

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

| | |
|----------------------------|---|
| | Рабочая программа дисциплины (модуля) |
| по дисциплине: | Гомологическая алгебра в алгебраической геометрии |
| по направлению: | Фотоника и оптоинформатика |
| профиль подготовки: | Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры |
| курс: | 1 |
| квалификация: | магистр |

Семестры, формы промежуточной аттестации:

1 (осенний) - Зачет
2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 60 час.
семинары: 0 час.
лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: Д.В. Дубнов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Физтех-кластера академической и научной карьеры 24.04.2022

Аннотация

Задача Кронекера о каноническом виде пары линейных операторов переформулируется на языке абелевых категорий – это задача поиска неразложимых представлений колчана Кронекера. Они взаимно однозначно соответствуют неразложимым когерентным пучкам на проективной прямой, классифицированным Гротендиком. Это соответствие ведёт к понятию производной категории и производной эквивалентности абелевых категорий. Цель спецкурса – научиться изучать гомологическими методами абелевы и триангулированные категории: представлений конечномерных алгебр, когерентных пучков на проективных многообразиях и пр., исследовать алгебраические объекты геометрическими методами и наоборот. Слушатели спецкурса научатся пользоваться спектральными последовательностями, познакомятся с t -структурами и сердцевинами, получают начальные представления о теории деформаций ассоциативных алгебр и алгебр Ли. Также будет рассказано о наших конструкциях связанных с гомоморфизмами ассоциативных алгебр: композиции колчанов композиции по двум гомоморфизмам и др.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

дать слушателям базисные знания современной гомологической алгебры. Продемонстрировать каким образом язык производных категорий позволяет решать задачи теории представлений ассоциативных алгебр геометрическими методами и наоборот - геометрические задачи методами теории представлений.

Задачи дисциплины

Приобретение слушателями теоретических знаний в области гомологической алгебры, теории представлений ассоциативных алгебр и когерентных пучков на алгебраических многообразиях. Формирование представления о дифференциальной геометрии и топологии. Обучение студентов основным методам решения задач по этому разделу, связанных с проблемами теоретической физики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основные понятия и результаты теории абелевых и производных категорий.

уметь:

строить проективные и инъективные резольвенты в абелевых категориях и вычислять с их помощью Hom -ы и Ext -ы, вычислять когомологии когерентных пучков и целочисленные инварианты проективных многообразий, строить исключительные наборы абелевых и производных категорий.

владеть:

техникой (ко)гомологических вычислений при помощи резольвент, точных последовательностей и спектральных последовательностей.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|---|--------------------------|---|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |

| | | | | | |
|-----------------------|--|---------------------|--|--|----|
| 1 | Колчаны с соотношениями. | 5 | | | 2 |
| 2 | Квазикогерентные и когерентные пучки на проективных многообразиях. | 5 | | | 2 |
| 3 | Когомологии когерентных пучков на гладких проективных многообразиях. Ном-ы и Ext-ы. | 5 | | | 2 |
| 4 | Абелева категория и её группа Гротендика (K0). | 5 | | | 3 |
| 5 | Триангулированные и производные категории. Производные эквивалентности. Исключительные наборы. | 5 | | | 3 |
| 6 | Введение в зеркальную симметрию на гладкой эллиптической кривой. | 5 | | | 3 |
| 7 | Спектральные последовательности. | 5 | | | 5 |
| 8 | Композиция колчанов и композиция ассоциативных алгебр по двум гомоморфизмам. | 5 | | | 5 |
| 9 | Топологические превратные пучки. Функторы, связанные с превратными пучками. | 5 | | | 5 |
| 10 | Квазинаследственные алгебры и их представления. | 5 | | | 5 |
| 11 | Полуортогональные разложения производных категорий: алгебраические и геометрические примеры. | 5 | | | 5 |
| 12 | Гомологии и когомологии Хохшильда ассоциативной алгебры. Деформации ассоциативных алгебр и алгебр Ли, связь с когомологиями Хохшильда. | 5 | | | 5 |
| Итого часов | | 60 | | | 45 |
| Подготовка к экзамену | | 30 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 135 час., 3 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Колчаны с соотношениями.

