

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики
А.М. Райгородский**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория чисел. Часть 3
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	2
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 45 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: М.Р. Габдуллин

Программа обсуждена на заседании кафедры методов современной математики 04.06.2020

Аннотация

В курсе будет изложен целый ряд как классических, так и современных результатов теории чисел, связанных с диофантовыми приближениями и трансцендентными числами, распределением простых чисел и нулями дзета-функции Римана, анализом Фурье на конечных абелевых группах. Кроме того, курс предусматривает разбор и самостоятельное решение наиболее характерных задач по перечисленным разделам. Для освоения курса желательно знание основ алгебры и теории функций комплексного переменного, однако большая часть необходимых сведений будет дана слушателям по ходу изложения.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Получение студентами представления об элементарной и аналитической теории чисел.

Задачи дисциплины

Получение студентами представления об элементарной и аналитической теории чисел.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.4 Способен анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Классические методы теории чисел

уметь:

Работать с основными задачами в сфере теории чисел

владеть:

Методами теории чисел

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Дзета-функция Римана	2	4		6
2	Кси-функция Римана	2	4		6
3	Функции распределения простых чисел	2	4		6
4	Асимптотический закон распределения простых чисел	2	4		6
5	Нули дзета-функции Римана	2	4		6
6	Теорема Хаксли	2	4		6
7	Теоремы о приближении, теорема А. Сельберга.	3	6		9
Итого часов		15	30		45
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Дзета-функция Римана

определение, основные свойства (эйлеровское произведение,, мероморфное продолжение в полосу правее вещественной оси, продолжение на всю комплексную плоскость).

2. Кси-функция Римана

Определение и свойства, произведение Вейерштрасса для Кси-функции Римана. Нули дзета-функции Римана. Их простейшие свойства.

3. Функции распределения простых чисел

Функция $\pi(x)$. Функция Мангольдта $\Lambda(n)$. Функция Чебышёва $\psi(x)$. Их связь с дзета-функцией. Разрывный множитель Дирихле. Явная формула для $\psi(x)$.

4. Асимптотический закон распределения простых чисел

Переформулировка в терминах пси-функции Чебышёва. Классические рассуждения: переход к дзета-функции Римана. Элементарное доказательство: завершение Эрдеша-Сельберга. Граница нулей И.М. Виноградова (формулировка).

5. Нули дзета-функции Римана

Плотностные теоремы для нулей дзета-функции Римана. Доказательство плотностной теоремы Карлсона. Плотностная теорема М. Хаксли (формулировка). Понятие о парной корреляции нулей дзета-функции Римана. Гипотеза Х. Монтгомери. Её следствия для теории распределения простых чисел.

6. Теорема Хаксли

Асимптотическая формула для количества простых на коротком промежутке как следствие теоремы Хаксли.

7. Теоремы о приближении, теорема А. Сельберга.

Теоремы о приближении заданного числа N суммой двух простых. Условная теорема А. Сельберга о простых числах на «почти всех» коротких промежутках.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Основы теории чисел [Текст] : учебник для вузов / И. М. Виноградов .— 6-е изд., испр. — М. : Гостехиздат, 1953 .— 180 с.
2. Введение в теорию алгебраических чисел [Текст]/М. М. Постников, -М., Наука, 1982
3. Основы теории чисел [Текст], монография/А. Вейль , -М., Мир, 1972

Дополнительная литература

1. Вычислительно сложные задачи теории чисел [Текст] : учеб. пособие для вузов / Е. А. Гречников [и др.] ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова .— М. : Изд-во Моск. ун-та, 2012 .— 312 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;

– напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

– чтение рекомендованной литературы;

– проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;

– решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;

– подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра методов современной математики
курс:	<u>2</u>
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: М.Р. Габдуллин

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Имеет представление об актуальных проблемах науки и техники в области информатики и вычислительной техники, способен на научном языке формулировать профессиональные задачи	ОПК-2.1 Имеет представление о современном состоянии исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Способен оценивать актуальность исследований в области информатики и вычислительной техники и их практическую значимость
	ОПК-2.3 Владеет профессиональной терминологией, используемой в современной научно-технической литературе, обладает навыками устного и письменного изложения результатов научной деятельности в рамках профессиональной коммуникации
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
	ОПК-4.4 Способен анализировать профессиональную информацию, выделять в ней главное, структурировать, оформлять и представлять в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория чисел. Часть 3» обучающийся должен:

знать:

Классические методы теории чисел

уметь:

Работать с основными задачами в сфере теории чисел

владеть:

Методами теории чисел

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Представляет ли нуль над полем Q квадратичная форма $x^2+y^2-7z^2$?
2. Какова плотность множества простых чисел, для которых 14 является квадратичным невычетом?
3. В каких полях p -адических чисел содержится корень девятой степени из единицы?
4. Найдите дискриминант поля, порожденного вещественным корнем многочлена x^3+x-7 .
5. Опишите разложение простых чисел в поле, порожденном $\sin(2\pi/11)$.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, конспектами.

