

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
радиотехники и компьютерных  
технологий**

**Д.А. Гаврилов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Математическая логика и теория алгоритмов
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Компьютерные технологии и вычислительная техника Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра радиоэлектроники и прикладной информатики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составили:

Д.В. Мусатов, канд. физ.-мат. наук, доцент

А.С. Милованов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры радиоэлектроники и прикладной информатики 30.01.2024

## Аннотация

Курс математической логики и теории алгоритмов преследует несколько целей. Во-первых, студентам на многих примерах показываются принципы формализации математических рассуждений. Показывается, что такое формальное определение, формальное утверждение и формальное доказательство. Во-вторых, для нескольких областей показывается взаимосвязь между синтаксисом языка, т.е. правилами построения корректных слов и предложений, и его семантикой, т.е. значением этих цепочек символов. В-третьих, даются основы теории вычислимости и показывается её связь с логикой и арифметикой. Наконец, отдельная часть курса посвящена теории множеств – основе всей математики.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- освоение общематематической терминологии (множества, отношения, функции).

#### Задачи дисциплины

- выработать навык структурированного логического мышления;
- научиться давать формальные определения и приводить примеры определяемых объектов;
- научиться строить формальные записи математических утверждений и их доказательств и работать с этими записями;
- научиться проводить математические рассуждения, не основанные на конкретных свойствах рассматриваемых объектов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики;
- современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Арифметичные предикаты	3	3		3
2	Булевы функции	4	4		4
3	Выразимые предикаты	4	4		4
4	Исчисление высказываний	4	4		4
5	Компактность в исчислении высказываний	3	3		3
6	Однозначность разбора	4	4		4
7	Пропозициональные формулы	4	4		4
8	Формулы первого порядка	4	4		4
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

## 1. Арифметические предикаты

Теорема Мальцева о компактности.

## 2. Булевы функции

Мощности множеств.

## 3. Выразимые предикаты

Теории и модели. Выполнимость.

## 4. Исчисление высказываний

Формулы первого порядка.

## 5. Компактность в исчислении высказываний

Выразимость предикатов.

## 6. Однозначность разбора

Операции над множествами.

## 7. Пропозициональные формулы

Отображения и соответствия.

## 8. Формулы первого порядка

Автоморфизмы интерпретаций.

# 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Вводный курс математической логики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, Н. К. Плиско .— 2-е изд. — М. : Физматлит, 2002, 2007 .— 128 с.
2. Начала теории множеств [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов. Ч.1 / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 3-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2008 .— 128 с.
3. Языки и исчисления [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 3-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2008 .— 288 с. - На обл. авт. не указаны .— (Современные лекционные курсы. Математическая логика и теория алгоритмов). - Библиогр.: с. 272-275. - Предм. указ.: с. 276-284. - Указ. имен: с. 285-288. - 1000 экз. - ISBN 978-5-94057-322-7) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

### Дополнительная литература

1. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова .— 5-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2004, 2006 .— 256 с. - Библиогр.: с. 248-249. - Предм. указ.: с. 250-255.- ISBN 5-9221-0026-2 .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

**7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru>

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Компьютерные технологии и вычислительная техника Физтех-школа Радиотехники и Компьютерных Технологий кафедра радиоэлектроники и прикладной информатики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчики:**

Д.В. Мусатов, канд. физ.-мат. наук, доцент

А.С. Милованов, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики;
- современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики.

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

#### Примеры основных задач

Приведите формулу к наиболее коротким конъюнктивной и дизъюнктивной нормальным формам.

Не опираясь на теорему о полноте исчисления высказываний, докажите выводимость формулы.

Поделите с остатком  $\omega^3 + \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 4 + 2$  на  $\omega + 3$ .

Пусть  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  - неубывающая функция, стремящаяся к бесконечности. Докажите, что существует неразрешимое множество  $A$ , такое что для любого  $k$  множество  $A \cap \{0, 1, \dots, k\}$  содержит не более  $f(k)$  элементов.

Выразите в арифметике принадлежность к множеству чисел вида  $n^n$ .

#### Примеры дополнительных задач

Выразите формулой длины  $O(\log N)$  предикат «у  $x$  есть ровно  $N$  различных простых делителей» в интерпретации  $\langle \mathbb{N}, ', = \rangle$ .

Докажите, что любая формула в интерпретации  $\langle \mathbb{N}, 0, S, = \rangle$  эквивалентна некоторой бескванторной. Докажите, что предикат « $x$  и  $y$  разной чётности» невыразим в этой интерпретации.

