

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы физики
и исследований им. Ландау
А.В. Рогачев**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Группы и алгебры Ли
по направлению:	Фотоника и оптоинформатика
профиль подготовки:	Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры
курс:	2
квалификация:	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

3 (осенний) - Зачет

4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Программу составил: А.И. Мудров, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Физтех-кластера академической и научной карьеры 20.05.2024

Аннотация

Группа - это множество, на котором задана операция ассоциативного умножения с единицей, относительно которой каждый элемент обратим. Группы образуют фундаментальную алгебраическую структуру, формализующую понятие симметрии, и по этой причине играют исключительно важную роль в математике и ее приложениях. Группы Ли одновременно являются гладкими многообразиями и естественно возникают в качестве симметрий геометрических пространств. Линеаризация групповых преобразований приводит к богатой теории алгебр Ли, которая во многом параллельна теории групп Ли, но также представляет самостоятельный интерес. Алгебры Ли имеют больше представлений и приводят к далеко идущим обобщениям, например, таким, как супералгебры Ли и квантовые группы. Данный курс является введением в теорию групп и алгебр Ли теорию полупростых алгебр Ли с элементами теории представлений и приложениями к физическим проблемам.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Введение в теорию групп и алгебр Ли в объеме, необходимом будущим физикам-теоретикам.

Задачи дисциплины

Сформировать представление о теории групп и алгебр Ли. Обучить студентов основным методам решения задач по этому разделу, связанных с проблемами теоретической физики и математики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач в области фотоники и оптоинформатики
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.2 Владеет навыком руководства малым коллективом в сфере своей профессиональной деятельности
	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований

ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований в области фотоники и оптоинформатики к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен самостоятельно или в составе научного коллектива планировать и проводить научные исследования в области фотоники и оптоинформатики

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- основы теории групп и алгебр Ли и их представлений.

уметь:

- производить вычисления с применением теории групп и их представлений.

владеть:

- математическим аппаратом теории групп и алгебр Ли в применении к геометрическим и физическим задачам.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Конечные и матричные группы. Группы преобразований	3	3		3
2	Группы и алгебры Ли	3	3		3
3	Универсальные обертывающие алгебры	4	4		4
4	Разрешимые и полупростые алгебры Ли	4	4		4
5	Классификация полупростых алгебр Ли	4	4		4
6	Вещественные формы алгебр Ли	4	4		4
7	Представления конечных групп	4	4		4
8	Представления компактных групп	4	4		4
9	Конечномерные представления $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ и их алгебр Ли	4	4		6
10	Конечномерные представления простых групп	4	4		6
11	Конечномерные представления $SU(N)$ и $SL(N)$ и их алгебр Ли	4	4		6
12	Базис Гельфанда-Цейтлина	4	4		6
13	Группы Лоренца и Пуанкаре и их представления	4	4		7
14	Однородные пространства	5	5		7

15	Связность	5	5		7
Итого часов		60	60		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Конечные и матричные группы. Группы преобразований

Группы, подгруппы, факторгруппы. Примеры групп преобразований.

2. Группы и алгебры Ли

Топологические группы и группы Ли, алгебры Ли инвариантных векторных полей, эквивалентность категорий групп и алгебр Ли.

3. Универсальные обертывающие алгебры

Универсальные обертывающие алгебры алгебр Ли, теорема Пуанкаре-Биркгоффа-Витта.

4. Разрешимые и полупростые алгебры Ли

Разрешимые, и полупростые алгебры Ли, разложение Леви.

5. Классификация полупростых алгебр Ли

Классификация Картана полупростых алгебр Ли.

6. Вещественные формы алгебр Ли

Вещественные формы алгебр Ли, компактные алгебры Ли.

7. Представления конечных групп

Представления конечных групп, симметрическая группа, диаграммы Юнга.

8. Представления компактных групп

Представления компактных групп, разложение Петера-Вейля.

Семестр: 4 (Весенний)

9. Конечномерные представления $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ и их алгебр Ли

Конечномерные представления простых алгебр Ли..

10. Конечномерные представления простых групп

Конечномерные представления $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ и их алгебр Ли.

11. Конечномерные представления $SU(N)$ и $SL(N)$ и их алгебр Ли

Конечномерные представления $SU(N)$ и $SL(N)$ и их алгебры Ли.

12. Базис Гельфанда-Цейтлина

Разрешимые и полупростые алгебры Ли, разложение Леви.

13. Группы Лоренца и Пуанкаре и их представления

Группы Лоренца и Пуанкаре и их представления.

14. Однородные пространства

Однородные пространства, действие группы на функциях, сферические функции.

