Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Директор физтех-школы радиотехники и компьютерных технологий
Д.А. Гаврилов

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Дискретные случайные процессы
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Компьютерные технологии и вычислительная техника Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра радиоэлектроники и прикладной информатики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:
- лекции: 60 час.
- семинары: 0 час.
- лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: Н.Н. Шамаров, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры радиоэлектроники и прикладной информатики 30.01.2024

Аннотация

Дисциплина является теоретической и посвящена математическим методам, лежащим в основе анализа статистики процессов. Излагаются ключевые понятия и методы теории случайных процессов с дискретным временем и как дискретными, так и --- как правило --- непрерывными распределениями наборов случайных значений процесса. Вначале напоминаются известные из курса теории вероятностей (далее --- ТВ) и формулируются новые необходимые для дальнейшего изложения свойства счетноаддитивных мер и интегралов по ним с упором на связь с геометрическими образами и на применения этих свойств для описаний важнейших типов случайных величин. Затем излагаются разделы теории стационарных (как в широком, так и в узком смысле) случайных процессов с дискретным временем. В результате изучения приобретаются умения находить свойства случайных процессов и навыки понимания специальной литературы по предмету.

Курс опирается на разделы математического анализа, линейной алгебры и ТВ.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- ознакомление с основными положениями теории дискретных случайных процессов.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний в области случайных процессов с дискретным временем.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

научные исследования и их апробацию	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия теории меры и теории интегрирования по Лебегу;
- аксиоматику теории вероятностей по Колмогорову;
- определение основных видов дискретных случайных процессов;
- основные свойства дискретных случайных процессов.

уметь:

- приводить классические примеры случайных процессов;
- составлять математическую модель для конкретной прикладной задачи;
- пользоваться своими знаниями для решения практических задач с помощью их вероятностной модели.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- навыками самостоятельной работы и использования информации из баз знаний в Интернет;
- культурой постановки и решения задач по теории дискретных случайных процессов;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Колмогоровские модели	30			20
2	Стационарность	30			25
Итого часов		60			45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Колмогоровские модели

Общее понятие пространства как множества, с которым связана в контексте рассуждения некоторая структура; структура же как система вспомогательных множеств (или множеств и функций), связанных с исходным множеством.

Понятие так называемого «измеримого» пространства как заданном сигма-алгеброй на «единице» этой алгебры, где «единица» совпадает, как множество, с этим пространством.

*Моделирование (булевой) системы событий как синтаксической структуры (текстовые описания событий, например из статистических исследований) и как теоретико-множественной структуры.

(Напоминание) Основные свойства вещественных и комплексных линейных пространств, свойства вещественного и комплексного (эрмитова) скалярных произведений в соответственных линейных пространствых; примеры координатных пространств и пространств непрерывных функций с такими произведениями.

Определения свойства измеримости как для функции с числовыми значениями, определенной на измеримом пространстве общего вида (заданном сигма-алгеброй на области определения этой функции), так и для функций (отображений), определенных на тех же пространствах со значениями снова в измеримых пространствах (тех же или других). Понятие измеримости по Борелю (она же борелевость) функций из многомерного анализа. Достаточность свойства непрерывности для свойства борелевости отображения (т.е. его измеримости по Борелю).

Определения сигма-алгебры, порожденной системой подмножеств заданной «единицы» сигма-алгебры в терминах минимальности. *Конструкция процесса порождения сигма-алгебры с помощью трансфинитной индукции.

Связь системы подмножеств «единицы» сигма-алгебры с индикаторными функциями этих подмножеств. Связь некоторых операций над множествами с операциями над индикаторными функциями этих множеств (произведение нескольких функций, их минимум, их максимум, «(остатки) суммы по модулю 2», разность большей и меньшей).

Определение («тензорного») произведения сигма-алгебр на декартовом произведении «единиц» этих алгебр: конечное число множителей, счетное число множителей.

Общее понятие меры как функции, областью определения которой служит система множеств (функция «переменного множества» dx).

Понятие меры, называемой «плотность множеств натуральных чисел», заданной на некоторой системе подмножеств множества натуральных чисел, и её роль в теории вероятностей как простейшая модель вероятности событий; неудовлетворительность максимальной области определения.

