

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Математическая теория финансов
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра междисциплинарного анализа социально-экономических процессов
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.В. Куликов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры междисциплинарного анализа социально-экономических процессов 29.03.2023

Аннотация

Данный курс посвящен введению в современную теорию финансовых рынков и применение к ним основ финансовой математики. Основными «колоннами» финансовой математики являются: оптимальное распределение ресурсов; нахождение справедливых цен финансовых инструментов; измерение рисков и управление ими.

В курсе рассматриваются следующие вопросы:

- введение базовых объектов теории финансов;
- введение мер риска и их использование для решения различных задач теории финансов;
- рассмотрение базовых объектов финансовой математики (фундаментальной и рыночной цены финансовых активов, первичных финансовых инструментов (акций и облигаций), а также производных финансовых инструментов (форвардов, фьючерсов, свопов, различных видов опционов);
- нахождение цен различных финансовых инструментов, используя теорию арбитража в общей модели, колл-пут паритет, цены имеющихся на рынке опционов и т.д.;
- описание и нахождение справедливых цен различных производных ценных бумаг для моделей, часто используемых в финансовой математике.

В качестве задач также будут рассмотрены вопросы, часто задаваемые на собеседованиях в финансовых организациях, а также методы, используемые для оценки риска и нахождения цен финансовых инструментов.

Вероятностные методы имеют широчайшее применение в этой области, поэтому в курсе также будут введены и рассмотрены важные элементы теории мартингалов и выпуклого анализа, а именно, условные математические ожидания, теория мартингалов.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Математическая теория финансов» направлена на обучение основам финансовой математики и вероятностным методам, которые имеют широчайшее применение в этой области.

Задачи дисциплины

- Научиться оперировать с базовыми объектами финансовой математики;
- заложить основы теории условных математических ожиданий, теории мартингалов и приобрести навык нахождения интервалов справедливых цен различных платежных поручений (форвардов, фьючерсов и различных видов опционов);
- получить представление о базовых моделях, используемых для нахождения этих справедливых цен;
- научиться технике выпуклого анализа, используемой при доказательстве фундаментальной теоремы теории арбитража (ФТТА);
- заложить основы теории САРМи основы решения некоторых оптимизационных задач в рамках этой теории;
- рассмотреть основы теории мер риска.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
	ОПК-3.6 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте

ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области информатики и вычислительной техники, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен разрабатывать и модернизировать программное и аппаратное обеспечение информационных и автоматизированных систем
	ОПК-3.3 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-3.4 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ОПК-5 Способен и готов к профессиональному росту и руководству коллективом в области информатики и вычислительной техники, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.1 Способен работать в коллективе, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- экономические основы теории арбитража и риск-менеджмента; основные финансовые инструменты, используемые на финансовых рынках; основы теории CAPM, определение и особенности использования на финансовых рынках коротких продаж; основы диверсификации Марковитца.

уметь:

- находить условные математические ожидания, оперировать с мартингалами, находить справедливые цены и хеджирующие стратегии для различных платежных поручений, оценивать риск различных финансовых позиций с помощью $V@R$ и когерентных мер риска.

владеть:

- основами выпуклого анализа, используемыми при доказательстве фундаментальных теорем теории арбитража; техникой, используемой при нахождении интервалов справедливых цен и хеджирующих стратегий в различных моделях, используемых в математической теории финансов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Финансы и финансовая система	4	4		10
2	Введение финансовых инструментов	4	4		10

3	Теория CAPM	6	6		10
4	Условное математическое ожидание и введение в теорию мартингалов	4	4		5
5	Рассмотрение теории арбитража в одношаговой модели	6	6		5
6	Введение в теорию мер риска	6	6		5
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Финансы и финансовая система

Задачи финансовой системы, 3 колонны финансовой математики (размещение ресурсов, нахождение стоимости активов и управление рисками). Фундаментальная и рыночная цена финансовых активов. Принцип гиперболы в финансовой математике. Определение дисконтирования.

2. Введение финансовых инструментов

Первичные финансовые инструменты (акции и облигации). Производные финансовые инструменты (форварды, фьючерсы, свопы, различные виды опционов) и примеры нахождения их цен. Колл-пут паритет и его использование при нахождении справедливых цен различных опционов.

3. Теория CAPM

Диверсификация Марковитца, определение и использование коротких продаж, задача среднедисперсионного анализа, введение CML, тангенциального портфеля и применение теории CAPM к нахождению фундаментальной стоимости акций.

