

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Численные методы оптимизации
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	А1360: Передовые методы искусственного интеллекта Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составил: А.В. Гасников, д-р физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 12.02.2024

Аннотация

Курс посвящён численным алгоритмам решения различных классов задач оптимизации в конечномерных пространствах. Рассматриваются численные методы решения задач одномерной и безусловной оптимизации. Приводятся также численные методы решения задач условной оптимизации, включая, в частности, задачи линейной, квадратичной и выпуклой оптимизации. Обсуждаются композитная оптимизация, стохастическая оптимизация, распределённая и рандомизированная оптимизация, методы штрафных функций.

Особо выделяются приемы, с помощью которых порождается многообразие современных численных методов выпуклой оптимизации первого порядка (рестарты, регуляризация, переход к двойственной задаче, адаптивная настройка на гладкость задачи и т.д.).

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение методов решения различных оптимизационных задач в конечномерных пространствах.

Задачи дисциплины

- овладение студентами начальными сведениями по теории численных методов решения задач оптимизации;
- приобретение теоретических знаний по условиям оптимальности для задач безусловной и условной оптимизации, линейного и выпуклого программирования;
- ознакомление студентов с основными современными методами решения конечномерных оптимизационных задач;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических и экспериментальных исследований в области решения практических оптимизационных задач, в том числе с привлечением пакетов оптимизации.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- фундаментальные понятия и основные теоретические результаты в области теории и методов оптимизации в конечномерных пространствах;
- современные проблемы соответствующих разделов численных методов решения оптимизационных задач;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла «Численные методы оптимизации»;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных оптимизационных задач.

уметь:

- понять поставленную оптимизационную задачу и провести ее формализацию;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных оптимизационных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждения;
- самостоятельно находить алгоритмы решения оптимизационных задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представлять математические знания в области численных методов оптимизации в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками решения оптимизационных задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых разделов методов оптимизации;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов оптимизации;
- предметным языком теории и методов оптимизации, навыками грамотного описания решения соответствующих задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Понятие о численных методах оптимизации.	2	2		3
2	Невыпуклая оптимизация.	4	4		6
3	Двойственная задача.	2	2		5
4	Унимодальные функции одной переменной.	2	2		2
5	Способы выбора шага в методах.	3	3		3
6	Задачи оптимизации на множествах простой структуры.	2	2		4
7	Концепция (неточной) модели функции.	2	2		2
8	Метод Ньютона.	3	3		2
9	Стохастическая оптимизация.	2	2		5
10	Общая схема метода штрафных функций.	4	4		8
11	Численные методы оптимизации на службе статистики и машинного обучения.	4	4		5

Итого часов	30	30		45
Подготовка к экзамену	30 час.			
Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

1. Понятие о численных методах оптимизации.

Метод градиентного спуска.

Сложность задач оптимизации.

Сильно выпуклые задачи, выпуклые (вырожденные) задачи, невыпуклые задачи.

Гладкие, негладкие задачи.

Регуляризация и рестарты.

О возможности вычислять градиент и автоматическом дифференцировании.

Приложение к задаче оптимального управления.

2. Невыпуклая оптимизация.

Условие Поляка-Лоясиевича (ПЛ) и глобальная сходимость градиентного спуска.

Пример: сведение решения системы нелинейных уравнений к задаче оптимизации с условием ПЛ.

Сходимость градиентного спуска к локальному экстремуму.

Принцип множителей Лагранжа и теорема о неявной функции.

Основные факты выпуклой оптимизации.

Принцип множителей Лагранжа и теорема об отделимости точки от выпуклого множества гиперплоскостью (без доказательства).

3. Двойственная задача.

Слабая и сильная двойственность для задач выпуклой оптимизации.

Теорема о минимаксе (Фон Неймана, Сион-Какутани) (без доказательства).

Седловые задачи.

Коническая двойственность.

Теоремы об альтернативах (Фаркаш) и их следствия (основная теорема финансовой математики об отсутствии арбитража; робастная оптимизация).

Понятие о прямо-двойственных методах на примере решения задачи минимизации выпуклого сепарабельного функционала с аффинными ограничениями с помощью перехода к двойственной задаче и ее решения методом градиентного спуска.

4. Унимодальные функции одной переменной.

