

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Элементы дифференциальных уравнений
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	А1360: Передовые методы искусственного интеллекта Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: С.М. Саулин, старший преподаватель

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 09.02.2023

## Аннотация

Дисциплина «Элементы дифференциальных уравнений» относится к базовой части ООП МФТИ.

Соответствующий курс полугодовой, читается в четвертом семестре. В конце 4-го семестра предусмотрен экзамен, включающий письменную и устную части.

Программа дисциплины содержит стандартные разделы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторые разделы из качественной теории дифференциальных уравнений.

Сведения и навыки, полученные в результате освоения данной дисциплины, используются в курсах уравнений математической физики, теоретической механики, при изучении других дисциплин математического и физического циклов.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

ознакомление слушателей с основами дифференциальных уравнений и подготовка к изучению других математических курсов – теории функций комплексного переменного, уравнений математической физики, оптимизации и оптимального управления, функционального анализа и др.

### Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических навыков в области решения простейших дифференциальных уравнений, линейных дифференциальных уравнений и систем, исследования задач Коши, построения и исследования фазовых траекторий автономных систем, нахождения первых интегралов;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов дифференциальных уравнений в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

## 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

Основные формулы общего и частного решения линейных систем и уравнений с постоянными коэффициентами, определение и свойства матричной экспоненты.

Условия существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений и для уравнения  $n$ -го порядка в нормальном виде.

Основные понятия и свойства фазовых траекторий автономных систем, классификацию положений равновесия линейных автономных систем второго порядка.

Понятие первого интеграла нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Структуру общего решения линейных систем с переменными коэффициентами, свойства определителя Вронского, формулу Лиувилля-Остроградского.

уметь:

Решать простейшие дифференциальные уравнения, применять методы понижения порядка.

Решать линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами, применять матричную экспоненту к решению систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Исследовать задачу Коши.

Находить положения равновесия, строить линеаризованные системы в окрестности положений равновесия, определять тип положения равновесия и строить фазовые траектории линейных систем второго порядка.

Применять формулу Лиувилля-Остроградского и метод вариации постоянных для решения уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

владеть:

Логическим мышлением, методами доказательств математических утверждений.

Навыками решения и исследования дифференциальных уравнений и систем в математических и физических приложениях.

Умением пользоваться необходимой литературой.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Линейные дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами, матричная экспонента.	6	8		8
2	Решения дифференциальных уравнений специального вида.	6	6		8
3	Исследование задачи Коши.	6	4		13
4	Автономные системы дифференциальных уравнений.	4	4		8
5	Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.	8	8		8
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

1. Линейные дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами, матричная экспонента.

Формула общего решения линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка. Квазимногочлены и их свойства. Отыскание решения линейного неоднородного в случае, когда правая часть уравнения является квазимногочленом. Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы коэффициентов системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы коэффициентов системы (без доказательства). Отыскание решения линейной неоднородной системы в случае, когда свободные члены уравнений являются вектор-квазимногочленами (без доказательства). Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем.

2. Решения дифференциальных уравнений специального вида.

Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Первые интегралы.

3. Исследование задачи Коши.

Теорема о локальном выпрямлении векторного поля. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений и для уравнения  $n$ -го порядка в нормальном виде. Теорема о продолжении решений нормальных систем.

4. Автономные системы дифференциальных уравнений.

Основные понятия и свойства фазовых траекторий автономных систем. Классификация положений равновесия линейных автономных систем уравнений второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия автономных нелинейных систем уравнений второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия автономных нелинейных систем уравнений второго порядка. Линеаризованная система дифференциальных уравнений.

5. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальных линейных систем уравнений и для уравнения  $n$ -го порядка в нормальном виде. Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы уравнений. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной системы уравнений. Определитель Вронского. Понятие фазового объема. Формула Лиувилля-Остроградского. Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная доской и мелом.

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

Основная литература

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Л. С. Понтрягин .— 6-е изд. — М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 1982, 2001 .— 400 с.
  2. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. К. Романко .— 2-е изд. — М. : Лаб. базовых знаний, 2000, 2001, 2002, 2006, 2011 .— 344 с.
  3. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко ; под ред. В. К. Романко .— М. : ЮНИМЕДИАСТАЙЛ : Физматлит, 2002, 2006 .— 256 с.
  4. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. Ф. Филиппов .— 6-е изд. — М. : ЛЕНАНД, 2015 .— 242 с
- Филиппов, А. Ф.  
Введение в теорию дифференциальных уравнений [Текст] : учебник для вузов / А. Ф. Филиппов .— 4-е изд. — М. : ЛЕНАНД, 2015 .— 240 с. — (Классический учебник МГУ). - Библиогр.: с. 234-236. - Предм. указ.: с. 237-239. - ISBN 978-5-9710-2029-5 (в пер.) .

Умнов, А. Е.

Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Е. Умнов, Е. А. Умнов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2016 .— 293 с. - Библиогр.: с. 287. - Предм. указ.: с. 288-292. - 200 экз. - ISBN 978-5-7417-0618-3 .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ).

Федорюк, М. В.

Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : учебник для вузов / М. В. Федорюк .— 3-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2003 .— 448 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 445-447. - 3000 экз. - ISBN 5-8114-0491-3 (в пер.)) .

#### Дополнительная литература

1. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] : [учебник для вузов] / И. Г. Петровский .— М. : Физматлит, 2009 .— 208 с.
2. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. К. Романко .— 2-е изд. — М. : Лаб. базовых знаний, 2000, 2001, 2002, 2006, 2011 .— 344 с.

### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. <http://lib.mipt.ru/catalogue/>— электронная библиотека Физтеха, раздел «Дифференциальные уравнения».
2. <http://www.exponenta.ru> — образовательный математический сайт.
3. <http://mathnet.ru> — общероссийский математический портал.
4. <http://www.edu.ru> — федеральный портал «Российское образование».
5. <http://benran.ru> —библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
6. <http://www.i-exam.ru> — единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, Scilab и др.

### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** АІ360: Передовые методы искусственного интеллекта  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра высшей математики  
**курс:** 2  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** С.М. Саулин, старший преподаватель

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Элементы дифференциальных уравнений» обучающийся должен:

### знать:

Основные формулы общего и частного решения линейных систем и уравнений с постоянными коэффициентами, определение и свойства матричной экспоненты.

Условия существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений и для уравнения  $n$ -го порядка в нормальном виде.

Основные понятия и свойства фазовых траекторий автономных систем, классификацию положений равновесия линейных автономных систем второго порядка.

Понятие первого интеграла нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Структуру общего решения линейных систем с переменными коэффициентами, свойства определителя Вронского, формулу Лиувилля-Остроградского.

### уметь:

Решать простейшие дифференциальные уравнения, применять методы понижения порядка.

Решать линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами, применять матричную экспоненту к решению систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Исследовать задачу Коши.

Находить положения равновесия, строить линеаризованные системы в окрестности положений равновесия, определять тип положения равновесия и строить фазовые траектории линейных систем второго порядка.

Применять формулу Лиувилля-Остроградского и метод вариации постоянных для решения уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

### владеть:

Логическим мышлением, методами доказательств математических утверждений.

Навыками решения и исследования дифференциальных уравнений и систем в математических и физических приложениях.

Умением пользоваться необходимой литературой.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
2. Общее решение линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.
3. Общее решение линейного неоднородного уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью уравнения в виде квазимногочлена.
4. Общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда существует базис из собственных векторов матрицы системы.
5. Общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда не существует базис из собственных векторов матрицы системы.
5. Отыскание решений нормальной линейной неоднородной системы уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда свободный член является векторным квазимногочленом.
6. Экспонента квадратной матрицы; матричные формулы решения задачи Коши для нормальных линейных систем с постоянными коэффициентами.
7. Теорема о выпрямлении векторного поля.
8. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений и для уравнения  $n$ -го порядка в нормальном виде.
9. Теорема о продолжении решений нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и следствия из нее.
10. Автономные системы дифференциальных уравнений. Свойства фазовых траекторий нормальных автономных систем.
11. Классификация положений равновесия линейной автономной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия для автономных нелинейных систем второго порядка.
12. Первые интегралы автономных систем дифференциальных уравнений. Критерий первого интеграла. Применение первых интегралов для понижения порядка системы уравнений.
13. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и для линейного уравнения  $n$ -го порядка.
14. Фундаментальная система решений, фундаментальная матрица и структура общего решения нормальной линейной однородной системы уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений и структура общего решения линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка.
15. Определитель Вронского и формула Лиувилля--Остроградского для решений нормальной линейной однородной системы уравнений и для решений линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка.
16. Метод вариации постоянных для нормальной линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения  $n$ -го порядка.
17. Групповые свойства решений автономных систем дифференциальных уравнений. Понятие фазового объема. Формула Лиувилля.

Примеры экзаменационных билетов (устный экзамен):

Билет № 1

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений.



### Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

### 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется один час (астрономический) на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.

# Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

## Элементы дифференциальных уравнений

2 курс, 3 семестр, экзамен

	Вид занятий	Сумма баллов
1.	Контрольная работа 1 по сдаче 1 задания	0 – 9
2.	Контрольная работа 2 по сдаче 2 задания	0 – 9
3.	Задание 1 (тетрадь и ее защита)	0 – 3
4.	Задание 2 (тетрадь и ее защита)	0 – 3
5.	Проверка теоретических знаний	0 – 3
6.	Работа на семинарах	0 – 3
7.	Итоговый контроль. Устный экзамен	0 – 70
	<b>Итого</b>	0 – 100

Сумма баллов за устный ответ начисляется по формуле  $N \cdot 7$ , где  $N \geq 3$  – предварительная оценка за устный ответ по десятибалльной шкале. Если  $N = 1, 2$ , то итоговая оценка совпадает с  $N$ .

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системы.

Баллы БРС	Оценка
93 – 100	отлично (10)
86 – 92	отлично (9)
79 – 85	отлично (8)
72 – 78	хорошо (7)
65 – 71	хорошо (6)
58 – 64	хорошо (5)
51 – 57	удовлетворительно (4)
44 – 50	удовлетворительно (3)
30 – 43	неудовлетворительно (2)
0 – 29	неудовлетворительно (1)

# Примеры экзаменационных билетов по курсу

## Элементы дифференциальных уравнений

### Экзаменационный билет 1.

Дисциплина: Элементы дифференциальных уравнений

1. Теорема о выпрямлении векторного поля.
2. Решите задачу Коши

$$y'' \cos y - y' \sin y \left( y' + \frac{1}{\cos^2 y} \right) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

### Экзаменационный билет 2.

Дисциплина: Элементы дифференциальных уравнений

1. Общее решение линейного неоднородного уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью уравнения в виде квазимногочлена.

2. Найдите положения равновесия системы  $\dot{x} = y^2 - y - 2, y = -xy - 3y^2 - 2$  в полуплоскости  $y > 0$ , определите их характер. Изобразите фазовые траектории соответствующих линеаризованных систем.