

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Вычислительная линейная алгебра
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	А1360: Передовые методы искусственного интеллекта Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: Ю.П. Бибило, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 12.02.2024

## Аннотация

Курс направлен на ознакомление студентов третьего курса со стандартными задачами вычислительной линейной алгебры (ВЛА) и, связанными с ними алгоритмами, оценками погрешностей вычислений и теоремами линейной алгебры. Эти задачи относятся к трем темам: решение линейных алгебраических систем с невырожденной квадратной матрицей (метод LU разложения, метод Холецкого), линейная задача наименьших квадратов (методы, связанные с вычислением QR разложения, сингулярные разложения), и сингулярные задачи (итерационные методы вычисления собственного значения, разложения Шура).

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Дать представление об основных алгоритмах вычислительной алгебры и их обоснования.

#### Задачи дисциплины

- обучить студентов основным алгоритмам вычислительной линейной алгебры вместе с их строгим математическим обоснованием;
- научить оценивать достоинства и недостатки алгоритмов при решении задачи с точки зрения их точности и затратности;
- научить реализовывать эти алгоритмы в пакете Matlab.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные задачи, алгоритмы и теоремы вычислительной линейной алгебры.

уметь:

- применять алгоритмы вычислительной линейной алгебры;
- оценивать сложность и погрешность алгоритмов;
- реализовывать алгоритмы с помощью пакета Matlab.

владеть:

- навыком отыскания оптимального пути решения задачи;
- навыками оценки необходимых затрат машинного времени для решения поставленной задачи.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Введение.	3	3		3
2	Итеративные методы для решения линейных систем.	3	3		3
3	Линейные системы общего вида.	3	3		3
4	Линейные системы специального вида.	3	3		3
5	Метод наименьших квадратов.	3	3		3
6	Методы Крыловского типа.	3	3		3
7	Несимметричная проблема собственных значений.	3	3		3
8	Предобуславливание.	4	4		4
9	Симметричная проблема собственных значений.	5	5		5
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

##### 1. Введение.

Типичные задачи вычислительной линейной алгебры. Матричный анализ. Теория возмущений и числа обусловленности. Вычисления с конечной точностью. Анализ сложности алгоритмов. Краткий обзор программных библиотек (BLAS, LAPACK).

##### 2. Итеративные методы для решения линейных систем.

Необходимость итеративных методов. Стандартные итерации. Метод сопряженных градиентов. Связь с методом Ланцоша. GMRES.

##### 3. Линейные системы общего вида.

Треугольные системы. LU-разложение. Анализ ошибок округления. Улучшения алгоритма.

##### 4. Линейные системы специального вида.

Симметричные положительно определенные матрицы. Симметричные неопределенные матрицы. Ленточные матрицы. Разреженные матрицы. LDMT и LDLT разложения.

##### 5. Метод наименьших квадратов.

Ортогональные матрицы. Матрицы Хаус-холдера и Гивенса. QR-разложение. SVD-разложение. Сравнение эффективности методов.

##### 6. Методы Крыловского типа.

Крыловские подпространства. Метод Арнольди. Метод Ланцоша для эрмитовых матриц. Сходимость процесса Ланцоша. Сходимость процесса Арнольди. Практическая реализация метода Ланцоша в неточной арифметике. Библиотека ARPACK.

#### 7. Несимметричная проблема собственных значений.

Свойства и разложения. Хессенбергова форма и форма Шура. Теория возмущений. Степенной метод. Обратный метод. Устойчивый QR метод. QR метод с неявными сдвигами. Сравнение производительности и точности методов.

#### 8. Предобуславливание.

Необходимость предобуславливания при решении линейных систем и задач на собственные значения. ILU и IC предобуславливатели. Обращение и сдвиг. Полиномиальное предобуславливание. Метод Давидсона.

#### 9. Симметричная проблема собственных значений.

Симметричный QR. SVD. Методы Якоби. Метод "разделяй и властвуй". Сравнение производительности и точности методов.

