

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Алгоритмические вопросы алгебры
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	2
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 45 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 60 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Д.В. Трещев, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 02.04.2024

Аннотация

Курс посвящён классическим алгоритмическим вопросам алгебры, которые активно изучались, начиная с 1940-х годов, после того был сформулирован тезис Чёрча-Тьюринга, позволивший дать точное определение эффективно вычислимым функциям. Таким образом, стало возможным доказывать невозможность построения алгоритма для решения массовой проблемы. Курс состоит из последовательно излагаемых алгоритмических проблем алгебры, для большей части которых доказывается алгоритмическая неразрешимость. В частности, рассматриваются проблема равенства в полугруппах, проблема вырождения произведения матриц, универсальная проблема равенства в конечных полугруппах, проблема равенства, сопряжённости и вхождения в группах, а также проблема изоморфизма групп. Доказательства неразрешимости приводятся, основываясь на удобной вычислительной модели (машина Тьюринга или Минского) или путём сведения к другим известным неразрешимым задачам, например, неразрешимости арифметики Пеано. Также в курс входят примеры разрешимых задач: проблема равенства в финитно аппроксимируемых группах и проблема вхождения для свободных групп. Для освоения курса желательно знать основы математической логики и теории алгоритмов, а также основы теории групп.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- познакомить студентов с классическими задачами современной алгебры, для которых можно доказать алгоритмическую неразрешимость.

Задачи дисциплины

- показать различные подходы и методы для изучения задач алгебры с помощью методов математической логики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области информатики и вычислительной техники, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен разрабатывать и модернизировать программное и аппаратное обеспечение информационных и автоматизированных систем
	ОПК-3.3 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-3.6 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера	ОПК-3.7 Способен разрабатывать оригинальные алгоритмы и программные средства, в том числе с использованием современных интеллектуальных технологий, для решения профессиональных задач
	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы

информационных систем) характера, представления материалов собственных исследований	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основы структурной теории доказательств (в формате генцовских секвенциальных исчислений), теории субструктурных логик и алгебраической логики.

уметь:

- решать задачи по означенным темам, правильно выбирая методы и подходы.

владеть:

- методами субструктурных логик для моделирования вычислительных процессов и в приложениях из математической лингвистики.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Вычислимые функции и модели вычислений	15			10
2	Использование машины Минского для доказательства неразрешимости	10			10
3	Использование машины Тьюринга для доказательства неразрешимости.	5			10
4	Группы, заданные определяющими соотношениями и групповые конструкции.	5			10
5	Проблемы равенства и сопряженности в группах.	5			10
6	Проблемы определения групповых свойств.	5			10
Итого часов		45			60
Подготовка к экзамену		30 час.			

Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.
--------------------	---------------------

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Вычислимые функции и модели вычислений

Машина Тьюринга. Вычислимые и перечислимые множества. Тезис Чёрча-Тьюринга. Регистровые машины. Машина Минского.

2. Использование машины Минского для доказательства неразрешимости

Доказательство полноты по Тьюрингу Язык программирования Fractran. Элементарная теория полугруппы. Теорема Квайна о неразрешимости элементарной теории свободной полугруппы.

3. Использование машины Тьюринга для доказательства неразрешимости.

Системы Туэ и полусистемы Туэ. Полугруппы, заданные соотношениями. Теорема Маркова-Поста о неразрешимости проблемы равенства в конечноопределённых полугруппах. Проблема соответствия Поста. Теорема Патэрсона о неразрешимости проблемы вырождения произведения матриц.

4. Группы, заданные определяющими соотношениями и групповые конструкции.

Конечноопределённые группы и рекурсивно определённые группы. Свободные произведения групп. Нормальные формы в свободных произведениях. HNN-расширения групп. Лемма Бриттона.

5. Проблемы равенства и сопряжённости в группах.

Проблема равенства и сопряжённости. Теорема Кузнецова о финитно-аппроксимируемых группах. Универсальная проблема равенства в классе конечных групп. Теорема Слободского (без доказательства). Теорема Новикова о проблеме неразрешимости проблемы равенства в конечноопределённых группах. Проблема вхождения в подгруппу данной группы. Теорема Михайловой. Проблема равенства в группах с одним соотношением.

6. Проблемы определения групповых свойств.