4. Условное математическое ожидание и введение в теорию мартингалов

Введение условного математического ожидания и его свойства. Определение мартингала и примеры.

5. Рассмотрение теории арбитража в одношаговой модели

Определение отсутствия арбитража, доказательство 1-ой и 2-ой фундаментальной теоремы теории арбитража. Введение интервалов справедливых цен производных финансовых инструментов и примеры их нахождения.

6. Введение в теорию мер риска

$V@R$ как первая мера риска. Недостатки $V@R$. Свойства мер риска (диверсификация, положительная однородность, отношение частичного порядка, инвариантность относительно сдвига, инвариантность по распределению). Введение когерентных, выпуклых мер риска и их примеры.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером, возможностью онлайн-передачи информации и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Основы передачи дискретных сообщений [Текст] : учебник для вузов / Ю. П. Куликов [и др.] ; под ред. В. М. Пушкина. — М : Радио и связь, 1992. — 288 с.: ил. - Библиогр.: с. 287. - 2800 экз. - ISBN 5-256-01023-9 (в пер.).

Фонд литературы базовой кафедры:

Основы математической теории финансов - Куликов А.В.

Дополнительная литература

Фонд литературы базовой кафедры:

Финансовая математика [Текст] : учебник для вузов по спец. "Финансы и кредит", "Бухгалтерский учет" / Е. М. Четыркин ; Акад. нар. хозяйства при Правительстве РФ, Ин-т мировой экономики и междунар. отношений РАН. — 9-е изд. — М. : Дело, 2010

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Различные Internet-источники, публикующие отчетность финансовых компаний (www.troika.ru, ...), а также сайты бирж, публикующие информацию о ходе торгов на финансовые инструменты (www.micex.ru, www.dowjones.com, ...).

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Различные Internet-источники, публикующие отчетность финансовых компаний (www.troika.ru) а также сайты бирж, публикующие информацию о ходе торгов на финансовые инструменты (www.micex.ru, www.dowjones.com)

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

Литература для самостоятельной работы студента:

1. З. Боди, Р. Мертон, «Финансы», Москва: Вильямс, 2003.

2. С.В. Жуленев, «Стохастическая финансовая математика. Финансовые рынки в дискретном случае. Курс лекций», Москва, МГУ, 2007.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра междисциплинарного анализа социально-экономических процессов
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
Разработчик:	А.В. Куликов, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-3 Способен выбирать и (или) разрабатывать подходы к решению типовых и новых задач в области информатики и вычислительной техники, учитывая особенности и ограничения различных методов решения	ОПК-3.6 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте
	ОПК-3.1 Способен анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Способен разрабатывать и модернизировать программное и аппаратное обеспечение информационных и автоматизированных систем
	ОПК-3.3 Способен использовать исследовательские методы при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-3.4 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области математики, естественных наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ОПК-5 Способен и готов к профессиональному росту и руководству коллективом в области информатики и вычислительной техники, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.1 Способен работать в коллективе, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математическая теория финансов» обучающийся должен:

знать:

- экономические основы теории арбитража и риск-менеджмента; основные финансовые инструменты, используемые на финансовых рынках; основы теории CAPM, определение и особенности использования на финансовых рынках коротких продаж; основы диверсификации Марковитца.

уметь:

- находить условные математические ожидания, оперировать с мартингалами, находить справедливые цены и хеджирующие стратегии для различных платежных поручений, оценивать риск различных финансовых позиций с помощью $V@R$ когерентных мер риска.

владеть:

- основами выпуклого анализа, использующимися при доказательстве фундаментальных теорем теории арбитража; техникой, используемой при нахождении интервалов справедливых цен и хеджирующих стратегий в различных моделях, используемых в математической теории финансов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примерный перечень вопросов для самостоятельной работы и проработки изученного материала.

