

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Основы комбинаторики и теории чисел
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	А1360: Передовые методы искусственного интеллекта Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

Курс читается в первом году и служит весьма основательным введением как в теорию множеств, так и в комбинаторику, и в теорию чисел. Основная цель курса — заложить основу для изучения курсов дискретной математики, теории кодирования, криптографии и приложений в computer science, анализах сложных сетей, алгебры. При этом курс является неплохим введением в комбинаторику и теорию чисел, рассматривается несколько уникальных тем: теория обращения Мёбиуса, диаграммы Юнга, производящие функции, распределение простых чисел, приложения к геометрии чисел, начала аналитической теории чисел.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение основных современных методов экстремальной комбинаторики (ЭК): вероятностного метода, линейно-алгебраического метода, топологического метода.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области ЭК;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области ЭК;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических ис-следований в области ЭК.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики – ЭК;
- современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики (ЭК);
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла ЭК;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики (ЭК).

уметь:

понять поставленную задачу;  
 использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ЭК;  
 оценивать корректность постановок задач;  
 строго доказывать или опровергать утверждение;  
 самостоятельно находить алгоритмы решения задач ЭК, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
 самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
 точно представить математические знания в области ЭК в устной и письменной форме.

владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ЭК ( в том числе, сложных);  
 навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
 культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ЭК;  
 предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Задачи о разбиениях чисел на слагаемые. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Рекуррентные формулы.	3	3		6
2	Понятия множества и подмножества, простейшие операции над множествами.	4	4		6
3	Применение формулы обращения Мёбиуса для подсчета числа циклических последовательностей.	4	4		5
4	Простые числа.	4	4		5
5	Свойства упорядоченных множеств.	4	4		6
6	Сравнение мощностей и понятие равномощности.	4	4		6
7	Суммы, распространенные на делители числа.	4	4		5
8	Формула включения и исключения.	3	3		6
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Задачи о разбиениях чисел на слагаемые. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Рекуррентные формулы.

Количество всех упорядоченных разбиений на произвольные слагаемые. Диаграммы Юнга. Теоремы Эйлера о равенстве количеств неупорядоченных разбиений.

2. Понятия множества и подмножества, простейшие операции над множествами.

Упорядоченные пары и кортежи, декартово произведение.

3. Применение формулы обращения Мёбиуса для подсчета числа циклических последовательностей.

Циклические последовательности с фиксированным количеством сим-волов каждого типа.

4. Простые числа.

Бесконечность множества простых. Основная теорема арифметики с доказательством.

5. Свойства упорядоченных множеств.

Операции над упорядоченными множествами. Изоморфизмы упорядоченных множеств.

6. Сравнение мощностей и понятие равномощности.

Теорема Кантора-Бернштейна. Счётные и несчётные множества. Теорема Кантора.

7. Суммы, распространенные на делители числа.

Функция Мёбиуса.

8. Формула включения и исключения.

Знакопеременные тождества.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Стандартная учебная аудитория.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

3. Основы комбинаторики и теории чисел [Текст] : сборник задач : учеб. пособие для вузов / А. А. Глибичук [и др.] .— Долгопрудный : Изд. Дом "Интеллект", 2015 .— 104 с. - Предм. указ.: с. 101-102. - Библиогр.: с.103. - 500 экз. - ISBN 978-5-91559-201-7 .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

### **Дополнительная литература**

1. Комбинаторика и теория вероятностей [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— Долгопрудный : Интеллект, 2013 .— 104 с. - Библиогр.: с. 99. - 3000 экз. - ISBN 978-5-91559-147-8 .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru>

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Не предусмотрено.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	АІ360: Передовые методы искусственного интеллекта Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Основы комбинаторики и теории чисел» обучающийся должен:

### знать:

фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики – ЭК;  
современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики (ЭК);  
понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла ЭК;  
основные свойства соответствующих математических объектов;  
аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики (ЭК).

### уметь:

понять поставленную задачу;  
использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач ЭК;  
оценивать корректность постановок задач;  
строго доказывать или опровергать утверждение;  
самостоятельно находить алгоритмы решения задач ЭК, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;  
самостоятельно видеть следствия полученных результатов;  
точно представить математические знания в области ЭК в устной и письменной форме.

### владеть:

навыками освоения большого объема информации и решения задач ЭК ( в том числе, сложных);  
навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;  
культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов ЭК;  
предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлой лекции или в конце занятия по пройденной теме.

Темы для курсовой:

- Докажите, что объединение двух счётных множеств счётно.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

Вопросы к экзамену:

- Приведите пример соответствия, которое обладает следующими свойствами:

а) сюръективное, не инъективное, не отображение;

б) не сюръективное, инъективное, не отображение; в) не сюръективное, не инъективное, отображение.

- Сформулируйте определяющие свойства соответствий, обратных к инъективным и к сюръективным.

- Соответствие является одновременно инъективным и сюръективным. Обязательно ли оно является биекцией?

- Докажите, что композиция отображений, инъективных соответствий, сюръективных соответствий и биекций является отображением, инъективным соответствием, сюръективным соответствием, биекцией соответственно.

Пример экзаменационного билета:

Билет №1

1. Покажите, что в любом бесконечном множестве найдётся счётное подмножество.
2. Докажите, что любое подмножество счётного множества не более чем счётно.

#### **Критерии оценивания**

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;



- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.