Конечномерные алгебры и категории конечномерных модулей над ними, радикал Джекобсона и цоколь, представления колчанов и колчанов с соотношениями. Классификация представлений колчана Кронекера с двумя стрелками. Проективные, инъективные и простые представления колчанов с соотношениями, вычисления при помощи проективных резольвент. Гомологическая размерность, вычисление для колчана с соотношениями, эквивалентность Мориты для конечномерных алгебр, примеры.

2. Квазикогерентные и когерентные пучки на проективных многообразиях.

Квазикогерентные и когерентные пучки на проективных многообразиях. Определение и примеры квазикогерентных и когерентных пучков. Пучки кручения, носитель пучка, геометрический слой пучка в точке.

3. Когомологии когерентных пучков на гладких проективных многообразиях. Ном-ы и Ext-ы.

Когомологии когерентных пучков на гладких проективных многообразиях. Ном-ы и Ext-ы для когерентных пучков, эйлерова характеристика, примеры вычисления когомологий когерентных пучков. Эйлерова характеристика когерентного пучка, методы вычисления, двойственность Серра. Классификация когерентных пучков на проективной прямой.

4. Абелева категория и её группа Гротендика (K_0).

Абелева категория и её группа Гротендика (K_0). Группа Гротендика категорий конечномерных представлений колчанов с соотношениями, когерентных пучков на гладком проективном многообразии, другие примеры. Эйлерова характеристика как билинейная форма на K_0 . Методы вычисления.

5. Триангулированные и производные категории. Производные эквивалентности. Исключительные наборы.

Триангулированные и производные категории, производные эквивалентности. Определение производной и триангулированной категории, примеры. Производные функторы, функторы Tor и Ext. Исключительные наборы, функтор Серра в производных категориях, примеры.

6. Введение в зеркальную симметрию на гладкой эллиптической кривой.

Введение в зеркальную симметрию на гладкой эллиптической кривой.

Необходимые сведения об арифметике и геометрии гладкой эллиптической кривой, категория когерентных пучков на гладкой эллиптической кривой, теорема Атьи.

Категория Фукаи гладкой эллиптической кривой. Примеры вычисления Ном-ов между линейными расслоениями при помощи зеркальной симметрии.

Семестр: 2 (Весенний)

7. Спектральные последовательности.

Спектральные последовательности. Определение спектральной последовательности, спектральная последовательность фильтрованного комплекса. Спектральная последовательность локально-тривиального расслоения, спектральная последовательность Гротендика. Спектральные последовательности Эйленберга-Мура. Примеры простейших вычислений со спектральными последовательностями.

8. Композиция колчанов и композиция ассоциативных алгебр по двум гомоморфизмам.

Композиция колчанов и композиция ассоциативных алгебр по двум гомоморфизмам. Примеры. Функторы, связанные с композицией колчанов и композицией по двум гомоморфизмам.

9. Топологические превратные пучки. Функторы, связанные с превратными пучками.

Топологические превратные пучки. Конструктивные пучки, превратные пучки. Функторы, связанные с превратными пучками.

10. Квазинаследственные алгебры и их представления.

Квазинаследственные алгебры и их представления. Определения и примеры. Квазинаследственные алгебры и превратные пучки. Исключительные наборы для квазинаследственных алгебр.

11. Полуортогональные разложения производных категорий: алгебраические и геометрические примеры.

Полуортогональные разложения производных категорий. Алгебраические геометрические примеры полуортогональных разложений. Понятие о сердцевины в производных категориях (t-структуры), пары кручения, склейка t-структур. Связь с превратными пучками и квазиинвариантами алгебрами.

12. Гомологии и когомологии Хохшильда ассоциативной алгебры. Деформации ассоциативных алгебр и алгебр Ли, связь с когомологиями Хохшильда.

Когомологии Хохшильда ассоциативной алгебры. Гомологии и когомологии Хохшильда: определение и простейшие примеры. Деформации алгебры, связь с когомологиями Хохшильда. Примеры деформации колчанов с соотношениями.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория с меловой доской, медиапроектор, экран.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Гельфанд С.И., Манин Ю.И., Методы гомологической алгебры. Введение в когомологии и производные категории. М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы. 1988 г.
2. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Том 2. М.: Мир, 1979. L.W. Tu, Differential Geometry (2017)
3. Хартсхорн Р. Принципы алгебраической геометрии М.: Мир, 1981.