1. Рынок и его участники. Финансовая система. Виды активов.
2. Задачи и колонны финансовой математики (определение и примеры).
3. Дисконтирование в дискретном времени (безрисковая % ставка, чистая дисконтированная стоимость, темпы инфляции, реальная % ставка).
4. Дисконтирование в непрерывном времени. (безрисковая % ставка, дисконтированная выплата, темпы инфляции, реальная процентная ставка, рыночная норма капитализации).
5. Расчет фундаментальной стоимости акций через ее предполагаемые дивиденды. Непостоянная процентная ставка, форвардная и мгновенная % ставки. Расчет цен облигации через % ставки.
6. Форварды, фьючерсы, свопы и нахождение их справедливых цен.
7. Европейские и американские опционы колл и пут и нахождение интервалов справедливых цен.
8. Диверсификация Марковитца, норма прибыли, постановка задачи среднedisперсионного анализа.
9. Решение задачи среднedisперсионного анализа для одношаговой модели и для 1 акции на бесконечном временном горизонте.
10. Capital Market Line, тангенциальный портфель и решение задачи среднedisперсионного анализа для модели с рисковыми активами и с безрисковым активом.
11. Линия доходности как связь нормы прибыльности i -ой акции и рыночного портфеля.
12. Условное математическое ожидание и мартингалы. Определение, свойства и примеры.
13. Примеры соображения безарбитражности.
14. Определение отсутствия арбитража в одношаговой модели и доказательство ФТТА.
15. Справедливые цены платежных поручений в одношаговой модели и способы их нахождения.
16. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна как простейший пример многошаговой модели и нахождение справедливых цен платежных поручений в данной модели.

Вариативные задания

1. Связь между форвардной, обычной и мгновенной % ставками.
2. Пусть $d(t)$ непрерывно начисляемый по акции дивиденд такой, что $V(t)$ (цена облигации) = 1. Найти связь между $d(t)$ и $r(t)$.
3. Зависимость цен опционов от S_0 , K и t .
4. Выпуклость границы эффективных портфелей в теории CAPM.
5. Единственность тангенциального портфеля в теории CAPM.
6. Парадоксы теории CAPM и способы их разрешения.
7. Примеры немарковского мартингала, а также мартингала, но не процесса с независимыми приращениями.
8. Неравенство Йенсена для условных математических ожиданий и его следствия.
9. Полнота в одношаговой модели.
10. Разложение Дуба в дискретном времени и его следствия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Дисконтирование в дискретном времени (безрисковая % ставка, чистая дисконтированная стоимость, темпы инфляции, реальная % ставка).
2. Дисконтирование в непрерывном времени (безрисковая % ставка, дисконтированная выплата, темпы инфляции, реальная процентная ставка, рыночная норма капитализации).
3. Расчет фундаментальной стоимости акций через ее предполагаемые дивиденды. Непостоянная процентная ставка, форвардная и мгновенная % ставки. Расчет цен облигации через % ставки.
4. Форварды, фьючерсы, свопы и нахождение их справедливых цен.

5. Европейские и американские опционы колл и пут и нахождение интервалов справедливых цен.
6. Условное математическое ожидание и мартингалы. Определение, свойства и примеры.
7. Примеры соображения безарбитражности.
8. Определение отсутствия арбитража в одношаговой модели и доказательство ФТТА.
9. Справедливые цены платежных поручений в одношаговой модели и способы их нахождения.
10. Основы теории измерения риска.
11. Виды риска: рыночные, кредитные, операционные и способы их оценивания.
12. $V@R$, Tail $V@R$ как риск-меры и их свойства.
13. Моделирование цены свопа или спреда на валютном рынке.
14. Геометрическое броуновское движение как модель, дающая единственную справедливую цену для вторичных финансовых инструментов.

Билет 1:

1. Парадоксы теории CAPM и способы их разрешения.
2. Примеры немарковского мартингала, а также мартингала, но не процесса с независимыми приращениями.

Билет 2

1. Неравенство Йенсена для условных математических ожиданий и его следствия.
2. Полнота в одношаговой модели.

Критерии оценивания

- отлично (10) - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- отлично (9) - выставляется студенту, показавшему свободное оперирование знаниями учебной программы дисциплины, выполнение заданий творческого характера;
- отлично (8) - выставляется студенту, показавшему владение программным учебным материалом с наличием несущественных ошибок в действиях, самостоятельно исправляемых учащимся;
- хорошо (7) - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и, по существу, излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускается в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- хорошо (6) - выставляется студенту если он осознает воспроизведение программного учебного материала, в том числе и различной степени сложности, с несущественными ошибками, затруднения в применении отдельных навыков;
- хорошо (5) - выставляется студенту если теоретическое содержание освоено не полностью, некоторые практические навыки сформированы недостаточно, в некоторых случаях были допущены ошибки;
- удовлетворительно (4) - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- удовлетворительно (3) - выставляется студенту в случае большого количества недочетов и неправильных ответов, а также пассивной работе в ходе занятий, многие учебные задания не выполнены;

- неудовлетворительно (2) - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

- неудовлетворительно (1) - выставляется студенту, который не освоил теоретическое и практическое содержание курса, все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой.