

И.И. Лунатов^{1,2}, Т.А. Чжо²

¹ Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского

² Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет)

Распространение возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях

Исследованы процессы распространения возмущений в двумерных пограничных слоях в условиях сильного взаимодействия. Найдены зависимости скорости распространения возмущений вверх по потоку от отношения удельных теплоёмкостей и числа Прандтля. Выражение для скорости распространения возмущений получено на основе анализа системы характеристик и субхарактеристик, соответствующих газодинамическим волновым процессам, процессам конвекции и диффузии.

Ключевые слова: пограничный слой, сильное взаимодействие, распространение волн, асимптотический анализ.

I. Введение

Распространение возмущений в пограничных слоях связано с процессами конвекции и диффузии [1]. Анализ системы уравнений трёхмерного пограничного слоя [1] показал, что характеристиками этой системы уравнений являются линии, нормальные к обтекаемой поверхности. Вид этих характеристик и условия, выполняющиеся на них, соответствуют распространению возмущений с бесконечной скоростью по нормали к поверхности. Эти эффекты связаны с процессами диффузии, которые в вырожденной, по отношению к исходным уравнениям Навье–Стокса, системе уравнений пограничного слоя проявляются в одном направлении и определяются старшими производными в краевой задаче. Для описания процессов распространения возмущений, связанных с конвекцией, необходимо анализировать характеристики системы уравнений пограничного слоя без старших производных (субхарактеристики). Полная система характеристик и субхарактеристик позволяет на качественном уровне сформулировать условия корректности краевой задачи и определить зоны зависимости и влияния. Уравнения двумерного нестационарного пограничного слоя также допускают анализ системы характеристик и субхарактеристик [2]. Исследование характеристик и субхарактеристик в нестационарных пограничных слоях, содержащих возвратные токи, привело к выводу о возможности, с течением времени, возникновения разрывных решений [3].

Вместе с тем из-за условий прилипания на поверхности и наличия области дозвукового течения существует возможность распространения возмущений, обусловленная волновыми процессами. Результаты экспериментальных исследований эффектов распространения возмущений вверх по потоку в сверхзвуковых пограничных слоях изложены, например, в [4]. Математическая модель, описывающая распространение возмущений, предполагает, что распределение давления определяет-

ся в результате взаимодействия течения в пограничном слое с внешним потоком. В то же время классическая теория пограничного слоя не позволяет описывать подобные процессы, так как предполагается, что распределение давления заранее известно. Эффекты сильного локального вязко-невязкого взаимодействия существенны не только при распространении возмущений вверх по потоку. Учёт этих эффектов позволил описать локальные отрывные течения [5–6], а также течения в областях с большими локальными градиентами [7–9].

Анализ процессов распространения возмущений в трёхмерных пограничных слоях для режима сильного взаимодействия позволил определить соответствующие субхарактеристические поверхности [10], отделяющие области докритического (дозвукового в среднем) течения и закритического (сверхзвукового в среднем) течения в гиперзвуковом пограничном слое вблизи треугольного крыла. Определение до- и закритических течений сформулировано [11] для течений, в которых возмущения распространяются вверх по потоку на расстояния, значительно превосходящие толщину пограничного слоя или на расстояния, сравнимые с толщиной пограничного слоя, соответственно.

Ниже исследованы нестационарные течения в ламинарном пограничном слое для условий сильного взаимодействия. Источником нестационарных возмущений, приводящим к проявлению процессов вязко-невязкого взаимодействия, может быть меняющееся во времени донное давление, падение на пограничный слой ударной волны переменной интенсивности и др. Как показано при исследовании гиперзвуковых течений [12], для стационарного режима сильного взаимодействия характерным является распространение возмущений вверх по потоку вдоль всей поверхности вплоть до передней кромки. Естественно предположить, что аналогичные эффекты будут проявляться и в нестационарных течениях, изменяя как локальные, так и интегральные величины поверхностного трения, теплового потока и давления.

Моделирование такого рода процессов имеет поэтому значение для решения задач практической аэродинамики.