Билеты по курсу теории чисел (III семестр)

1. Доказать формулу суммирования Эйлера-Маклорена: если $f(x)$ - непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция, $\varrho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, то справедливо равенство:

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(x) dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) - \int_a^b f'(x)\varrho(x) dx.$$

2. Доказать, что при $N \rightarrow +\infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + O(N^{-1}),$$

где γ - некоторая константа (она называется постоянной Эйлера).

3. Доказать, что при $s \rightarrow 1$ имеет место асимптотическое равенство:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(|s-1|).$$

4. Найти асимптотику суммы

$$\sum_{n=1}^N \ln n, \quad N \rightarrow +\infty.$$

5. Найти асимптотику суммы

$$\sum_{n=1}^N \frac{\ln n}{n}, \quad N \rightarrow +\infty.$$

6. Доказать следующий вариант формулы суммирования Абеля. Пусть $a < b$, $\{\lambda_n\}$ - произвольная конечная неубывающая последовательность, $a < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \leq b$, $\{c_n\}$ - произвольная последовательность комплексных чисел, $f(x)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция. Тогда справедливо равенство:

$$\sum_{a < \lambda_n \leq b} c_n f(\lambda_n) = \mathbb{C}(b)f(b) - \int_a^b \mathbb{C}(u)f'(u)du, \quad \text{где} \quad \mathbb{C}(u) = \sum_{a < \lambda_n \leq u} c_n.$$

В частности, при $c_n \equiv 1$ имеет место тождество

$$\sum_{a < \lambda_n \leq b} f(\lambda_n) = \mathbb{N}(b)f(b) - \int_a^b \mathbb{N}(u)f'(u)du, \quad \text{где} \quad \mathbb{N}(u) = \sum_{a < \lambda_n \leq u} 1$$

— “считающая” функция последовательности $\{\lambda_n\}$.

7. Доказать, что для дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ справедлив следующий вариант формулы суммирования Эйлера-Маклорена:

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(x) dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) - \sigma(b)f'(b) + \sigma(a)f'(a) + \int_a^b f''(x)\sigma(x) dx,$$

где

$$\sigma(x) = \int_0^x \varrho(u) du.$$

8. Проверить, что функция $\sigma(x)$ из задачи 7 удовлетворяет следующим условиям: а) $\sigma(x) = \sigma(x+1)$ для любого x ; б) $\sigma(n) = 0$ для любого целого n ; в) $\sigma(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$ при $0 \leq x \leq 1$.

9. Найти разложение в ряд Фурье функции $\sigma(x)$ из задачи 7 и с его помощью вычислить сумму ряда

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

10. Пользуясь тождеством Эйлера

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

доказать тождества:

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}, \quad \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s}, \quad \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n^2)}{n^s}, \quad \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau^2(n)}{n^s},$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}, \quad \zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s}$$

(здесь $\tau(n)$ – число делителей n , $\tau_k(n)$ – “многомерная” функция делителей, равная числу решений уравнения $x_1 \dots x_k = n$ в натуральных числах, $\omega(n)$ – число простых делителей n , $\mu(n)$ – функция Мёбиуса, $\varphi(n)$ – функция Эйлера; переменная s в тождествах предполагается такой, что ряды Дирихле, представляющие соответствующие множители типа $1/\zeta(2s)$, $\zeta(s-1)$ и т.д., сходятся абсолютно).

11. Доказать, что в представлении кси-функции Римана

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

в виде произведения Вейерштрасса, т.е. в равенстве

$$\xi(s) = e^{as} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho} \quad (\rho - \text{комплексные нули } \zeta(s))$$

постоянная a равна $\ln 2\sqrt{\pi} - \gamma/2 - 1$.

12. Пользуясь произведением Вейерштрасса для $\xi(s)$, доказать тождество

$$\sum_{\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) = -2a,$$

где a - постоянная из задачи 11.

13. Пусть $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots$ - занумерованные в порядке возрастания положительные ординаты нулей $\zeta(s)$. Пользуясь задачей 12, доказать, что $\gamma_1 > 6.5$.

14. Доказать основное свойство функции Мёбиуса:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

15. Положим

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p.$$

Доказать тождество

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \vartheta(x^{1/4}) + \dots$$

(при любом $x > 0$ такая сумма, очевидно, конечна; она обрывается при $x^{1/k} < 2$).

16. Воспользовавшись задачей 14, доказать, что

$$\vartheta(x) = \sum_{m \geq 1} \mu(m) \psi(x^{1/m}).$$

17. Для $x \geq 2$ положим $T(x) = \ln([x]!)$ (здесь $[\cdot]$ - знак целой части). Доказать тождество:

$$T(x) = \sum_{n \geq 1} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

18. Рассматривая разность $T(x) - 2T(x/2)$, доказать неравенства $c_1 x < \psi(x) < c_2 x$, где $0 < c_1 < 1 < c_2$ - некоторые абсолютные постоянные (теорема П.Л. Чебышёва). Вывести из них неравенства

$$\frac{c_3 x}{\ln x} < \pi(x) < \frac{c_4 x}{\ln x},$$

где $0 < c_3 < 1 < c_4$ - абсолютные постоянные.

19. Пусть $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ - подряд идущие простые числа, занумерованные по возрастанию. Вывести из задачи 18 оценки

$$c_5 n \ln n < p_n < c_6 n \ln n, \quad 0 < c_5 < 1 < c_6.$$

20. Доказать, что асимптотический закон распределения простых чисел эквивалентен предельному равенству

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1.$$

21. Пользуясь задачей 19, для количества $\omega(n)$ различных простых делителей n получить оценку:

$$\omega(n) \leq \frac{c \ln n}{\ln \ln n}, \quad c > 0 - \text{абсолютная постоянная.}$$

22. Доказать следующие утверждения о функции Эйлера $\varphi(n)$:

$$\text{a) } \varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right); \quad \text{b) } \frac{cn}{\ln \ln n} \leq \varphi(n) \leq n - 1.$$

23. Эффект “усиления оценок”. Пусть для любой сколь угодно малой постоянной $\varepsilon > 0$ при $x \rightarrow +\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\psi(x) = x + O(x^{1/2+\varepsilon}).$$

Тогда имеет место и равенство

$$\psi(x) = x + O(\sqrt{x}(\ln x)^2).$$

24. Различные типы “разрывных множителей”. Пусть $a, b > 0$. Доказать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{a^s ds}{s(s+1)} &= \begin{cases} 1 - 1/a, & \text{если } a \geq 1, \\ 0, & \text{если } 0 < a < 1; \end{cases} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{a^s ds}{s^2} &= \begin{cases} \ln a, & \text{если } a \geq 1, \\ 0, & \text{если } 0 < a < 1; \end{cases} \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cos(2ax) dx &= \begin{cases} 1 - a, & \text{если } 0 \leq a \leq 1, \\ 0, & \text{если } a > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

25. Найти коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\varrho(x) = 1/2 - \{x\}$.

26. Пусть α, M, N - произвольные вещественные числа, $N \geq 1$. Доказать неравенство:

$$\left| \sum_{M < m \leq M+N} e^{2\pi i \alpha m} \right| \leq \min \left(N, \frac{1}{\|\alpha\|} \right),$$

где $\|\alpha\|$ – расстояние от α до ближайшего целого числа.

27. Пользуясь задачами 25, 26, доказать, что разность между функцией $\varrho(x)$ и суммой первых N слагаемых её ряда Фурье не превосходит по модулю величины

$$\min \left(\ln N, \frac{1}{N\|x\|} \right).$$

28. Пользуясь задачами 1 и 27, доказать следующую теорему ван-дер-Корпута: пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ монотонную и гладкую производную, удовлетворяющую, сверх того, условию $|f'(x)| \leq 1 - \delta$, где $0 < \delta < 1$. Тогда справедливо равенство:

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx + r, \quad \text{где} \quad |r| < 3 \left(1 + \frac{1}{\delta} \right).$$

29. Пользуясь задачей 1, доказать при $\operatorname{Re} s > 1$ равенство

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2N^s} + s \int_N^{+\infty} \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}} du,$$

и заметить, что оно продолжает $\zeta(s)$ в область $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$.

30. “Простейшее приближение” для $\zeta(s)$. Пусть $s = \sigma + it$, где $0 < \sigma_0 < \sigma \leq 2$ – фиксированное число, $t \geq 2\pi$, и пусть $x \geq t/\pi$. Выбирая в задаче 29 число $N = N(t, x)$ достаточно большим и оценивая сумму по $x < n \leq N$ с помощью задачи 28, доказать, что

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(x^{-\sigma} \ln x),$$

где постоянная в знаке O зависит от σ_0 .

31*. Пользуясь задачей 30, доказать простейшую плотностную теорему для нулей дзета-функции Римана:

$$N(\sigma, T) \ll T^{4(1-\sigma)} (\ln T)^{12}.$$

Для этого рассмотреть произведение $\zeta(s)M_x(s)$, где

$$M_x(s) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad x = T^{2\sigma-1}, \quad |\operatorname{Im} s| = |t| \leq T.$$

В получившееся равенство подставить $s = \rho$ и получить оценку типа

$$1 \leq F_1(\rho) + F_2(\rho),$$

которую затем возвести в квадрат и просуммировать по всем нулям ρ из рассматриваемого прямоугольника $|\operatorname{Im} s| \leq T$, $\operatorname{Re} s > \sigma$. Получившиеся две суммы оценить, заменяя их интегралами с помощью следствия леммы Соболева-Галлахера:

$$\sum_{j=1}^r |F(t_j)|^2 \leq \frac{1}{\delta} j_1 + 2\sqrt{j_1 j_2}, \quad j_1 = \int_{t_0}^{t_r} |F(t)|^2 dt, \quad j_2 = \int_{t_0}^{t_r} |F'(t)|^2 dt, \quad \delta = \min_j (t_{j+1} - t_j).$$