

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы физики  
и исследований им. Ландау  
А.В. Рогачев**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Математические основания квантовой механики
<b>по направлению:</b>	Фотоника и оптоинформатика
<b>профиль подготовки:</b>	Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: Г.Г. Амосов, д-р физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании Физтех-кластера академической и научной карьеры 17.04.2023

## Аннотация

Курс посвящён изложению основ квантовой теории вероятностей, опирающихся на аксиомы Макки. Объектам квантовой механики предан вероятностный смысл в духе Копенгагенской интерпретации. Также вводятся математические понятия, появившийся в квантовой теории вероятностей в последние десятилетия. Вместе с теоретическими положениями курс содержит аппарат для решения практических задач.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- дать студентам основы знаний в области математических оснований квантовой механики.

#### Задачи дисциплины

- научить студента свободно пользоваться понятиями квантовой теории вероятностей, прояснить вероятностный смысл спектральной теоремы, показать принципиальное отличие квантовой теории вероятностей от классической.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- вероятностный смысл спектральной теоремы.

уметь:

- работать с дробным преобразованием Фурье.

владеть:

- способами расчетов квантовых корреляций.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Меры на решетке ортогональных проекторов. Теорема Глизона.	2			2
2	Проекторозначные меры. Положительные операторнозначные меры. Теорема Наймарка о дилатации.	2			2
3	Аксиоматика Макки квантовой механики. Квантовые состояния и измерения.	2			2
4	Проекторы как квантовые события. Квантовые состояния, ассоциированные с мерами на проекторах.	2			2

5	Измерения, ассоциированное с наблюдаемыми (самосопряженными операторами) в силу спектральной теоремы.	2			2
6	Пространство волновых функций $L_2(\mu)$ , ассоциированных с квантовой наблюдаемой. Формула Борна. Случай квантовых наблюдаемых, являющихся линейными комбинациями операторов координаты и импульса.	2			2
7	Квантовые случайные величины. Рандомизация. Теорема Холево об общем виде измерения.	2			2
8	Соотношение неопределенностей Шредингера-Робертсона для измерений с конечными вторыми моментами.	2			2
9	Тензорные произведения гильбертовых пространств. Составные квантовые системы. Сцепленные и сепарабельные состояния.	2			2
10	Классические и квантовые корреляции. Неравенство Белла-Клаузера-Хорна-Шимони. Граница Цирельсона.	2			2
11	Квантовые каналы передачи информации. Разложение Крауса.	2			2
12	Кодирование и декодирование классической и квантовой информации.	2			2
13	Линейные пространства, состоящие из ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Теорема об общем виде некоммутативного операторного графа, ассоциированного с квантовым каналом.	2			2
14	Квантовые коды, исправляющие ошибки. Квантовые антиклики.	2			2
15	Квантовая суперактивация.	2			2
Итого часов		30			30
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

##### Семестр: 3 (Осенний)

1. Меры на решетке ортогональных проекторов. Теорема Глизона.

Структурное описание мер для гильбертовых пространств размерности больше двух.

2. Проекторозначные меры. Положительные операторнозначные меры. Теорема Наймарка о дилатации.

Представление произвольных мер в виде проекции спектральных.

3. Аксиоматика Макки квантовой механики. Квантовые состояния и измерения.

Сопоставление паресостояние, измерение распределения вероятностей на прямой.

4. Проекторы как квантовые события. Квантовые состояния, ассоциированные с мерами на проекторах.

Тройка Колмогорова в квантовой вероятности.

5. Измерения, ассоциированное с наблюдаемыми (самосопряженными операторами) в силу спектральной теоремы.

Осуществление измерений с помощью проекторозначных мер.

6. Пространство волновых функций  $L^2(\mu)$ , ассоциированных с квантовой наблюдаемой. Формула Борна. Случай квантовых наблюдаемых, являющихся линейными комбинациями операторов координаты и импульса.

Случай однократного спектра и существования циклического вектора.

7. Квантовые случайные величины. Рандомизация. Теорема Холево об общем виде измерения.

Операторозначные меры как рандомизированные случайные величины.

8. Соотношение неопределенностей Шредингера-Робертсона для измерений с конечными вторыми моментами.

Ограничения на ковариацию в некоммутативной теории вероятностей.

9. Тензорные произведения гильбертовых пространств. Составные квантовые системы. Сцепленные и сепарабельные состояния.

Определение и свойства сцепленных состояний. Разложение Шмидта.

10. Классические и квантовые корреляции. Неравенство Белла-Клаузера-Хорна-Шимони. Граница Цирельсона.

Сравнение классических и квантовых корреляций.

11. Квантовые каналы передачи информации. Разложение Крауса.

Общий вид вполне положительных отображений. Неединственность представления.

12. Кодирование и декодирование классической и квантовой информации.

