

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория множеств. Часть 2
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	2
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: С.Л. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 04.06.2020

Аннотация

Курс представляет собой введение в аксиоматическую теорию множеств Цермело – Френкеля (ZF). В курсе формулируется аксиоматика ZF (как теории первого порядка), даются определения ординалов и кардиналов. В присутствии аксиомы выбора строится арифметика кардиналов. Второй семестр посвящён более тонким вопросам. В нём определяются стационарные множества, доказывается теорема Сильвера о континуум-функции, обсуждаются вопросы бесконечной комбинаторики (теории Рамсея) и вопросы измеримости. Завершается курс обсуждением моделей теории множеств и доказательством совместимости ZF с аксиомой выбора и континуум-гипотезой.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Получение студентами представления о современной теории множеств

Задачи дисциплины

дать студентам запас базовых знаний по основным разделам теории множеств, обучить рациональному и эффективному использованию полученных знаний при решении типовых задач теории множеств; сформировать у студентов представление о теории множеств как методе изучения широкого круга объектов и процессов; сформировать знания, умения и навыки использования основных понятий теории множеств

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.4 Способен анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Базовые понятия современной теории множеств, включая такие понятия, как аксиомы теории множеств, ординальные и кардинальные числа и их арифметика, начала дескриптивной теории множеств, булевы алгебры, ультрафильтры, ультрапроизведения и их приложения, большие кардиналы, основы общей теории моделей и теоретико-множественной теории моделей.

уметь:

Применять полученные знания при постановке задач как в области теории множеств, так и в смежных областях, таких как теория моделей, общая топология, в различных областях математической логики, в которых возникают теоретико-множественные задачи и подходы.

владеть:

Базовыми методами современной теории множеств.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Стационарные множества.	2	5		8
2	Бесконечная комбинаторика, слабо компактные кардиналы.	2	5		6
3	Измеримые кардиналы.	3	5		8
4	Борелевские и проективные множества, детерминированность.	3	5		8
5	Модели теории множеств, конструктивные множества по Гёделю. Совместность аксиомы выбора и континуум гипотезы с аксиомами теории множеств.	5	10		15
Итого часов		15	30		45
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Стационарные множества.

Замкнутые неограниченные множества. Стационарные множества. Лемма Фодора. Кардиналы Мало. Нормальные фильтры. Теорема Сильвера о континуум-функции на кардиналах несчётной конфинальности. Иерархия стационарных множеств. Замкнутый неограниченный фильтр на \aleph_λ .

2. Бесконечная комбинаторика, слабо компактные кардиналы.

Свойства разбиений. Теорема Рамсея и её обобщения: теоремы Эрдёша -- Радо и Душника -- Миллера. Слабо компактные кардиналы. Деревья. Квазидизъюнктные множества, почти дизъюнктные множества и функции. Свойство дерева и слабо компактные кардиналы. Кардиналы Рамсея.

3. Измеримые кардиналы.

Проблема меры. Измеримые и вещественнозначно измеримые кардиналы. Нормальные меры. Сильно компактные и сверхкомпактные кардиналы.

4. Борелевские и проективные множества, детерминированность.

Борелевские множества. Аналитические множества. Операция A . Иерархия проективных множеств. Свойства регулярности: мера Лебега, свойство Бэра, свойство совершенного ядра. Случай аналитических множеств. Игра Гейла -- Стюарта. Представление об аксиоме детерминированности и её слабых формах. Свойства регулярности детерминированных множеств.

5. Модели теории множеств, конструктивные множества по Гёделю. Совместность аксиомы выбора и континуум гипотезы с аксиомами теории множеств.

Базовые понятия теории моделей. Теоремы Гёделя. Прямые пределы моделей. Фильтрованные произведения и ультрапроизведения. Модели теории множеств и релятивизация. Относительная непротиворечивость. Транзитивные модели и Δ_0 -формулы. Независимость аксиомы регулярности. Недостижимость недостижимых кардиналов. Принцип отражения.

Конструктивные множества по Гёделю. Совместность аксиомы выбора и континуум гипотезы с аксиомами теории множеств.