II. Постановка задачи

Рассматривается обтекание плоской поверхности (пластины или клина), расположенной под нулевым углом атаки к набегающему гиперзвуковому потоку вязкого теплопроводного газа. Предполагается, что реализуется режим сильного взаимодействия [13], для которого характерны следующие соотношения:

$$M_\infty \rightarrow \infty, \quad M_\infty \tau \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где M_∞ — число Маха набегающего потока, τ — безразмерная толщина ламинарного пограничного слоя ($\tau = O(\text{Re}_0^{-1/2})$). Для декартовых координат, отсчитываемых вдоль поверхности пластины и по нормали к поверхности, времени, компонентов вектора скорости, плотности, давления, полной энтальпии, динамического коэффициента вязкости, введены следующие обозначения: $lx, ly, lz, lt/u_\infty, u_\infty u, u_\infty v, u_\infty w, \rho_\infty \rho, \rho_\infty u_\infty^2 p, u_\infty^2 H/2, \mu_0 \mu$ соответственно. Параметр l представляет собой характерную длину пластины или расстояние от передней кромки до донного среза клина. Индекс бесконечность относится к размерным параметрам невязкого потока над пограничным слоем, нулевым индексом отмечена размерная величина динамического коэффициента вязкости, вычисленного при температуре торможения. Предполагается, что число Рейнольдса $\text{Re}_0 = \rho_\infty u_\infty l / \mu_0$ велико, но не превосходит критического значения, при котором возможен переход ламинарного режима течения в турбулентный. Известно, что с ростом числа Маха число Рейнольдса перехода значительно возрастает [14].

В соответствии с теорией сильного гиперзвукового взаимодействия область возмущённого течения вблизи обтекаемой поверхности разделяется на две подобласти: 1 — невязкое течение, 2 — пограничный слой.

Области 1 соответствуют следующие асимптотические представления функций течения и координат:

$$x = x_1, \quad y = \tau y_1, \quad t = t_1, \quad (2)$$

$$u(x, y, t, \tau) = 1 + \dots, v(x, y, t, \tau) = v_1(x_1, y_1, t_1) + \dots,$$

$$p(x, y, t, \tau) = \tau^2 p_1(x_1, y_1, t_1) + \dots,$$

$$\rho(x, y, t, \tau) = \rho_1(x_1, y_1, t_1) + \dots$$

Подстановка разложений (2) в систему уравнений Навье–Стокса и предельный переход (1) приводят к системе уравнений вида

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} \right) + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} \right) = 0$$

со следующими граничными условиями на ударной волне:

$$y_1 = g_1(x_1, t_1), \quad \rho_1 = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)},$$

$$p_1 = \frac{(\gamma + 1)v_1^2}{2}, \quad v_1 = \frac{2}{(\gamma + 1)} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial t_1} \right)$$

и на внешней границе пограничного слоя

$$y_1 = \delta_1(x_1, t_1), v_1 = \frac{2}{(\gamma + 1)} \left(\frac{\partial \delta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta_1}{\partial t_1} \right).$$

Для дальнейшего анализа необходимо получить связь между толщиной пограничного слоя δ_1 или вертикальной скоростью $v_1(x_1, \delta_1, t_1)$ и возмущением давления $p_1(x_1, t_1)$. Ниже использовано приближённое соотношение

$$p_1 = (\gamma + 1)v_1^2/2,$$

которое представляет собой обобщение формулы касательного клина на нестационарный случай.

Для области 2 характерны следующие асимптотические разложения и представления координат:

$$x = x_1, \quad y = \tau y_1, \quad t = t_1, \quad (3)$$

$$u(x, y, t, \tau) = u_2(x_1, y_1, t_1) + \dots, v(x, y, t, \tau) =$$

$$= \tau v_2(x_1, y_1, t_1) + \dots,$$

$$p(x, y, t, \tau) = \tau^2 p_2(x_1, t_1) + \dots, \rho(x, y, t, \tau) =$$

$$= \tau^2 \rho_2(x_1, y_1, t_1) + \dots,$$

$$H(x, y, t, \tau) = H_2(x_1, y_1, t_1) + \dots$$

Подстановка разложений (3) в систему уравнений Навье–Стокса и предельный переход (1) дают систему уравнений нестационарного пограничного слоя. Замена переменных

$$X = x_1, \quad T = t_1,$$

$$Y = \left[\frac{2\gamma C_0}{(\gamma - 1)} \right]^{-1/2} x_1^{-1/4} \int_0^{y_1} R dy_1, u_2 = \frac{\partial F}{\partial Y},$$