Методы одномерной минимизации (метод дихотомии, метод золотого сечения, метод Фибоначчи).

Задача о распределении ресурсов.

Методы маломерной оптимизации: метод центров тяжести, метод эллипсоидов.

5. Способы выбора шага в методах.

Наискорейший спуск.

Правило Армихо и правило Голдстейна.

Адаптивный способ выбора шага.

Сопряженные направления.

Метод сопряженных градиентов для минимизации квадратичных функций.

Метод сопряженных градиентов для решения задач выпуклой оптимизации.

Метод тяжелого шарика Поляка.

Ускоренный градиентный метод (в разных вариантах: линейный каплинг, метод подобных треугольников).

Новый ускоренный градиентный метод (на базе метода линейного каплинга) с одномерными минимизациями.

6. Задачи оптимизации на множествах простой структуры.

Дивергенция Брэгмана.

Метод проекции (суб-)градиента, метод зеркального спуска.

Метод условного градиента (Франк-Вульфа).

Пример задачи минимизации разреженной квадратичной формы на единичном симплексе.

7. Концепция (неточной) модели функции.

Композитная оптимизация.

Универсальный градиентный спуск и его ускоренный вариант. Проксимальный градиентный спуск.

Ускоренный проксимальный метод (в варианте Монтейро-Свайтера). Каталист - общий способ ускорения различных неускоренных методов.

8. Метод Ньютона.

Метод Ньютона с кубической регуляризацией.

Тензорные методы.

Ускоренные тензорные методы.

9. Стохастическая оптимизация.

Минибатчинг и распараллеливание.

Рандомизированные методы на примере покомпонентных и безградиентных методов.

Задача минимизации суммы функций.

10. Общая схема метода штрафных функций.

Метод модифицированной функции Лагранжа.

Методы внутренней точки.

Понятие самосогласованного барьера.

Методы параметризации целевых функций.

Методы отслеживания центральной траектории.

11. Численные методы оптимизации на службе статистики и машинного обучения.

Принцип максимального правдоподобия и метод Поляка-Юдицкого, адаптивные методы стохастической оптимизации.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

Численные методы оптимизации [Текст] : [учеб.пособие для вузов] / А.Ф.Измайлов, М.В.Солодов .— М. : Физматлит, 2003, 2005 .— 304 с.

Курс методов оптимизации [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] .— 2-е изд. — М. : Физматлит, 2005, 2008 .— 367 с.

Дополнительная литература

Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи [Текст] : учебник для вузов / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров ; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова] .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2005 .— 256 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.mou.mipt.ru>

<http://life-prog.ru/optimization/php>

<http://www.optimization-on-line.org/>

<http://simplemax.net/>

<http://www.convexoptimization.com/>

<http://www.mou.mipt.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекциях используется компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, звуковая система),

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

Успешное освоение дисциплины требует:

- посещения студентом всех видов аудиторных занятий;
- ведения конспекта в ходе лекционных занятий;
- качественной самостоятельной подготовки к практическим занятиям, активной работы на них;
- активной самостоятельной и аудиторной работы студента;
- своевременной сдачи преподавателю заданий по аудиторным видам работ.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: АІ360: Передовые методы искусственного интеллекта
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра математических основ управления
курс: 2
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

Разработчик: А.В. Гасников, д-р физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Численные методы оптимизации» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия и основные теоретические результаты в области теории и методов оптимизации в конечномерных пространствах;
- современные проблемы соответствующих разделов численных методов решения оптимизационных задач;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла «Численные методы оптимизации»;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных оптимизационных задач.

уметь:

- понять поставленную оптимизационную задачу и провести ее формализацию;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных оптимизационных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждения;
- самостоятельно находить алгоритмы решения оптимизационных задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представлять математические знания в области численных методов оптимизации в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками решения оптимизационных задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых разделов методов оптимизации;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов оптимизации;
- предметным языком теории и методов оптимизации, навыками грамотного описания решения соответствующих задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Объясните разницу между локальной и глобальной оптимизацией. Какие методы используются для решения каждой из этих задач?

