

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы физики  
и исследований им. Ландау  
А.В. Рогачев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Алгебраическая геометрия
<b>по направлению:</b>	Фотоника и оптоинформатика
<b>профиль подготовки:</b>	Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 1 (осенний) - Зачет
- 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

- лекции: 60 час.
- семинары: 60 час.
- лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Программу составили:

А.И. Бондал, д-р физ.-мат. наук  
В.С. Жгун, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Физтех-кластера академической и научной карьеры 20.05.2024

## Аннотация

Работа современного исследователя в области теоретической и математической физики требует серьезной математической эрудиции. Важнейшие современные статьи по теорфизике используют широкий спектр математических терминов, понятий, конструкций. К важнейшим разделам математики с этой точки зрения относится алгебраическая геометрия.

Данный курс направлен на то, чтобы подготовить студентов-физиков к пониманию математического языка современной теорфизики. В курсе объясняются наиболее фундаментальные геометрические понятия и конструкции, относящиеся к теории алгебраических многообразий и схем, а также пучков на них и их когомологий. По своему содержанию курс чисто математический, но в то же время он позволяет войти в круг вопросов связанных с алгебро-геометрической стороной различных теорий, например теории инстантонов. Это чисто вводный курс по указанным разделам математики для студентов-физиков.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Изучение основ алгебраической геометрии, необходимых будущим физикам-теоретикам.

### Задачи дисциплины

Сформировать представление о современной алгебраической геометрии. Обучить студентов основным методам решения задач по этому разделу, связанных с проблемами, имеющими применение в теоретической физики.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач в области фотоники и оптоинформатики
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях
---	--

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основы алгебраической геометрии.

уметь:

работать с основными алгебро-геометрическими объектами и конструкциями, а также вычислять их численные инварианты в базовых случаях.

владеть:

методами решения задач по алгебраической геометрии.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Введение в многообразия и схемы.	4	4		4
2	Теорема о размерности слоев морфизма.	4	4		4
3	Пучки на схемах. Когерентные пучки.	4	4		4
4	Отделимые и собственные многообразия. Полнота проективного пространства.	4	4		4
5	Векторные поля и дифференциальные формы.	4	4		4
6	Когомологии пучков. Когомологии Чеха.	5	5		5
7	Серровские вычисления когомологий обратимых пучков.	5	5		5
8	Двойственность Серра.	4	4		6
9	Многочлен Гильберта. Плоские семейства.	4	4		6
10	Гладкие морфизмы. Теорема Бертини.	4	4		6
11	Теорема о полунепрерывности когомологий.	4	4		6
12	Теорема о формальных функциях. Разложение Штейна.	4	4		7
13	Классы Чженя. Теорема Римана-Роха.	5	5		7
14	Торические многообразия	5	5		7
Итого часов		60	60		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

## 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

### Семестр: 1 (Осенний)

#### 1. Введение в многообразия и схемы.

Введение в многообразия и схемы. Подсхемы. Расслоенное произведение.

#### 2. Теорема о размерности слоев морфизма.

Теорема о размерности слоев морфизма. Критерий неприводимости.

#### 3. Пучки на схемах. Когерентные пучки.

Понятие пучка. Морфизм предпучков. Аффинная схема. Первоначальные свойства схем. Квазикогерентные и когерентные пучки.

#### 4. Отделимые и собственные многообразия. Полнота проективного пространства.

Отделимые и собственные многообразия. Критерии отделимости и собственности для морфизмов схем. Полнота проективного пространства.

#### 5. Векторные поля и дифференциальные формы.

Векторные поля и дифференциальные формы. Канонический класс проективного пространства. Формула присоединения.

#### 6. Когомологии пучков. Когомологии Чеха.

Понятие когомологий пучков абелевых групп на топологическом пространстве. Когомологии нётеровых аффинных схем. Когомологии Чеха и явное вычисление когомологий пучков на проективном пространстве.

#### 7. Серровские вычисления когомологий обратимых пучков.

Серровские вычисления когомологий обратимых пучков. Теоремы об обращении в нуль для обильных расслоений.

### Семестр: 2 (Весенний)

#### 8. Двойственность Серра.

Теорема двойственности Серра для когомологий когерентных пучков на проективной схеме. Случай проективного пространства. Произвольная проективная схема. Совпадение дуализирующего пучка с каноническим пучком для неособого многообразия над алгебраическим замкнутым полем. Связь между двойственностью и вычетами дифференциальных форм.

#### 9. Многочлен Гильберта. Плоские семейства.

Многочлен Гильберта когерентного пучка на проективном пространстве. Плоские семейства многообразий и постоянство многочлена Гильберта.

#### 10. Гладкие морфизмы. Теорема Бертини.

Гладкие морфизмы. Теорема Бертини. Теорема Клеймана о трансверсальности.

## 11. Теорема о полунепрерывности когомологий.

Теорема о полунепрерывности размерности слоев морфизма и полунепрерывности размерностей групп когомологий в семействах многообразий.