$p_2 = x_1^{-1/2} P, \rho_2 = x_1^{-1/2} R, C_0 = P_{X=0}, G = H_2, A = G - U^2$ приводит соответствующую краевую задачу к виду

$$X \frac{\partial U}{\partial T} + X \left(U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) - \frac{F}{4} \frac{\partial U}{\partial Y} +$$

$$+ \beta \frac{(\gamma - 1)}{4\gamma} A = \left(\frac{P}{C_0} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (4)$$

$$X \frac{\partial G}{\partial T} + X \left(U \frac{\partial G}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial Y} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial G}{\partial Y} \right) - \frac{F}{4} \frac{\partial G}{\partial Y} =$$

$$= X \frac{(\gamma - 1)}{\gamma P} A \frac{\partial P}{\partial T} + \left(\frac{P}{C_0} \right) \frac{\partial^2 G}{\partial Y^2},$$

$$\beta = -1 + \frac{2X}{P} \frac{\partial P}{\partial X}, \quad \Delta = \left[\frac{(\gamma - 1)C_0}{2\gamma P^2} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty A^2 dY,$$

$$P = \frac{(\gamma + 1)}{2} \left[\frac{3\Delta}{4} + X \left(\frac{\partial \Delta}{\partial X} + \frac{\partial \Delta}{\partial T} \right) \right]^2,$$

$$U = F = \Phi = 0, \quad G = g_w, \quad Y = 0;$$

$$U = G = 1, \quad W = 0, \quad Y = \infty,$$

$$P[X, Z = \beta(X), T] = \varphi(X, T),$$

где предполагается, что динамический коэффициент вязкости линейно зависит от температуры, а последнее краевое условие соответствует заданной зависимости донного перепада давлений от времени.

III. Анализ субхарактеристик

Определим вначале характеристические (субхарактеристические) поверхности $\Omega(X, T)$, связанные с функцией $P(X, T)$, которая не известна заранее и определяется в процессе решения.

После замены переменных

$$X, Y, T \rightarrow \Omega, Y, T$$

краевая задача (4) принимает вид

$$b \left(S \frac{\partial U}{\partial \Omega} - \frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{\partial U}{\partial Y} + CA \frac{\partial P}{\partial \Omega} \right) = B,$$

$$b \left(S \frac{\partial G}{\partial \Omega} - \frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{\partial G}{\partial Y} - 2CAa \frac{\partial P}{\partial \Omega} \right) = D. \quad (5)$$

Здесь

$$S = U + a, a = \frac{\partial \Omega}{\partial T} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)^{-1}, \quad b = X \frac{\partial \Omega}{\partial X},$$

$$B = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{F}{4} \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{(\gamma - 1)A}{4\gamma} - X \frac{\partial U}{\partial T} \right],$$

$$C = \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma P},$$

$$D = \left[\frac{\partial^2 G}{\partial Y^2} + \frac{F}{4} \frac{\partial G}{\partial Y} + 2XCA \frac{\partial P}{\partial T} - X \frac{\partial G}{\partial T} \right].$$

Условие взаимодействия, связывающее распределение давления и толщины вытеснения пограничного слоя, может быть преобразовано следующим образом:

$$b(1 + a) \frac{\partial \Delta}{\partial \Omega} = c,$$

$$c = (2P)^{1/2} (\gamma - 1)^{-1/2} - 3 \frac{\Delta}{4} - X \frac{\partial \Delta}{\partial T}. \quad (6)$$

Производная в левой части равенства (6) может быть выражена в соответствии с приведённым выше выражением для толщины вытеснения:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \Omega} = \left[\frac{(\gamma - 1)C_0}{2\gamma P^2} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \left[\int_0^\infty \left(\frac{\partial G}{\partial \Omega} - 2U \frac{\partial U}{\partial \Omega} \right) dY - \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \Omega} \int_0^\infty AdY \right].$$

