

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория мартингалов и стохастическое интегрирование
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: С.Л. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 30.05.2022

Аннотация

Мартингалом называется случайный процесс, который в будущем остается в среднем постоянным. Мартингалы находят широкое применение в теории вероятностей и, в особенности, в стохастическом исчислении, а также различных приложениях, например, в финансовой математике.

В результате обучения слушатели ознакомятся с основными понятиями и результатами теории мартингалов, а также их приложениями, связанными с интегрированием по случайным процессам.

Для понимания курса достаточно знать стандартный курс теории вероятностей.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Познакомить слушателей с основными понятиями и результатами теории мартингалов, а также их приложениями, связанными с интегрированием по случайным процессам.

Задачи дисциплины

Развить навыки практического применения элементов и методов теории мартингалов при изучении свойств случайных процессов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности основные законы естествознания, современный математический аппарат и алгоритмы, современные информационно-коммуникационные технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационных технологий, владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности
	ПК-2.3 Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий
	ПК-2.4 Владеет методами и алгоритмами решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического поиска, опыт работы с научными источниками
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке

проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности

ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой

ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные положения теории мартингалов как основного аппарата стохастического исчисления;
- понятия мартингала, субмартингала, супермартингала, винеровского процесса, дифференциального уравнения и формулы Ито;

уметь:

- применять результаты теории мартингалов для доказательства сходимости случайных процессов в различных вероятностных моделях;
- преобразовывать случайные процессы в мартингалы, субмартингалы или супермартингалы и использовать свойства мартингалов для исследования этих процессов

владеть:

- навыками самостоятельной научно-исследовательской работы, в частности, поиска информации в научной литературе по конкретной теме исследования и смежным областям, ее обработки и анализа;
- аппаратом теории мартингалов и теории стохастических дифференциальных уравнений при изучении свойств случайных процессов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Мартингалы с дискретным временем	15	15		15
2	Мартингалы с непрерывным временем	15	15		15
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Мартингалы с дискретным временем

Определение мартингала и родственных понятий, мартингальные неравенства, теоремы о сходимости мартингалов, локальные мартингалы.

2. Мартингалы с непрерывным временем

Общие сведения о случайных процессах, определения и примеры мартингалов с непрерывным временем, теоремы о сходимости и неравенства, интеграл по квадратично интегрируемому мартингалу, интеграл по непрерывному локальному мартингалу, формула Ито, теорема Гирсанова.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска, при необходимости медиапроектор, экран.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Теория случайных процессов, Электронная версия печатной публикации / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. — Москва, Физматлит, 2005
2. Вероятность [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов / А. Н. Ширяев. — 4-е перераб. и доп. — М. : МЦНМО, 2007, 2011. — Т. 2 : Суммы и последовательности случайных величин - стационарные, мартингалы, марковские цепи. - 2007, 2011. - 416 с.
3. Вероятность [Текст] = Probability/Дж. Ламперти, -М., Наука, 1973
1. Ikeda N., and Watanabe S., Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes [Electronic resource]. - North-Holland Publ. Co. and Kodansha Ltd, Amsterdam, Oxford, New York, and Tokyo, 1981. - Authorized access: <http://www.sciencedirect.com/science/bookseries/09246509/24> (Science Direct eBooks).
2. Chung, Kai L, and John B. Walsh. Markov Processes, Brownian Motion, and Time Symmetry [Electronic Resource] . - Berlin: Springer, 2004. - Authorized access: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F0-387-28696-9> (Springer eBooks).

Дополнительная литература

1. Стохастические дифференциальные уравнения : Введение в теорию и приложения [Текст] / Б. Оксендаль ; пер. с 5-го испр. англ. изд. Н. И. Королевой, А. И. Матасова ; под ред. В. Б. Колмановского - М.Мир,2003
- Kallianpur G., Sundar P. Stochastic Analysis and Diffusion Processes [Electronic Resource]. - Oxford University Press, 2014. - Authorized access: <http://www.oxfordscholarship.com/view/10.1093/acprof:oso/9780199657063.001.0001/acprof-9780199657063> (Oxford Scholarship Online).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://arxiv.org>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не предусмотрено.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента в соответствии с данными в рабочей программе.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,
- при необходимости подготовку к практическим занятиям, коллоквиумам, диф.зачёту.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: С.Л. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ПК-2 Понимает и способен применить в научно-исследовательской и прикладной деятельности основные законы естествознания, современный математический аппарат и алгоритмы, современные информационно-коммуникационные технологии	ПК-2.1 Знает основы научно-исследовательской деятельности в области информационных технологий, владеет знанием основ философии и методологии науки; знанием методов научных исследований и навыками их проведения
	ПК-2.2 Умеет применять полученные знания в области фундаментальных научных основ теории информации и решать стандартные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности
	ПК-2.3 Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в области информационно-коммуникационных технологий
	ПК-2.4 Владеет методами и алгоритмами решения задач цифровой обработки сигналов, использования сети Интернет, аннотирования, реферирования, библиографического поиска, опыт работы с научными источниками
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория мартингалов и стохастическое интегрирование» обучающийся должен:

знать:

- основные положения теории мартингалов как основного аппарата стохастического исчисления;
- понятия мартингала, субмартингала, супермартингала, винеровского процесса, дифференциального уравнения и формулы Ито;

уметь:

- применять результаты теории мартингалов для доказательства сходимости случайных процессов в различных вероятностных моделях;
- преобразовывать случайные процессы в мартингалы, субмартингалы или супермартингалы и использовать свойства мартингалов для исследования этих процессов

владеть:

- навыками самостоятельной научно-исследовательской работы, в частности, поиска информации в научной литературе по конкретной теме исследования и смежным областям, ее обработки и анализа;
- аппаратом теории мартингалов и теории стохастических дифференциальных уравнений при изучении свойств случайных процессов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

- сходимость квадратично интегрируемых мартингалов,
- связь сходимости мартингала и его квадратической характеристики,
- обобщение теоремы Колмогорова о 3 рядах,
- мартингальное преобразование,
- моменты остановки (определение и примеры, операции с моментом остановки, сигма-алгебра до момента остановки),
- теорема Леви о сходимости условных ожиданий,
- плотность простых процессов в $L^2(M)$,
- разложение Дуба-Мейера.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов:

1. Теорема о замене меры (преобразование Гирсанова).
2. Вывести формулу замены переменных Ито.
3. Разложение Дуба (теорема).
4. Теорема Дуба об остановке,
5. Закон больших чисел для квадратично интегрируемых интегралов.
6. Мартингальное преобразование.
7. Интеграл по квадратично интегрируемому мартингалу.
8. Теоремы о сходимости мартингалов.
9. Мартингалы, суб- и супер-мартингалы.
10. Конструкция Ито стохастического интеграла. Свойства стохастического интеграла.

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении дифференцированного зачёта обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося на зачёте не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения зачёта обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.