Классическая и квантовая информация. Кодированный и измеряющий каналы.

13. Линейные пространства, состоящие из ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Теорема об общем виде некоммутативного операторного графа, ассоциированного с квантовым каналом.

Операторные пространства и системы. Их отличия.

14. Квантовые коды, исправляющие ошибки. Квантовые антиклики.

Возможность безошибочной передачи информации.

## 15. Квантовая суперактивация.

Свойства операторных графов относительно взятия операции тензорного произведения.

### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Аудитория на 18 человек, меловая доска, швабра для стирания с доски, скребок для удаления лишней воды с доски, мел со скруглённым квадратным сечением.

### 6. Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. С. Холево .— М. : Наука, 1980 .— 320 с.
2. Лекции по математическим основаниям квантовой механики, учебное пособие /Г. Г. Амосов ; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет). Москва, МФТИ, 2019

#### Дополнительная литература

1. Математические основы квантовой механики [Текст]/И. Нейман , -М., Наука, 1964

### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://arxiv.org>

### 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Компьютер, подключенный к сети интернет, почтовый клиент Thunderbird, интернет-браузер, сетевой принтер с двусторонней печатью.

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения дисциплины, уметь применять полученные знания для решения различных задач.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента в соответствии с данными в рабочей программе. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях,
- при необходимости подготовку к коллоквиумам, экзамену.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

Возможен промежуточный контроль знаний студентов в виде решения задач в соответствии с тематикой занятий.

В качестве дополнительной литературы рекомендуется изучить: N. Weaver. "Quantum" Ramsey theorem for operator systems. <https://arxiv.org/pdf/1601.01259v2.pdf> (2016).

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Фотоника и оптоинформатика
<b>профиль подготовки:</b>	Фотоника, квантовые технологии и двумерные материалы Физтех-школа физики и исследований им. Ландау Физтех-кластер академической и научной карьеры (Математические методы современной физики)
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	Г.Г. Амосов, д-р физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математические основания квантовой механики» обучающийся должен:

**знать:**

- вероятностный смысл спектральной теоремы.

**уметь:**

- работать с дробным преобразованием Фурье.

**владеть:**

- способами расчетов квантовых корреляций.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов:

1. Запишите интегральный оператор, осуществляющий унитарную эквивалентность операторов координаты и линейной комбинации операторов координаты и импульса.
2. Выпишите собственные функции и собственные значения для дробного преобразования Фурье. Найдите дисперсии операторов координаты и импульса в собственных состояниях.
3. Докажите справедливость верхней границы Цирельсона.
4. Найдите квантовый антиклик для операторного графа, порожденного матрицами Паули.
5. Спектральная теорема для случая существования циклического вектора.
6. Найти волновую функцию квантового состояния, заданного в координатном представлении, в представлении, связанном с линейной комбинацией координаты и импульса.
7. Теорема Наймарка о дилатации положительной операторнозначной меры.
8. Пример положительной операторнозначной меры, порожденной тремя векторами на плоскости.
9. Неравенство Белла. Граница Цирельсона.
10. Пример, в котором граница Цирельсона достигается.
11. Теорема об общем виде некоммутативного операторного графа.
12. Построение квантового канала по положительной операторнозначной мере, порождающей граф.

Примеры экзаменационных билетов:

Билет 1.

1 Спектральная теорема для случая существования циклического вектора.

2 Найти волновую функцию квантового состояния, заданного в координатном представлении, в представлении, связанном с линейной комбинацией координаты и импульса.

Билет 2.

1 Теорема Наймарка о дилатации положительной операторнозначной меры.

2 Пример положительной операторнозначной меры, порожденной тремя векторами на плоскости.

Билет 3.



- 1 Неравенство Белла. Граница Цирельсона.
- 2 Пример, в котором граница Цирельсона достигается.

Билет 4.

- 1 Теорема об общем виде некоммутативного операторного графа.
- 2 Построение квантового канала по положительной операторозначной мере, порождающей граф.

Билет 5.

- 1 Кодированный и декодирующий каналы.
- 2 Случай унитарных кубитных каналов.

#### Критерии оценивания

Оценка "отлично" (10 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (9 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка "отлично" (8 баллов) выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочётами.

Оценка "хорошо" (7 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка "хорошо" (6 баллов) выставляется студенту, если он твёрдо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка "хорошо" (5 баллов) выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка "удовлетворительно" (4 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка "удовлетворительно" (3 балла) выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка "неудовлетворительно" (2 балла) выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка "неудовлетворительно" (1 балл) выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

#### **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении оценивания знаний обучающемуся предоставляется время на подготовку на усмотрение преподавателя. Опрос обучающегося на экзамене не должен превышать одного астрономического часа. Оценивание знаний производится в соответствии с вышеуказанными критериями в соответствии с содержанием дисциплины.