Для вычисления производных по переменной Ω , входящих в подынтегральные выражения, можно использовать задачу (4), откуда следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = -\frac{S}{P} \frac{\partial P}{\partial \Omega} + \int_0^Y \frac{A}{S^2} dY + S \int_0^Y \frac{B}{S^2} dY,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \Omega} = \frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{\partial G}{\partial Y} + \frac{D}{S} + \frac{2CAaT}{S} \frac{\partial P}{\partial \Omega}.$$

После ряда преобразований, используя соотношения (5)–(6), можно получить выражение

$$bN \frac{\partial P}{\partial \Omega} = PM,$$

где

$$M = \int_0^\infty BdY - S^2 \int_0^\infty \frac{B}{S^2} dY - \int_0^\infty \frac{D}{S} dY - \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} C_0 \right) c,$$

$$N = \int_0^\infty \frac{A^2}{S^2} dY - \frac{2}{(\gamma - 1)} \int_0^\infty AdY.$$

Условие, определяющее субхарактеристическую поверхность, имеет вид

$$\frac{(\gamma - 1)}{2} \int_0^\infty \frac{(G - U^2)^2}{(U + a)^2} dY - \int_0^\infty (G - U^2) dY = 0, \quad (7)$$

где параметр a определяет среднюю скорость звука или скорость перемещения субхарактеристической поверхности.

$$a = (\partial \Omega / \partial X)(\partial \Omega / \partial T)^{-1} = -dX/dT.$$

Выражение (7) представляет собой обобщение интеграла Пирсона [15]:

$$L = \int_0^\infty \frac{(G - U^2)}{U^2} dY - \int_0^\infty (G - U^2) dY, \quad (8)$$

знак которого зависит от средней величины числа Маха в пограничном слое. В среднем сверхзвуковому течению соответствует отрицательное значение интеграла, в среднем дозвуковому течению соответствует положительное значение интеграла.

Соотношение (7) имеет простой физический смысл. В гиперзвуковом пограничном слое существует средняя по профилю скорость потока. Тогда если средняя скорость звука меньше средней скорости потока, то течение в пограничном слое докритическое и возмущения распространяются вверх по потоку. Соответственно течение будет закритическим в случае, когда средняя скорость больше скорости звука.

Формула (7) может быть получена из (8) более простым способом. Перейдём от неподвижной системы координат X, T к подвижной X_1, T , перемещающейся вверх по потоку с постоянной скоростью:

$$X_1 = X + aT.$$

В подвижной системе координат скорость в пограничном слое становится равной $U_1 = U + a$, а разность $G_1 - U_1^2 = G - U^2$ не меняется, поскольку пропорциональна температуре газа. Подставляя выражения для функций U_1 и G_1 в формулу (8), получаем формулу (7) с точностью до замены U_1, G_1 на U, G .

Значению $a > 0$ ($a < 0$) соответствует звуковая волна, распространяющаяся вверх (вниз) по потоку. При этом первый интеграл в (7) сходится при $a < 0$, так как $|a| > 1$.

Следует отметить, что полученное выше выражение (7) выведено на основании анализа распространения малых возмущений, описывающихся задачей (4), в предположении, что профили скорости и энтальпии не меняются в первом приближении при распространении волны возмущения. В этом случае в качестве таких профилей использованы решения стационарной задачи для пограничного слоя в условиях сильного взаимодействия.

IV. Примеры решений

В качестве примера приведём зависимости скоростей распространения волн вверх по потоку от отношения удельных теплоёмкостей и от числа Прандтля, полученные для случая решения автономной системы уравнений.

Для нахождения автономных решений использована преобразованная система уравнений (4), в которой профили скорости и полной энтальпии не менялись. Поскольку изменение продольной координаты линейным образом входит в формулу для определения скорости распространения возмущений, то вид этой формулы также не меняется.