15. Связность

Связности в главных и векторных расслоениях. Теория калибровочных полей и физика элементарных частиц.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска, медиапроектор, экран.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Группы и алгебры Ли [Текст], учеб. пособие для вузов/М. М. Постников, -М., Наука, 1982
2. Современная геометрия [Текст] : Методы и приложения : учеб. пособие для ун-тов / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко .— М. : Наука, 1979 .— 760 с.
3. Исаев А. П., Рубаков В. А., Теория групп и симметрий. Конечные группы. Группы и алгебры Ли. — Москва, Россия: URSS, 2018. — С. 504

Дополнительная литература

1. Компактные группы Ли и их представления [Текст]/Д. П. Желобенко, -М., Наука, 1970
2. Представления редуктивных алгебр Ли [Текст]/Д. П. Желобенко, -М., Наука, 1994
3. Теория представлений групп и ее приложения [Текст]. В 2 т. Т. 1/А. Барут, Р. Рончка , -М., Мир, 1980
4. Хамермеш М., Теория групп и ее применение к физическим проблемам, издательство: Едиториал УРСС, 2002. 2018. — С. 504
5. Хамфрис, Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений, М.: МЦНМО, 2003

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Яндекс.Телемост, МТС-Линк

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Фотоника и оптоинформатика
профиль подготовки:	Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры (Современная фундаментальная математика)
курс:	<u>2</u>
квалификация:	магистр
Семестры, формы промежуточной аттестации:	
3 (осенний) - Зачет	
4 (весенний) - Экзамен	
Разработчик:	А.И. Мудров, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач в области фотоники и оптоинформатики
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
ОПК-5 Способен и готов к повышению квалификации, профессиональному росту и руководству коллективом в сфере своей профессиональной деятельности, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия	ОПК-5.2 Владеет навыком руководства малым коллективом в сфере своей профессиональной деятельности
	ОПК-5.3 Стремится к получению новых знаний, профессиональному и личностному росту
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований в области фотоники и оптоинформатики к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Способен самостоятельно или в составе научного коллектива планировать и проводить научные исследования в области фотоники и оптоинформатики

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Группы и алгебры Ли» обучающийся должен:

знать:

- основы теории групп и алгебр Ли и их представлений.

уметь:

- производить вычисления с применением теории групп и их представлений.

владеть:

- математическим аппаратом теории групп и алгебр Ли в применении к геометрическим и физическим задачам.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов

11 семестр

1. Формула Кэмпбела-Хаусдорфа.
2. Теорема Пуанкаре-Биркгоффа-Витта.
3. Мера Хаара на группе Ли.
4. Форма Киллинга, полупростота.
5. Теорема Петера-Вейля для компактной группы Ли.
6. Представления конечных групп, симметрическая группа, диаграммы Юнга.
7. Классификация Картана полупростых алгебр Ли.
8. Показать, что коразмерность центра неабелевой алгебры Ли не меньше 2.
9. Показать, что скобка Ли ассоциативна тогда и только тогда, когда образ коммутатора лежит в центре алгебры Ли.
10. Показать, что трехмерное евклидово пространство является алгеброй Ли относительно векторного умножения.

12 семестр

1. Базис Гельфанда-Цейтлина для конечномерных представлений $SU(N)$.
2. Оператор Лапласа на однородном пространстве.
3. Конечномерные представления $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ и их алгебр Ли.
4. Конечномерные представления $SU(N)$ и $SL(N)$ и их алгебр Ли.
5. Группы Лоренца и Пуанкаре и их представления.
6. Произвести редукцию Гельфанда-Цейтлина для представления сигнатуры (5,4) группы $SO(5)$.
7. Построить гомоморфизм $SU(2)$ на $SO(3)$.
8. Разложить на неприводимые представления тензорное произведение присоединенного и определяющего представления $SL(N)$.
9. Эквивалентность категорий групп и алгебр Ли.
10. Группы, подгруппы, факторгруппы. Примеры групп преобразований.

Примеры контрольных заданий для зачёта

1. Показать, что скобка Ли ассоциативна тогда и только тогда, когда образ коммутатора лежит в центре алгебры Ли.
2. Показать, что трехмерное евклидово пространство является алгеброй Ли относительно векторного умножения.
3. Показать, что коразмерность центра неабелевой алгебры Ли не меньше 2.
4. Вычислить производный и нижний центральный ряд данной матричной алгебры Ли.
5. Классифицировать все 2-мерные алгебры Ли.

Примеры экзаменационных билетов

Билет 1.

1. Преобразование Кэли.
2. Производный ряд, разрешимые алгебры Ли.

Билет 2.

1. Классификация Картана простых алгебр Ли. Диаграммы Дынкина.
2. Теорема Петера-Вейля для компактных групп Ли и их однородных пространств.

Билет 3.

1. Базис Пуанкаре-Биргхоффа-Витта.
2. Полная приводимость конечномерных представлений простых комплексных алгебр Ли.

Билет 4.

- 1 Групповая алгебра конечных групп.
- 2 Разложение Гельфанда-Цейтлина для представлений общей линейной группы.

Билет 5.

- 1 Разложение тензорного произведения представлений общей линейной группы. Диаграммы Юнга.
2. Связь между группами и алгебрами Ли. Локально изоморфные группы.

Критерии оценивания

Зачёт: обучающемуся ставится зачет в соответствии с продемонстрированным уровнем подготовки; оценивание производится на усмотрение преподавателя в соответствии с особенностями дисциплины и следующими критериями:

Оценка "зачтено" - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике.

Оценка "не зачтено" - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Экзамен:

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Промежуточная аттестация по дисциплине «Группы и алгебры Ли» осуществляется в форме контрольной работы. Контрольная работа проводится в письменной форме.

Экзамен проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.