Выведите в исчислении предикатов с равенством формулу  $\forall x \forall y (x = f(y) \rightarrow y = g(x)) \rightarrow \forall x g(f(x)) = x$ .

Пусть задана некоторая главная универсальная нумерация вычислимых функций. Классифицируйте множество номеров машин Тьюринга, которые вычисляют последовательность Фибоначчи в арифметической иерархии, доказав в том числе оценку снизу, и докажите или опровергните его  $m$ -полноту на соответствующем уровне.

#### Примеры простых утверждений из программы дифференцированного зачета:

Вывод правила обобщения в исчислении предикатов.

Сумма и произведение фундированных множеств фундированы, вполне упорядоченных – вполне упорядочены.

Замкнутость классов разрешимых и перечислимых множеств относительно пересечения и объединения, класса разрешимых относительно дополнения.

Построение комбинаторов сложения и умножения для нумералов Чёрча (с доказательством корректности).

#### Примеры теорем из программы дифференцированного зачета:

Теорема о дедукции для исчисления высказываний.

Теорема Тарского о неарифметичности множества истинных арифметических формул.

Теорема о делении с остатком вполне упорядоченных множеств.

Неперечислимость и некоперечислимость множества всюду определённых программ.

#### Примеры дополнительных вопросов из программы дифференцированного зачета:

Теорема Чёрча о неразрешимости множества общезначимых формул.

Теорема Гудстейна о сходимости к нулю последовательности чисел, полученных чередованием вычитания единицы и замены основания в полном разложении в сумму степеней с коэффициентами.

Любое счётное вполне упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству действительных чисел.

Построение неглавной универсальной вычислимой функции



#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень вопросов для сдачи дифференцированного зачета:

1. Элементарная теория множеств.
2. Понятия множества и подмножества, простейшие операции над множествами. Упорядоченные пары и кортежи, декартово произведение.
3. Отображения и соответствия. Понятия образа и прообраза. Инъекции, сюръекции и биекции. Композиция и обратное отображение.
4. Сравнение мощностей и понятие равномощности. Теорема Кантора-Бернштейна. Счётные и несчётные множества, их свойства.
5. Теорема Кантора. Отношения на множествах. Свойства бинарных отношений. Отношения эквивалентности, теорема о классах эквивалентности.
6. Отношения частичного и линейного порядка. Минимальные/максимальные и наименьшие/наибольшие элементы. Свойства упорядоченных множеств. Операции над упорядоченными множествами. Изоморфизмы упорядоченных множеств.
7. Логика высказываний. Булевы переменные и функции. Построение пропозициональных формул.
8. Вычисление значения формулы на наборе значений переменных. Таблицы истинности.
9. Тавтологии и противоречия. Приведение формул к КНФ и ДНФ. Многочлены Жегалкина.
10. Полные системы связок, теорема Поста.
11. Исчисление высказываний. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Корректность исчисления высказываний.
12. Лемма о дедукции. Полнота исчисления высказываний. Непротиворечивые и совместные семейства формул.
13. Теорема о компактности для пропозициональных формул.
14. Языки первого порядка. Понятие сигнатуры. Построение формул первого порядка: теоремы, атомарные формулы, логические связки и кванторы.
15. Параметры формулы. Понятие замкнутой формулы. Интерпретация сигнатуры. Истинность формулы в данной интерпретации на данной оценке.
16. Выполнимость и общезначимость формул первого порядка. Замена связанной переменной.
17. Предварённая нормальная форма. Выражение предикатов в данной интерпретации формулами первого порядка.
18. Изоморфизмы и автоморфизмы интерпретаций. Примеры невыразимых предикатов.
19. Метод элиминации кванторов. Элементарная эквивалентность интерпретаций. Игры Эренфойхта.
20. Исчисление предикатов и теория моделей. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов.
21. Правило обобщения. Лемма о дедукции для исчисления предикатов. Корректность исчисления предикатов.
22. Непротиворечивые и совместные теории.
23. Теории и модели. Полные и экзистенциально полные теории. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Семантическое следование.
24. Теорема Мальцева о компактности.
25. Неклассические логики. Интуиционистское исчисление высказываний.
26. Конструктивное понимание логических связок. Модели Крипке. Модальная логика.
27. Системы аксиом для модальных логик. Семантика Крипке.
28. Формальные языки. Языки и грамматики. Иерархия Хомского.
29. Детерминированные и недетерминированные конечные автоматы. Лемма о разрастании.
30. Регулярные выражения. Контекстно-свободные грамматики.

Критерии оценивания

оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений

оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Дифференцированный зачет проводится в устной форме.

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 20 минут на подготовку. Опрос обучающегося проводится в течение 30 минут.

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.