## 12. Теорема о формальных функциях. Разложение Штейна.

Доказательство теоремы о формальных функциях. Следствия: основная теорема Зарисского и разложение Штейна.

## 13. Классы Чженя. Теорема Римана-Роха.

Теория пересечений. Определения:  $i$ -ый класс Чженя, тотальный класс Чженя, многочлен Чженя. Вычисление классов Чженя. Формула самопересечения. Теорема Римана-Роха.

## 14. Торические многообразия

Теория торических алгебраических многообразий.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, доска, медиапроектор, экран.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Алгебраическая геометрия [Текст] = Algebraic geometry, монография/Р. Хартсхорн, -М., Мир, 1981
2. W. Fulton, Introduction to toric varieties, - Princeton University Press, 1993.

### Дополнительная литература

1. Принципы алгебраической геометрии [Текст]. В 2 т. Т.1 : монография/Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. - М.: Мир, 1982
2. Принципы алгебраической геометрии [Текст]. В 2 т. Т. 2 : монография/Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. - М.: Мир, 1982

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Яндекс.Телемост, МТС-Линк

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен, с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения и понятия, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует:

– посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;

- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Показателем владения материалом служит умение без конспекта отвечать на вопросы по темам дисциплины.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

<b>по направлению:</b>	Фотоника и оптоинформатика
<b>профиль подготовки:</b>	Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры (Современная фундаментальная математика)
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 1 (осенний) - Зачет
- 2 (весенний) - Экзамен

#### Разработчики:

А.И. Бондал, д-р физ.-мат. наук  
В.С. Жгун, канд. физ.-мат. наук

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач в области фотоники и оптоинформатики
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.2 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Алгебраическая геометрия» обучающийся должен:

### знать:

основы алгебраической геометрии.

### уметь:

работать с основными алгебро-геометрическими объектами и конструкциями, а также вычислять их численные инварианты в базовых случаях.

### владеть:

методами решения задач по алгебраической геометрии.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся



## Перечень контрольных вопросов

### 9 семестр

1. Вывод теоремы Клеймана о трасверсальности с помощью теоремы гладкости в общей точке в характеристике нуль.
2. Критерии отделимости и собственности для морфизмов схем.
3. Доказательство полноты проективного пространства.
4. Пучок дифференциальных форм на многообразии, связь с диагональным вложением.
5. Понятия аффинного и проективного спектра кольца, общей схемы, когерентного пучка, пучка дифференциалов.
6. Когомологии Чеха пучка на схеме, их основные свойства.
7. Типы морфизмов между схемами: отделимые, собственные, конечные, плоские, гладкие, этальные.
8. Теорема о размерности слоев морфизма.
9. Канонический класс проективного пространства. Формула присоединения.
10. Теоремы об обращении в нуль для обильных расслоений.

### 10 семестр

1. Вывод разложения Штейна из теоремы о формальных функциях.
2. Вывод двойственности Серра.
3. Теорема о полунепрерывности размерности слоев морфизма и полунепрерывности размерностей групп когомологий в семействах многообразий.
4. Многочлен Гильберта когерентного пучка на проективном пространстве. Плоские семейства многообразий и постоянство многочлена Гильберта.
5. Теорема Клеймана о трансверсальности.
6. Доказательство теоремы о формальных функциях.
7. Теория пересечений.
8. Определение классов Чженя. Методы вычисления.
9. Теорема Римана-Роха.
10. Теорема Безу.

### Примеры контрольных заданий в 9 семестре

1. Вычислить канонический класс проективного пространства.
2. Показать конечность числа прямых на общей кубической поверхности.
3. Вычислить род гиперэллиптической кривой заданной многочленом степени  $g$ .
4. Найти когомологии пучка регулярных функций аффинного пространства без точки.
5. Вычислить многочлен Гильберта для касательного расслоения на квадрике.

### Примеры экзаменационных билетов в 10 семестре

#### Билет 1.

1. Показать что квадратичный конус в проективном пространстве нормален.
2. Серровские вычисления когомологий обратимых пучков проективного пространства.

#### Билет 2.

1. Классификация векторных расслоений на проективной прямой.
2. Явная формула для дифференциальной формы на двумерной кватернионной в трехмерном проективном пространстве.

## Критерии оценивания

9 семестр: обучающемуся ставится зачет в соответствии с продемонстрированным уровнем подготовки; оценивание производится на усмотрение преподавателя в соответствии с особенностями дисциплины и следующими критериями:

Оценка "зачтено" - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике.

Оценка "не зачтено" - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

10 семестр:

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Промежуточная аттестация по дисциплине «Алгебраическая геометрия» в 9 семестре осуществляется в форме контрольной работы. Контрольная работа проводится в письменной форме.

Экзамен проводится в устной форме по билетам. В каждом билете представлено два теоретических вопроса. При проведении экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.