### **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

### **6. Перечень рекомендуемой литературы**

#### Основная литература

Фонд базовой кафедры:

1. Линейная алгебра и некоторые ее приложения [Текст] : учебное пособие для втузов : доп. М-вом высш. и сред. спец. образов. СССР / Л. И. Головина .— М. : Наука, 1971 .— 288 с.
2. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. Мир, 1999. — 548 с.
3. Saad Y. Numerical Methods for Large Scale Eigenvalue problems. 1992. — 358 p. [имеется в библиотечном фонде кафедры]
4. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. Мир, 2001. — 435 с.
5. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. SIAM, 2003. — 528 с. [имеется в библиотечном фонде кафедры]

#### Дополнительная литература

Фонд базовой кафедры:

Матричные вычисления [Текст] = Matrix Computations : [учеб. пособие для вузов] / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун ; пер. с англ. Ю. М. Нечепуренко и др. ; под ред. В. В. Воеводина .— М. : Мир, 1999 .— 548 с.

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

Не используются

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Методические рекомендации позволяют студенту оптимальным образом организовать процесс обучения. В структуре учебного плана значительное время отводится на самостоятельное изучение данной дисциплины. В рабочей программе приведено примерное распределение часов аудиторной и внеаудиторной нагрузки по различным темам данной дисциплины.

Успешное освоение дисциплины требует:

- посещения студентом всех видов аудиторных занятий;
- ведения конспекта в ходе лекционных занятий;
- качественной самостоятельной подготовки к практическим занятиям, активной работы на них;
- активной самостоятельной и аудиторной работы студента;
- своевременной сдачи преподавателю заданий по аудиторным видам работ.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** АІ360: Передовые методы искусственного интеллекта  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра математических основ управления  
**курс:** 1  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** Ю.П. Бибило, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Вычислительная линейная алгебра» обучающийся должен:

### знать:

- основные задачи, алгоритмы и теоремы вычислительной линейной алгебры.

### уметь:

- применять алгоритмы вычислительной линейной алгебры;
- оценивать сложность и погрешность алгоритмов;
- реализовывать алгоритмы с помощью пакета Matlab.

### владеть:

- навыком отыскания оптимального пути решения задачи;
- навыками оценки необходимых затрат машинного времени для решения поставленной задачи.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия или в конце занятия по пройденной теме.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Решение систем линейных уравнений методом гауссова исключения (LU-разложение).
2. Оценка чисел обусловленности линейных систем.
3. Системы с симметрической матрицей и ленточные системы. Разложение Холесского.
4. Линейная задача наименьших квадратов. Методы отражений Хаусхолдера и вращений Гивенса. QR-разложение.
5. Линейная задача наименьших квадратов. Синглярное разложение.
6. Проблема отыскания собственных значений. Формы Хессенберга и Шура. Отыскание собственных векторов с помощью формы Шура.
7. Степенной метод и метод обратных итераций. Нахождение формы Шура методами ортогональных итераций и QR-итераций.
8. Отыскание собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы: метод «разделяй и властвуй» и метод Якоби.
9. Нахождение сингулярного разложения с помощью алгоритмов нахождения собственных значений и собственных векторов симметричных матриц.

10. Системы с неявно заданной матрицей. Крыловские подпространства. Методы Арнольди и Ланцоша. Решение системы с помощью крыловских подпространств.

11. Итеративные методы.

#### Критерии оценивания

Оценка "Отлично" (10) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы, код оформлен в едином удобочитаемом стиле.

Оценка "Отлично" (9) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы.

Оценка "Отлично" (8) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач.

Оценка "Хорошо" (7) - полностью решены все задачи. Допущены несущественные ошибки.

Оценка "Хорошо" (6) - полностью решено большинство задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Хорошо" (5) - полностью решено две трети задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Удовлетворительно" (4) - полностью решено более половины задач. В остальных задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Удовлетворительно" (3) - полностью решено более половины задач.

Оценка "Неудовлетворительно" (2) - решено менее половины задач.

Оценка "Неудовлетворительно" (1) - не решено ни одной задачи.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Дифференцированный зачет может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины и (или) путем организации специального опроса, проводимого в устной и (или) письменной форме.

При проведении устного дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося на дифференцированном зачете не должен превышать одного астрономического часа.

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, конспектами лекций или другими материалами.