Понятие образа меры при измеримом отображении одного измеримого пространства в другое как композиция меры с операцией взятия полного прообраза множества.

Классические геометрические модели вероятностных пространств, где

а) элементарные события --- точки евклидова пространства некоторой размерности n,

б) события --- борелевские подмножества в том пространстве,

в) вероятности событий вычисляются либо с помощью интеграла от измеримой по Борелю «весовой» функции («плотности» как функции) по подмножеству, играющему роль достоверного события, относительно меры объема (Лебега), рассматриваемой либо во всем n-мерном пространстве, либо порожденной как (поверхностная) мера объема в фиксированном аффинно-евклидовом подпространстве исходного n-мерного пространства.

Лебегова схема интегрирования измеримых вещественно и комплексно-значных функций

по измеримому пространству с неотрицательной мерой и а) конечной мерой «единицы»,

б) в общем случае, включая меру Лебега («объем») во всем многомерном евклидовом пространстве.

Напоминание: колмогоровская схема определения случайной величины (вещественной или векторной, в том числе комплексной) как измеримой функции на вероятностном пространстве.

Математические ожидания вещественных или комплексных случайных величин как их интегралы по вероятностным пространствам; дисперсии и характеристические функции вещественных случайных величин как интегралы по тем же вероятностным пространствам. Средние значения, матрицы ковариаций и характеристические функции упорядоченных конечных наборов вещественных случайных величин (= «случайных векторов» = «векторных случайных величин») на общем вероятностном пространстве как интегралы по тому же вероятностному пространству.

Напоминания: евклидова норма (длина) вектора как корень из скалярного квадрата; различные нормы непрерывной функции на отрезке: как интеграл её модуля, как корень из интеграла от квадрата модуля, как сумма квадратов коэффициентов Фурье; неравенство треугольника для норм, второе неравенство треугольника; неравенство (Коши-Буняковского) между квадратом модуля скалярного произведения двух векторов и произведением квадратов длин этих векторов.

Эквивалентность функций, выражающих случайные величины, в терминах совпадения почти наверное. Гильбертово пространство всех классов эквивалентности измеримых функций с интегрируемым квадратом модуля по неотрицательной мере.

Равномерное распределение на отрезке или ином множестве (постоянная «весовая» функция «плотности») в многомерном пространстве.

Напоминание: определения функций распределения, непрерывных слева и непрерывных справа, их основные свойства.

Гауссовские плотности (нормальных распределений на (аффинно-) евклидовых (под)пространствах). *Отсутствие «весовой» борелевской плотности положительной размерности для дираковского распределения, сосредоточенного в точке.

Формулы для меры распределения вещественной случайной величины в разных случаях: с помощью функции распределения, с помощью плотности распределения (если она существует), характеристической функцией, наконец, как образ той вероятностной меры, которая задана на вероятностном пространстве, служащем в --- колмогоровской схеме случайной величины как функции --- областью определения измеримой функции, выражающей случайную величину.

Задание меры распределения многомерной («векторной») случайной величины в разных случаях: а) с помощью плотности распределения (если она существует),

б) характеристической функцией, в) наконец, как образ той вероятностной меры, которая задана на вероятностном пространстве, служащем --- в колмогоровской схеме случайной величины как функции --- областью определения измеримой функции, выражающей случайную величину; *г) многомерной функцией распределения.

Общий вид характеристической функции многомерного гауссовского распределения.

Описание борелевской меры n-мерного гауссовского распределения по его характеристической функции.

Случайная функция в узком смысле как индексированная система случайных величин

$\xi=\{\xi j : j\in M\}$, заданных на общем для всех них вероятностном пространстве, или как функция, определенная на множестве M значений индекса, и принимающая значения в множестве случайных величин, заданных на общем для всех них вероятностном пространстве.

Случайный процесс в узком смысле как такая случайная функция в узком смысле, для которой множество индексов является подмножеством в множестве вещественных чисел.

Система конечномерных распределений случайной функции в узком смысле в терминах образов мер.

Согласованность индексированной системы конечномерных распределений как согласованность пар её больших и меньших конечных подсистем в терминах образов мер.

Случайная вещественная функция на множестве M числовой оси (она же случайный процесс с множеством моментов времени M) в широком смысле как индексированная конечными строго возрастающими наборами точек из M без повторений согласованная система конечномерных распределений.