2. Что такое функциональная оптимизация? Приведите примеры функций, которые подлежат оптимизации, и объясните, почему это важно в различных областях.
3. Опишите метод градиентного спуска. Как он используется для поиска минимума функции? Какие проблемы могут возникнуть при его применении?
4. Что такое методы безусловной оптимизации? Какие численные методы используются для решения задач безусловной оптимизации? Приведите примеры.
5. Объясните методы условной оптимизации. Какие алгоритмы эффективно решают задачи условной оптимизации? Приведите конкретные примеры применения.
6. Что такое выпуклые и невыпуклые функции? Какие методы оптимизации применяются для каждого из этих случаев?
7. Как работают методы многомерной оптимизации? Какие основные методы применяются для оптимизации функций с несколькими переменными?
8. Что такое эволюционные алгоритмы в численной оптимизации? Как они отличаются от классических численных методов? Приведите примеры их применения.
9. Объясните, что такое методы глобальной оптимизации, например, метод случайного поиска, метод имитации отжига или метод частиц. Как они работают и в каких случаях их целесообразно применять?
10. Какие численные методы можно использовать для решения задач оптимизации в условиях неопределенности или наличия шума в данных? Приведите примеры их применения.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Какие основные типы задач оптимизации существуют? Дайте краткое описание каждого типа и примеры реальных приложений.
2. Что такое условная оптимизация? Какие методы используются для решения задач условной оптимизации?
3. Объясните метод Ньютона для одномерной оптимизации. Как он работает и какие могут быть ограничения его применения?
4. Какие численные методы оптимизации широко используются в машинном обучении и искусственном интеллекте? Приведите примеры конкретных алгоритмов и их применения.
5. Что такое методы стохастической оптимизации? В чем их отличия от детерминированных методов и в каких случаях они предпочтительны?
6. Какие методы численной оптимизации применяются в финансовой аналитике? Какие особенности данных задач и какие методы наиболее эффективны?
7. Какие существуют методы для оптимизации функций с распределенными параметрами (безгладкие функции)? Приведите примеры таких методов и их применение.
8. Какие методы используются для решения многокритериальных задач оптимизации? Как происходит выбор оптимального решения в таких случаях?
9. Какие численные методы эффективны для решения задач оптимизации с большим количеством переменных? Какие вызовы возникают при таких задачах?
10. Объясните методы оптимизации, основанные на машинном обучении, например, генетические алгоритмы или методы глубокого обучения. Как они используются для решения задач оптимизации?
11. Каковы основные принципы исследования и оптимизации функций с помощью вычислительных экспериментов и симуляций?
12. Какие методы численной оптимизации применяются в инженерных расчетах и проектировании? Какие особенности этих методов в контексте технических приложений?
13. Что такое линейное программирование и какие методы используются для его решения? Приведите примеры приложений линейного программирования.
14. Какие численные методы используются для оптимизации временных рядов или последовательных данных? Как происходит адаптация классических методов для таких задач?
15. Какие существуют методы оптимизации с распределенными вычислениями? Как они применяются в контексте параллельных и распределенных вычислений для решения больших задач оптимизации?

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Объясните метод Ньютона для одномерной оптимизации. Как он работает и какие могут быть ограничения его применения?
2. Какие численные методы эффективны для решения задач оптимизации с большим количеством переменных? Какие вызовы возникают при таких задачах?

Билет №2

1. Какие существуют методы оптимизации с распределенными вычислениями? Как они применяются в контексте параллельных и распределенных вычислений для решения больших задач оптимизации?
2. Какие основные типы задач оптимизации существуют? Дайте краткое описание каждого типа и примеры реальных приложений.

Критерии оценивания

Оценка "Отлично" (10) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продemonстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы, код оформлен в едином удобочитаемом стиле.

Оценка "Отлично" (9) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продemonстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы.

Оценка "Отлично" (8) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продemonстрирован грамотный подход к решению задач.

Оценка "Хорошо" (7) - полностью решены все задачи. Допущены несущественные ошибки.

Оценка "Хорошо" (6) - полностью решено большинство задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Хорошо" (5) - полностью решено две трети задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Удовлетворительно" (4) - полностью решено более половины задач. В остальных задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Удовлетворительно" (3) - полностью решено более половины задач.

Оценка "Неудовлетворительно" (2) - решено менее половины задач.

Оценка "Неудовлетворительно" (1) - не решено ни одной задачи.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины и (или) путем организации специального опроса, проводимого в устной и (или) письменной форме.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету не должен превышать одного астрономического часа.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, конспектами лекций или другими материалами.