-исчисления.

6. Теоретико-множественная семантика простого типизованного лямбда-исчисления

Теоретико-множественная интерпретация простого типизованного лямбда-исчисления: типы интерпретируются множествам, термы — соответствующими функциями высших порядков. Теорема о полноте относительно $\beta\eta$ -редукции.

7. Компьютерные доказательства. Система Coq (введение)

Идея полуавтоматизированного построения математических доказательств на компьютере. Примеры задач, где такие доказательства необходимы (проблема 4 красок, теорема Фейта — Томпсона). Невозможность полностью автоматизированных доказательств. Доказательства как лямбда-термы в парадигме Карри — Говарда. Пример: система Coq.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного / семинарского типа. Аудитория должна быть оснащена как доской (с мелом либо маркерами), так и проектором для показа программного кода на компьютере. К проектору либо должен быть подключен стационарный компьютер с установленной системой Coq, либо должно быть можно подключить личный переносной компьютер преподавателя.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вычислимые функции [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов / Н. К. Верещагин, А. Шень. — 3-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2008. — 192 с.
2. Языки и исчисления [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов / Н. К. Верещагин, А. Шень. — 3-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2008. — 288 с.
3. Программирование: теоремы и задачи [Текст], [учеб. пособие] / А. Шень. -М., МЦНМО, 2011
2. H. Barendregt, W. Dekkers, R. Statman. Lambda calculus with types. – Cambridge University Press, 2013.

Дополнительная литература

1. Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика [Текст], монография/Х. Барендрегт, -М., Мир, 1985
1. B. Carpenter. Type-logical semantics. — Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1997.
2. J.R. Hindley, J.P. Seldin. Lambda-calculus and combinators, an introduction. — Cambridge University Press, 2008.
3. Y. Bertot, P. Castéran. Interactive Theorem Proving and Program Development: Coq'Art: The Calculus of Inductive Constructions. — Springer, 2004.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Система Coq и её документация: coq.inria.fr.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Система Coq и её документация: coq.inria.fr.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Степень овладения студентами компетенциями, формируемыми в процессе изучения дисциплины, проверяется в ходе дифференцированного зачета в конце курса. Текущий контроль осуществляется посредством коллоквиума или контрольной работы, на усмотрение преподавателя.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	<u>2</u>
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: С.Л. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.4 Способен анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Лямбда-исчисление» обучающийся должен:

знать:

основы лямбда-исчисления, его связь с интуиционистской логикой (соответствие Карри — Говарда).

уметь:

решать задачи по означенным темам, правильно выбирая методы и подходы.

владеть:

применениями лямбда-исчисления и соответствия Карри — Говарда в функциональном программировании и автоматизации математических доказательств.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примерные типы заданий коллоквиума / контрольной работы:

1. Постройте такие термы u и v , что u β -редуцируется к v , оба терма типизируемы, но их наиболее общие типы различаются.
2. Пусть u β -редуцируется к v и v сильно нормализуем. Каким может быть терм u (сильно нормализуемым, слабо нормализуемым, не нормализуемым)?
3. Постройте замкнутый (не содержащий свободных переменных) терм данного типа (тип подбирается так, чтобы быть выводимой формулой в интуиционистской логике высказываний).
4. Выведите наиболее общий тип для данного терма (терм подбирается так, чтобы быть типизируемым).
5. Докажите, что если u редуцируется к v и оба терма типизируемы, то наиболее общий тип первого терма получается подстановкой из наиболее общего типа второго.
6. Пусть Y — комбинатор неподвижной точки. Выведите наиболее общий тип для терма $Y(\lambda f.\lambda x.f(f\ x))$.

- #### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Лямбда-термы и их преобразования. Нормальные формы.
2. Свойство Чёрча — Россера для лямбда-исчисления. Единственность нормальной формы.
3. Нормальная стратегия редукции, теорема о её успешности для любого слабо нормализуемого терма.
4. Комбинаторы неподвижной точки, их нетипизируемость.
5. Теорема о представимости рекурсивных функций в бестиповом лямбда-исчислении.
6. Алгоритм Робинсона унификации системы равенств типов.
7. Алгоритм выведения наиболее общего типа в простом типизованном лямбда-исчислении.
8. Соответствие Карри — Говарда между интуиционистской логикой в формате естественного вывода и простым типизованным лямбда-исчислением.
9. Комбинаторная логика. Соответствие Карри — Говарда между интуиционистской логикой в гильбертовском формате и комбинаторной логикой.
10. Слабая редукция. Теоремы о соотношении между лямбда-исчислением и комбинаторной логикой.
11. Теоретико-множественная интерпретация типизированного лямбда-исчисления. Теорема о корректности и полноте.
12. Применение лямбда-исчисления в компьютерном доказательстве теорем. Система Coq.

- Может ли слабо нормализуемый лямбда-терм быть β -редуцируем к ненормализуемому лямбда-терму?
- Может ли терм, содержащий комбинатор неподвижной точки (по Карри) Y , быть сильно нормализуемым?
- Сколько существует, с точностью до $\beta\eta$ -эквивалентности, различных замкнутых термов, имеющих тип $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow B)))$?
- Постройте комбинаторный терм типа $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$.
- Докажите в Coq слабый закон Пирса $((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow b$.
- Докажите в Coq двойное отрицание закона исключённого третьего.

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины и (или) путем организации специального опроса, проводимого в устной и (или) письменной форме.