Иерархия конструктивных множеств. Операции Гёделя. Внутренние модели теории ZF. Иерархия формул Леви. Абсолютность конструктивности. Совместность аксиомы выбора и континуум-гипотезы с аксиомами ZF. Относительная конструктивность. Ординально определимые множества. Дальнейшие сведения о внутренних моделях.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная доской с мелом, либо доской с маркерами.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова .— 5-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2004, 2006 .— 256 с.
2. Теория моделей [Текст]/Г. Дж. Кейслер, Ч. Ч. Чэн , -М., Мир, 1977
3. Теория множеств [Текст] = Set theory/К. Куратовский, А. Мостовский , -М., Мир, 1970
1. Jech Thomas, Set theory, 3ed., Springer-Verlag, Berlin--Heidelberg--New York, 2003.

Дополнительная литература

1. Начала теории множеств [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов. Ч.1 / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 3-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2008 .— 128 с.
2. Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов [Текст], учеб. пособие для вузов /М. М. Глухов, А. Б. Шишков. -СПб., Лань, 2012

1. Kanamori Akihiro, The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin--Heidelberg--New York, 2003.
2. Кейслер Дж., Чэн Ч., Теория моделей, Изд. Мир, Москва, 1977.
3. Барвайс Дж. (ред.), Справочная книга по математической логике, в 4 тт., Москва, 1983.
4. Кановей В. Г., Любецкий В. А., Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы, Изд. МЦМНО, Москва, 2013.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала.

Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем.

В ходе подготовки к дифференцированному зачету изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. Основной целью подготовки является развитие навыков решения практических задач и анализа приёмов, встречающихся в этих задачах.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки: Прикладная математика и информатика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра методов современной математики
курс: 2
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: С.Л. Кузнецов, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.4 Способен анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория множеств. Часть 2» обучающийся должен:

знать:

Базовые понятия современной теории множеств, включая такие понятия, как аксиомы теории множеств, ординальные и кардинальные числа и их арифметика, начала дескриптивной теории множеств, булевы алгебры, ультрафильтры, ультрапроизведения и их приложения, большие кардиналы, основы общей теории моделей и теоретико-множественной теории моделей.

уметь:

Применять полученные знания при постановке задач как в области теории множеств, так и в смежных областях, таких как теория моделей, общая топология, в различных областях математической логики, в которых возникают теоретико-множественные задачи и подходы.

владеть:

Базовыми методами современной теории множеств.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Докажите, что если κ – сингулярный, то не существует нормального идеала на κ , содержащего все ограниченные подмножества κ .
2. Существуют ли на множестве натуральных чисел неглавные фильтры?
3. Пусть T – дерево высоты ω , каждый уровень которого конечен. Докажите, что T содержит бесконечную ветвь (лемма Кёнига).
4. Пусть T – нормальное ω_1 -дерево и T содержит несчётную ветвь. Докажите, что в T есть несчётная антицепь.

5. Докажите, что для любой безатомной вероятностной меры на множестве S существует подмножество S , мера которого равна $\frac{1}{2}$.
6. Пусть U – ультрафильтр, состоящий из всех множеств меры 1. Докажите, что мера κ -аддитивна тогда и только тогда, когда U κ -полон.
7. Докажите, что любое бесконечное частично упорядоченное множество содержит либо бесконечную цепь, либо бесконечное множество попарно несравнимых элементов.
8. Докажите, что любое бесконечное линейно упорядоченное множество содержит либо бесконечную возрастающую, либо бесконечную убывающую последовательность элементов.
9. Является ли омега кардиналом Рамсея?
10. Докажите аналог теоремы Кантора – Бернштейна для сигма-полных булевых алгебр.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Стационарные множества. Лемма Фодора.
2. Теорема Сильвера о континуум-функции на кардиналах несчётной конфинальности.
3. Теорема Эрдёша – Радо.
4. Теорема Душника – Миллера.
5. Измеримые кардиналы. Нормальные меры.
6. Игра Гейла – Стюарта. Аксиома детерминированности.
7. Свойства регулярности детерминированных множеств.
8. Транзитивные модели. Независимость аксиомы регулярности.
9. Недостижимость недостижимых кардиналов.
10. Конструктивные множества по Гёделю. Абсолютность конструктивности.
11. Совместность аксиомы выбора с ZF.
12. Совместность континуум-гипотезы с ZF.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины и (или) путем организации специального опроса, проводимого в устной и (или) письменной форме.