Дополнительная литература

1. Касивара М., Шапира П. Пучки на многообразиях Перевод с английского и французского Ю. Ю. Кочеткова и В. Е. Назайкинского под редакцией Б. Ю. Стернина Москва «Мир» 1997.
2. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Том 1,2, М.: Мир, 1982. - 366 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. Бондал А., Капранов М. Оснащенные триангулированные категории.
http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=sm&paperid=1196&option_lang=rus
2. Городенцев А.Л. Введение в теорию категорий и гомологическую алгебру
<http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/homalg/1819/list.html#lectures>
3. Елагин А. Введение в гомологическую алгебру. <https://ium.mccme.ru/s16/s16-elagin.html>
4. Казарян М,Э. Введение в теорию гомологий
<http://www.mi-ras.ru/~kazarian/papers/homology05.pdf>
5. Кузнецов А.Г. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах
<http://www.mi-ras.ru/~akuznet/vbun/index-vbun.htm>
6. Орлов Д., Кулешов С. Исключительные пучки на поверхностях дель Пеццо
http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=788&option_lang=rus
7. Dlab V., Ringel C. M. Quasy-hereditary algebras
https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ijm/1255988725
8. Port A, An Introduction to Homological Mirror Symmetry and the Case of Elliptic Curves.
<https://archive.org/details/arxiv-1501.00730/mode/2up>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

| | |
|---|--|
| по направлению: | Фотоника и оптоинформатика |
| профиль подготовки: | Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры (Современная фундаментальная математика) |
| курс: | <u>1</u> |
| квалификация: | магистр |
| Семестры, формы промежуточной аттестации: | |
| 1 (осенний) - Зачет | |
| 2 (весенний) - Экзамен | |
| Разработчик: | Д.В. Дубнов, канд. физ.-мат. наук |

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Гомологическая алгебра в алгебраической геометрии» обучающийся должен:

знать:

основные понятия и результаты теории абелевых и производных категорий.

уметь:

строить проективные и инъективные резольвенты в абелевых категориях и вычислять с их помощью Ном-ы и Ext-ы, вычислять когомологии когерентных пучков и целочисленные инварианты проективных многообразий, строить исключительные наборы абелевых и производных категорий.

владеть:

техникой (ко)гомологических вычислений при помощи резольвент, точных последовательностей и спектральных последовательностей.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов

1. Спектральная последовательность Гротендика, примеры.
2. Строение производной категории для случая глобальной размерности 1.
3. Как устроены неразложимые представления колчана Кронекера с двумя стрелками?
4. Первые гомологии и когомологии Хохшильда для ассоциативной алгебры.
5. Тета-функции и гомоморфизмы между линейными расслоениями на гладкой эллиптической кривой.

Примеры контрольных заданий

1. Постройте проективную/инъективную резольвенту заданного представления колчана с соотношениями или найдите Ном-ы и Ext-ы между двумя заданными колчанами с соотношениями или найдите гомологическую размерность категории представлений заданного колчана с соотношениями.
2. Вычислите эйлерову характеристику заданного когерентного пучка на проективном многообразии.
3. Вычислите когомологии заданного когерентного пучка на проективном многообразии.
4. Опишите группу Гротендика заданной абелевой категории (когерентных пучков на проективном многообразии, представлений конечномерной алгебры и т.д.).
5. Найдите размерность пространства гомоморфизмов между двумя заданными векторными расслоениями на гладкой эллиптической кривой.

Примеры экзаменационных билетов

Билет 1.

- 1) Классификация представлений колчана Кронекера.
- 2) Функтор Серра в триангулированных категориях: примеры.
- 3) Пары кручения на гладкой проективной поверхности.

Билет 2.

- 1) Превратные пучки на проективной прямой с одноточечной стратификацией.
- 2) Перестройки исключительных наборов.
- 3) Вычислите когомологии Хохшильда алгебры колчана .

Билет 3.

- 1) Инфинитезимальные деформации алгебр.
- 2) Классификация Атьи векторных расслоений на эллиптической кривой.
- 3) Приведите пример двухвершинного колчана с соотношениями глобальной размерности 5.

Билет 4.

- 1) Эквивалентность, задаваемая сильным полным исключительным набором.
- 2) Леммы Мукаи для жёстких пучков на поверхностях дель Пеццо.
- 3) Опишите спираль, порождённую стандартным исключительным набором на .

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении зачёта и экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Вопрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.