Профили скорости и полной энтальпии получены в результате решения следующей краевой задачи:

$$U'' + FU' + \frac{(\gamma - 1)}{\gamma}(G - U^2) = 0,$$

$$\frac{1}{Pr}G'' + FG' + 2\left(1 - \frac{1}{Pr}\right)(U'U'')' = 0, \quad (9)$$

$$\eta = 0, \quad U = F = 0, \quad G = G_w,$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad U = 1, \quad G = 1.$$

Представленная система уравнений выведена для случая линейной зависимости динамического коэффициента вязкости от температуры.

Полученные в результате численного решения задачи (9) профили скорости и полной энтальпии использованы для определения скорости распространения возмущений вверх по потоку.

На рис. 1 представлены зависимости скорости распространения возмущений вверх по потоку a от отношения удельных теплоёмкостей γ . Приведены три кривые, соответствующие различным

значениям числа Прандтля. Нижняя кривая соответствует числу Прандтля $Pr = 0,01$, средняя кривая единичному числу Прандтля $Pr = 1,0$ и, наконец, верхняя кривая соответствует числу Прандтля $Pr = 100,0$. Можно отметить слабую зависимость процессов распространения возмущений от числа Прандтля. Собственно влияние этого числа сказывается на средних характеристиках профилей скорости и энтальпии.

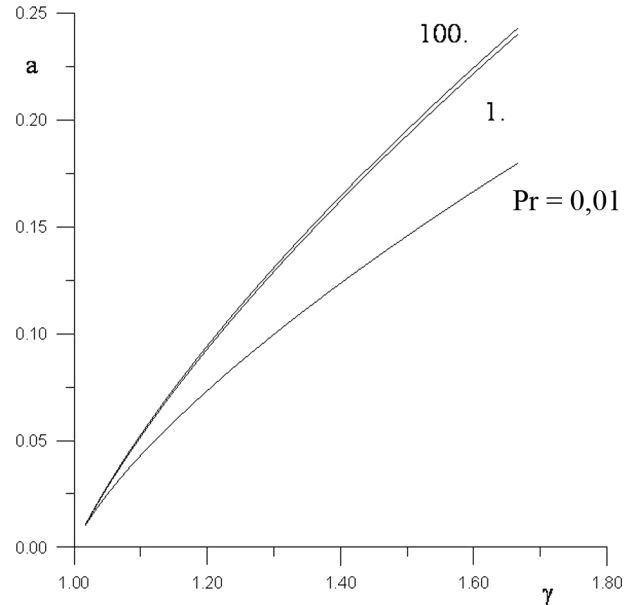


Рис. 1

Предполагалось, что отношение удельных теплоёмкостей меняется от единицы (предельный случай многоатомного газа) до $5/3$ (одноатомный газ). Можно видеть, что скорость распространения возмущений вверх по потоку a растёт с увеличением отношения удельных теплоёмкостей γ .

Исследуем особенности поведения решения при стремлении отношения удельных теплоёмкостей к единице. Численное решение показывает, что скорость распространения возмущений вверх по потоку также стремится к нулю.

Проанализируем поведение интегралов

$$\frac{(\gamma - 1)}{2} \int_0^\infty \frac{(G - U^2)^2}{(U + a)^2} d\eta - \int_0^\infty (G - U^2) d\eta = 0,$$

входящих в формулу для определения скорости распространения возмущений.

При $\gamma \rightarrow 1$ система уравнений, определяющая профили скорости и энтальпии, приводится для случая линейной зависимости динамического коэффициента вязкости от температуры к уравнению Блазиуса (первое из уравнений системы (9)), решение которого обозначим как u_0 и g_0 . При малых значениях поперечной координаты имеем

$$u_0 \approx b\eta + O(\eta^2), g_0 \approx g_w + O(\eta).$$

Первый из интегралов представим в виде

$$\begin{aligned} & \frac{(\gamma - 1)}{2} \int_0^{\infty} \frac{(g_0 - u_0^2)^2}{(u_0 + a)^2} d\eta = \\ & = \frac{(\gamma - 1)}{2} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{(g_0 - u_0^2)^2}{(u_0 + a)^2} - \frac{g_w^2}{(b\eta + a)^2} \right] d\eta + \right. \\ & \left. + \int_0^1 \frac{g_w^2}{(b\eta + a)^2} d\eta + \int_1^{\infty} \frac{(g_0 - u_0^2)^2}{(u_0 + a)^2} d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку скорость распространения возмущений стремится к нулю, можно привести интеграл к виду