Случайная комплексная функция как пара вещественных случайных функций.

Теорема Колмогорова о реализации случайного процесса в широком смысле с множеством M моментов времени с помощью процесса в узком смысле с тем же множеством M в качестве множества значений индекса.

2. Стационарность

Дискретный случайный процесс (в узком или широком смысле) как случайный процесс, для которого множество M дискретно.

Пример счетной согласованной системы распределений «стандартный гауссовский белый шум», когда для каждого конечного возрастающего набора из n целочисленных индексов соответствующе n-мерное распределение является гауссовским с нулевым средним и единичной матрицей ковариации.

Стационарный в узком смысле дискретный случайный процесс (с множеством натуральных чисел в качестве множества значений индекса): общее определение, пример с независимыми одинаково распределенными значениями процесса.

Сохраняющее меру измеримое преобразование вероятностного пространства: общее определение, примеры: а) сохраняющего меру измеримого преобразования вероятностного пространства, б) не сохраняющего меру измеримого преобразования вероятностного пространства.

Построение стационарного в узком смысле дискретного случайного процесса (с множеством натуральных чисел в качестве множества значений индекса) с помощью случайной величины как измеримой функции на вероятностном пространстве и сохраняющего меру преобразования этого вероятностного пространства; назовем таким образом построенный процесс стандартным стационарным в узком смысле дискретным случайным процессом; совпадение распределений произвольного стационарного в узком смысле дискретного случайного процесса (с множеством натуральных чисел в качестве множества значений индекса) с распределением одного из стандартных (формулировка).

Теорема Пуанкаре о возвратности для сохраняющих меру преобразований.

Стационарные в широком смысле случайные последовательности (с комплексными значениями, целочисленными индексами и конечными абсолютными вторыми моментами). Примеры таких процессов (одномерный пример (когда все случайные значения процесса пропорциональны друг другу) периодической последовательности; конечномерный пример «почти» периодической последовательности; условие на коэффициенты для бесконечномерной почти периодической последовательности; стандартный гауссовский белый шум). Ковариационная и корреляционная функции для таких процессов, определения и примеры для периодической «одномерной» последовательности, почти периодической, белого шума, скользящего среднего конечного порядка, авторегрессии.

Полнота (гильбертовость) множества случайных величин с конечным абсолютным вторым моментом и нулевым средним.

Вывод свойств: $0\le R(0)$, $|R(n)|\le R(0)$, $(R(n))^*=R(-n)$.

Спектральная функция, спектральная плотность, неотрицательная спектральная (структурная) мера: определения, примеры, обозначения вида

$m\xi(d\lambda)=dF\xi(\lambda)=F\xi(d\lambda)=f(\lambda)d\lambda$.

Обоснование понятия «белый шум» в терминах спектральной плотности.

Теорема Герглотца (формулировка).

Ортогональные меры со значениями в гильбертовом пространстве.

(«Стохастические») интегралы от непрерывных 2π-периодических функций по ортогональной борелевской мере на $(-\pi, \pi]$.

Спектральное представление «интегралом фурье» по ортогональной мере для стационарных в широком смысле случайных последовательностей с нулевым средним.

Примеры ортогональных мер $Z\xi$ для перечисленных выше типов ковариационных функций $R\xi$, спектральная плотность для смешанной модели авторегрессии и скользящего среднего конечных порядков.

Связь значений ортогональной меры $Z\xi$ и её структурной неотрицательной меры $m\xi$.

Связь структурных мер $m\xi$ и $m\eta$ в случае тождества $Z\eta(d\lambda)= g(\lambda)Z\xi(d\lambda)$ с произвольной непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функцией g.

Аналог закона больших чисел --- пределы средних арифметических значений процесса и его ковариационной функции, выраженные через значения спектральных мер (структурной и ортогональной) на одноточечном множестве $\{0\}$.

Статистическое оценивание среднего, ковариационной функции (в гауссовском случае) и спектральной плотности --- несмещенные, состоятельные и асимптотически несмещенные оценки, периодограмма в разных видах и её сглаживания (свёртками).

Сингулярные и регулярные процессы. Разложение на регулярную и сингулярную части.

Равносильность регулярности и свойства быть процессом скользящего среднего, обновляющий белый шум.