Лемма Гордона. Неразрешимость проблемы изоморфизма конечноопределённых групп. Марковские свойства. Теорема Адяна-Рабина.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в математическую логику [Текст]/Э. Мендельсон, -М., Наука, 1984
2. Введение в математическую логику. Множества и отношения [Текст], учеб. пособие /Е. В. Дашкова; М-во науки и высш. образования РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (нац. исслед. ун-т). М., МФТИ, 2019

Дополнительная литература

1. Введение в математическую логику и роды структур [Текст] : учеб. пособие для вузов / И. Н. Пономарев ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т .— М. : Изд-во МФТИ, 2007 .— 240 с.
 2. Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп [Текст]/С. И. Адян , -М., Наука, 1966
- Колмогоров А. Н. Введение в математическую логику [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин .— М. : МГУ, 1982 .— 120 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- проработку учебного материала;
- выполнение домашних теоретических.

Степень овладения студентами компетенциями, формируемыми в процессе изучения дисциплины, проверяется в ходе устного экзамена в конце курса. Текущий контроль осуществляется посредством коллоквиумов или контрольных работ, на усмотрение преподавателя.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки: Прикладная математика и информатика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра методов современной математики
курс: 2
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Разработчик: Д.В. Трещев, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области информатики и вычислительной техники, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен разрабатывать и модернизировать программное и аппаратное обеспечение информационных и автоматизированных систем
	ОПК-3.3 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-3.6 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований	ОПК-3.7 Способен разрабатывать оригинальные алгоритмы и программные средства, в том числе с использованием современных интеллектуальных технологий, для решения профессиональных задач
	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационных технологий задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий
	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений и научной аргументации при анализе объекта научной и профессиональной деятельности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгоритмические вопросы алгебры» обучающийся должен:

знать:

- основы структурной теории доказательств (в формате генценовских секвенциальных исчислений), теории субструктурных логик и алгебраической логики.

уметь:

- решать задачи по означенным темам, правильно выбирая методы и подходы.

владеть:

- методами субструктурных логик для моделирования вычислительных процессов и в приложениях из математической лингвистики.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примерные типы заданий коллоквиума / контрольной работы:

1. Если у группы есть рекурсивно перечислимое задание, то у неё есть также и рекурсивное задание.
2. Реализуйте функцию $x+2*y$ с помощью машины Минского
3. Является ли группой полугруппа с одним соотношением $\langle\langle a,b \mid ab=1 \rangle\rangle$
4. Приведите пример формулы первого порядка, истинной для свободной полугруппы, но не для свободной группы.
5. Докажите, что проблема общезначимости формулы в в полугруппе натуральных чисел принадлежит классу NP.
6. Опишите множество решений проблемы соответствия для системы из трёх правил: $\{(abb,a),(b,abb),\{a,bb\}\}$.
7. Равен ли единице коммутатор $[a^2b^4a^{-3},b]$ в группе $\langle a,b \mid ba^{-2}b=a^3 \rangle$?
8. Постройте алгоритм решения проблемы вхождения в абелевой группе Z^2 .
9. Является ли свойство группы «быть конечной» марковским?

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Примеры Экзаменационных вопросов

1. Машина Тьюринга. Тезис Чёрча-Тьюринга. Рекурсивные и р.перечислимые множества.
2. Проблема равенства в полугруппах. Теорема Маркова-Поста.
3. Проблема соответствия Поста, её неразрешимость.
4. Проблема вырождения произведения матриц, её неразрешимость для матриц 3×3 .
5. Регистровые машины. Машина Минского. Язык Fractran.
6. Элементарная теория свободной полугруппы, её неразрешимость.
7. Полугруппы и группы, заданные определяющими соотношениями.
8. Проблема равенства и сопряжённости в группах. Теорема Кузнецова о финитно-аппроксимируемых группах. Теорема Слободского (без доказательства).
9. Свободные произведения групп. HNN-расширения групп. Лемма Бриттона.
10. Проблема равенства в группах с одним соотношением. Теорема Магнуса.

Примеры билетов

Билет 1

1. Машина Тьюринга. Тезис Чёрча-Тьюринга.
2. Верно ли, что пересечение двух перечислимых множеств является перечислимым?

Билет 2

1. Теорема Маркова-Поста.
2. Постройте машину Минского, которая реализует функцию $f(x,y)=x*y$

Билет 3

1. Теорема Магнуса.
2. Докажите, что в полугруппе $\langle\langle a,b,c \mid ab=cba \rangle\rangle$ разрешима проблема равенства

Билет 4

1. Лемма Гордона. Неразрешимость проблемы изоморфизма групп.

2. Приведите пример нетривиального свойства конечно-порождённых групп, которое является разрешимым и докажите разрешимость.

Билет 5

1. Теорема Новикова (конструкция группы).

2. Докажите, что группа, заданная как $\langle a, b \mid ab = b^2a, ba = a^2b \rangle$ является единичной

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена по дисциплине обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины. Экзамен проходит путем специального опроса, проводимого в устной форме.