$$\begin{aligned} & \frac{(\gamma - 1)}{2} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{(g_0 - u_0^2)^2}{(u_0)^2} - \frac{g_w^2}{(b\eta)^2} \right] d\eta + \right. \\ & \left. + \frac{g_w^2}{b} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \int_1^{\infty} \frac{(g_0 - u_0^2)^2}{(u_0)^2} d\eta \right\}. \end{aligned}$$

Введём далее обозначения

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{(\gamma - 1)}{2} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{(g_0 - u_0^2)^2}{(u_0)^2} - \frac{g_w^2}{(b\eta)^2} \right] d\eta - \frac{g_w^2}{b^2} \right\}, \\ I_1 &= \frac{(\gamma - 1)}{2} \int_1^{\infty} \frac{(g_0 - u_0^2)^2}{(u_0)^2} d\eta, \\ I_2 &= \int_0^{\infty} (g_0 - u_0^2) d\eta. \end{aligned}$$

В результате получим

$$I_0 + I_1 - I_2 = -\frac{(\gamma - 1)g_w^2}{2ba}.$$

Следовательно, при стремлении отношения удельных теплоёмкостей к единице скорость распространения возмущений вверх по потоку пропорциональна $\gamma - 1$:

$$a = \frac{(\gamma - 1)g_w^2}{2b(I_2 - I_1 - I_0)}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 07-01-00609 а).

Литература

1. Wang, K.C. On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary-layer equations // J. Fluid Mech. — 1971. — V. 48, Pt. 2. — P. 397–404.

2. Wang, K.C. Aspects of «multitime initial-value problem» originating from boundary layer equations // Phys. Fluids. — 1975. — V. 18, N. 8. — P. 951–955.

3. Войткова Г.В., Лунев В.В. О разрывных решениях уравнений пограничного слоя с положительным градиентом давления // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1991. — N. 5. — С. 53–62.

4. Lighthill, M.J. : On Boundary Layers and Upstream Influence // Proc. Roy. Soc. — 1953. — Ser. A., V. 217. — P. 476–507.

5. Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1969. — N. 4. — С. 53–62.

6. Stewartson, K., Williams P.G. Self-Induced Separation // Proc. Roy. Soc. — 1969. — Ser. A., V. 312. — P. 181–206.

7. Нейланд В.Я. К теории взаимодействия с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 2. Трёхмерные течения и треугольное крыло // Учен. зап. ЦАГИ. — 1974. — Т. 5, N. 3. — С. 28–39.

8. Нейланд В.Я. Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Успехи механики. — 1981. — Т. 4, вып. 2. — С. 3–62.

9. Smith F.T. On the high Reynolds number theory of laminar flows // IMA J. Appl. Math. — 1982. — V. 28, N. 3. — P. 207–281.

10. Нейланд В.Я. К теории взаимодействия с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения // Учен. зап. ЦАГИ. — 1974. — Т. 5, N. 2. — С. 70–79.

11. Crocco L. Consideration on the shock-boundary layer interactions // Proc. Conf. High-Speed Aeron. — New York, 1955. — Brooklin: Polytechn. Inst. — P. 75–112.

12. Нейланд В.Я. Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1970. — N. 4. — С. 40–49.

13. Хэйз У.Д., Пробстин Р.Ф. Теория гиперзвуковых течений. — М.: Изд.-во иностр. лит., 1962.

14. Chapman D.R., Kuehn, D., Larson H. Investigation of separated flows with emphasis on the effect of transition // NASA Rept. — 1958. — N. 1356.

15. Pearson H., Holliday J.B., Smith S.F. A Theory of the cylindrical ejector propelling nozzle // J. Roy. Aeron. Soc. — 1958. — V. 62, N. 574. — P. 746–751.

Поступила в редакцию 17.01.2010.