Разложение Вольда.

Оптимальное оценивание «по прошлому»: точность для сингулярного процесса.

Постановка задач экстраполяции, интерполяции и фильтрации стационарных сигналов и примеры решений.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

В традиционной ситуации очной формы обучения:
- учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа.
В самоизоляционной ситуации:
- средства интернет-связи.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вероятность [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов / А. Н. Ширяев .— 4-е перераб. и доп. — М. : МЦНМО, 2007, 2011 .— Т. 2 : Суммы и последовательности случайных величин - стационарные, мартингалы, марковские цепи. - 2007, 2011. - 416 с.
2. Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями) [Текст]. Кн. 1 : [учеб. пособие для вузов] / А. Н. Ширяев, И. Г. Эрлих, П. А. Яськов .— М. : МЦНМО, 2013 .— 648 с.
3. Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. В. Булинский ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. фмз.-техн. ин-т (гос. ун-т .— М. : МФТИ, 2010 .— 216 с.

Дополнительная литература

1. Теория случайных процессов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] .— М. : Физматлит, 2005 .— 402 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Необходимых нет, так как достаточно бумажной литературы. Есть рекомендуемые:
http://www.majarentals.com/diskretnie-sluchaynie.html

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Организация взаимодействия с обучающимися посредством видеоконференцсвязи (программный комплекс Zoom Cloud Meetings или его аналоги) и электронной почты

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Конспектирование лекций, и освоение соответствующих темам лекций разделов рекомендованной литературы, решение рекомендованных типов задач. До каждой следующей лекцией изучить предыдущие, а непосредственно перед лекцией – повторить изученные формулировки понятий и фактов.

В том числе рекомендуем прочитать:

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.: Теория случайных процессов и ее инженерные приложения // М.: Высшая школа, 2000
2. Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. — М.-Ижевск, 2009.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Компьютерные технологии и вычислительная техника Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра радиоэлектроники и прикладной информатики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Разработчик: Н.Н. Шамаров, д-р физ.-мат. наук, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

<table>
<tr><th>Код и наименование компетенции</th><th>Индикаторы достижения компетенции</th></tr>
<tr><td>УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач</td><td>УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи</td></tr>
<tr><td>ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности</td><td>ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности</td></tr>
<tr><td>ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)</td><td>ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты</td><td>ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности</td></tr>
<tr><td>ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели</td></tr>
<tr><td>ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию</td><td>ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации</td></tr>
<tr><td>ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива</td></tr>
<tr><td>ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях</td></tr>
</table>

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дискретные случайные процессы» обучающийся должен:

знать:

- основные понятия теории меры и теории интегрирования по Лебегу;
- аксиоматику теории вероятностей по Колмогорову;
- определение основных видов дискретных случайных процессов;
- основные свойства дискретных случайных процессов.

уметь:

- приводить классические примеры случайных процессов;
- составлять математическую модель для конкретной прикладной задачи;
- пользоваться своими знаниями для решения практических задач с помощью их вероятностной модели.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации;
- навыками самостоятельной работы и использования информации из баз знаний в Интернет;
- культурой постановки и решения задач по теории дискретных случайных процессов;
- практикой исследования и решения теоретических и прикладных задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль проводится один раз в конце семестра по итогам решения практических задач.

В течение семестра от студента требуется подробное и развернутое решение 7-и задач:

1. Полное описание ненулевых одномерных стационарных в широком смысле комплексных процессов $\xi = (\xi_n)_n$ с конечными дисперсиями и нулевым средним: найти все функции $g:z\to C$ такие, что $\xi_n=g(n)\xi_0$ $(n \in z)$.
2. Описать значения ортогональной меры, отвечающей ненулевых одномерных стационарных в широком смысле комплексных процессов $\xi = (\xi_n)_n$ с конечными дисперсиями и нулевым средним, на промежутках изменения спектрального параметра.
3. Привести пример ненулевых стационарных в широком смысле комплексных процессов $\xi = (\xi_n)_n$ с конечными дисперсиями и нулевым средним, с конечномерным в $L2(\Omega)$ подпространством $H\xi$ (содержащим все величины ξ_n).
4. Описать значения ортогональной меры, отвечающей (почти периодической) последовательности с конечным числом точек в спектре.
5. Описать значения ортогональной меры, отвечающей стандартному белому шуму $\varepsilon = (\varepsilon_n)_n$ $(n \in z)$, на промежутках изменения спектрального параметра.
6. Найти вид спектральной плотности для последовательности скользящего среднего конечного порядка.
7. Найти вид спектральной плотности для последовательности, подчиняющейся авторегрессионной схеме первого порядка $\xi_n = \alpha\xi_{n-1} + \varepsilon_n$ при $|\alpha|<1$ (ε_n --- стандартный белый шум).

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Системы множеств --- алгебры, полуалгебры, сигма-алгебры. Примеры их и мер на них: меры Дирака, Жордана.
2. Счетная аддитивность и абстрактные колмогоровские тройки (вероятностные пространства). Пример меры, порожденной (непрерывной справа) функцией распределения (без доказательства).
3. Конструкции единственного аддитивного продолжении меры с полуалгебры на алгебру и единственного счетно-аддитивного продолжения неотрицательной меры с полуалгебры на сигма-алгебру (без доказательства). Меры Лебега на евклидовых пространствах как продолжения мер Жордана.
4. Борелевские подмножества евклидовых и метрических пространств. Существование борелевских сигма-алгебр. Пополнение неотрицательной меры и борелевские меры Лебега.
5. Измеримые функции и отображения, случайные элементы (вещественные, векторные, со значениями в метрических пространствах).
6. Вероятностные распределения случайных величин (вещественных, комплексных), случайных векторов (вещественных, комплексных), элементов метрических пространств. Конечномерные функции распределения. Случай непрерывных плотностей распределения (через интеграл Римана).
7. Простые функции, конструкция интеграла Лебега по неотрицательной мере и мажорантные теоремы Лебега и Б.Леви о пределах интегралов (без доказательств).
8. Интегрируемость ограниченных измеримых функций. Характеристические функции (преобразования Фурье) конечномерных распределений.
9. Теоремы Фубини и независимые случайные величины.
10. Теорема Радона—Никодима, плотности конечномерных распределений и условные математические ожидания.
11. Теоремы о замене переменной в интеграле Лебега. Представления математических ожиданий, дисперсий и высших моментов конечномерных распределений с помощью интегралов по вероятностному пространству и по мере конечномерного распределения (в случае наличия плотности --- по мере Лебега.
12. Упорядоченные и алгебраические структуры; гильбертовы пространства, проекторы.
13. Связи математического ожидания и матрицы корреляции с характеристической функцией конечномерного распределения.

14. Коэффициенты корреляции и евклидова геометрия центрированных величин со вторым моментом.

15. Теорема Колмогорова о согласованных конечномерных распределениях.

16. Дискретный случайный процесс как последовательность случайных величин и как случайная последовательность. Распределения в пространстве последовательностей.

17. Стационарные и эргодические случайные последовательности в широком и узком смыслах (определения).

18. Гауссовы случайные величины, векторы и последовательности.

19. Случайные последовательности с независимыми приращениями. Блуждания.

20. Конечномерные распределения как обобщенные функции с непрерывными ограниченными тестовыми функциями. Дельта-функции Дирака. Преобразования Фурье.

21. Закон больших чисел как частный случай центральной предельной теоремы и как обоснование аксиоматики.

22. Марковские переходные функции и матрицы.

23. Марковские случайные цепи и их характеристики.

24. Корреляционная функция. Достаточные условия эргодичности последовательности.

25. Спектральные характеристики.

Билет 1.

1. Системы множеств --- алгебры, полуалгебры, сигма-алгебры. Примеры их и мер на них: меры Дирака, Жордана.

2. Спектральные характеристики.

Билет 2.

1. Счетная аддитивность и абстрактные колмогоровские тройки (вероятностные пространства). Пример меры, порожденной (непрерывной справа) функцией распределения (без доказательства).

2. Корреляционная функция. Достаточные условия эргодичности последовательности.

Критерии оценивания

отлично

10 Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

9 Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

8 Выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

хорошо

7 Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

6 Выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

5 Выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

удовлетворительно

4 Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

3 Выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

неудовлетворительно

2 Выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

1 Выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой, конспектами лекций.

Экзамен проводится путем организации специального опроса, проводимого в устной форме.