УДК 336.7

Ф.А. Дружинин[1,2], *В.В. Токарев*[3]

[1] Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2] ООО «Холдинг-Альфа»
[3] Институт системного анализа РАН

Инженерное проектирование и финансирование инноваций — инженерный оптимум

Продолжено изучение проблемы совместного решения вопросов физической и финансовой реализуемости и оптимизации инновационных проектов, начатое авторами в [1]. Осуществлен переход от потокового, динамического описания проблемы к объемному, статическому, что позволило получить аналитическое решение и выявить качественные особенности инженерной и финансово-инженерной задачи, приведенной к виду классической задачи математического программирования. Инженерная задача намеренно очищена от рыночных финансовых ограничений, поэтому её решение дает верхнюю оценку эффективности инновационного проекта, которую можно отождествить с народно-хозяйственной эффективностью.

Ключевые слова: финансовые потоки и объемы, дисконтирующие поправки, инженерный оптимум, математическое программирование, последовательная оптимизация.

Введение. Одновременное рассмотрение разных аспектов реального процесса в рамках единой оптимизационной задачи всегда не хуже по итоговым результатам их последовательного, а тем более независимого рассмотрения.

В планировании технических инноваций, чему и посвящена предлагаемая статья, есть, по крайней мере, два аспекта — физический и экономический. Хочется сделать новую систему технически совершенной и финансово реализуемой. Эти естественные устремления не всегда сонаправлены и требуют совместного оптимизационного анализа.

Однако сразу решать многоаспектную задачу сложно, поэтому прибегают к поэтапному решению. Сначала проводят предварительный инженерный анализ идеи технического новшества, а в случае успеха занимаются финансовой реализуемостью, не вмешиваясь уже в физическую сторону дела. У такой последовательной схемы есть разумное оправдание. Зачем заниматься финансовой реализуемостью инновационного проекта, если он нереализуем или плох по инженерным соображениям!

Конечно, начинать надо с физики, но даже и на первом этапе исследования нельзя забывать про экономику. Выбор технических параметров проектируемой системы следует сопроводить оценками будущей прибыли от проекта, а лучше сразу сориентировать этот выбор на максимизацию прибыли, неукоснительно обеспечивая физическую допустимость системы. Иначе, без экономических оценок, трудно будет привлечь инвесторов и кредиторов, без которых невозможно реализовать сколь-либо крупный инновационный проект.

На последующем этапе более тщательного рассмотрения проблемы финансовой реализуемости проекта, когда очертится круг потенциальных инвесторов и кредиторов, целесообразно вернуться к выбору технических параметров системы, а не считать их безоговорочно фиксированными по результатам предыдущего этапа инженерного проектирования, что и будет предпринято в последующей статье.

Формулировки инженерной и финансово-инженерной задач в объемных показателях. Под инженерной, здесь понимается задача максимизации прибыли соинвесторов инновационного проекта в рамках физических ограничений, но без учета условий его финансовой реализуемости из [1], кроме сохраненного условия о достаточной относительной доходности проекта для соинвесторов. Решение такой задачи сравнивается в последующей статье с решением финансово-инженерной задачи, в которой одновременно учитываются все финансовые и физические ограничения.

Чтобы обеспечить возможность получения аналитических решений соответствующих оптимизационных задач и облегчить параметрический анализ решений, здесь совершается переход от динамического описания в потоках, изложенного в [1], к статическому описанию в объемах, менее точному, но более простому.

Задачи формируются с позиций соинвесторов, которые теперь будут распоряжаться сразу величиной интегралов x,y,z,K от прежних потоковых управлений u,v,u_e,v_e из п.1 в [1]:

$$\begin{aligned} &x \doteq \int\limits_0^T u(t)dt, \quad y \doteq \int\limits_0^T v(t)dt, \\ &z \doteq \textstyle\sum_{e\in E} \displaystyle\int\limits_0^T u_e(t)dt, \quad K \doteq \textstyle\sum_{e\in E} \displaystyle\int\limits_0^T v_e(t)dt, \end{aligned} \tag{1}$$

где x — кумулятивный объем потока первичных расходов u на проектирование и производство системы (первичные расходы управляются опосредованно — через выбор физических параметров и объема производства проектируемой системы); y — объем потока первичных доходов v от эксплуатации системы, которые могут использоваться соинвесторами на выплату дивидендов и на расплату с кредиторами; z — объем суммы потоков выплат u_e кредиторам $e \in E$, включающих возврат ранее полученного кредита и начисленных на него процентов; то есть вторичные расходы соинвесторов; K — объем суммы потоков кредитов v_e, запрашиваемых и получаемых соинвесторами, то есть вторичные доходы соинвесторов.

Ограничения на объемные управления x,y,z,K из (1) формируются интегрированием соответствующих неравенств из п. 2 в [1] и постулированием естественных свойств объемных вариантов отображений, введенных ранее в п. 1 из [1] без конкретизации этих свойств. Принадлежность ограничения к той или иной задаче помечается двузначным параметром k: $k = 1$ — для инженерной задачи и $k = 2$ — для финансово-инженерной.

Физические ограничения первичных расходов x:

$$a \leqslant x \leqslant b \quad (k = 1{,}2), \tag{2}$$

где $a = fix \geqslant 0$ — постоянная часть затрат на проектирование и производство, независящая от

физических параметров и объема производства системы; $b = fix \geqslant a$ — верхний физически допустимый уровень затрат на проектирование и производство;

Физические ограничения первичных доходов y:

$$0 \leqslant y \leqslant \varphi(x) \quad (k = 1{,}2), \tag{3}$$

где $\varphi(x) \geqslant 0$ — известный верхний предел доходов от эксплуатации системы, монотонно возрастающий и вогнутый как функция от первичных расходов x (отсчитывается от нуля в точке a минимальных расходов из (2): $\varphi(a) = 0$).

Такой вид функции $\varphi(x)$ соответствует гипотезе о рациональном расходовании средств x на проектирование и производство системы, обеспечивающем повышение ее эффективности с ростом x, но с убывающей скоростью, например

$$\varphi(x) \doteq l_1\sqrt{x-a}, \quad \text{где} \quad l_1 = fix > 0 \quad (k = 2). \tag{4}$$

Условия достаточности кредита K для соинвесторов и его допустимости для кредиторов:

$$K \geqslant x - S, K \geqslant 0, K \leqslant m \quad (k = 2), \tag{5}$$

где $S = fix > 0$ — начальный запас собственных средств у соинвесторов,

$m = fix > 0$ — предельные финансовые возможности всех потенциальных кредиторов (в сумме).

Практически, избыточный кредит невыгоден соинвесторам из-за увеличения последующих долговых выплат. Но теоретически, увеличение долговых выплат может парироваться быстрым дисконтирующим снижением ценности будущих денег, и тогда избыточный кредит может оказаться привлекательным для соинвесторов. Чтобы заранее не исключать такую возможность, в условиях (5) использовано ограничение кредита снизу истинными потребностями соинвесторов. При этом вместо одного нелинейного неравенства $K \geqslant \max\{(x - S); 0\}$ записаны два линейных: $K \geqslant x - S$ и $K \geqslant 0$, эквивалентных ему в совокупности.

Договорные ограничения о выплатах z соинвесторами долгов кредиторам:

$$z \geqslant \psi(K)(k = 2), \tag{6}$$

где $\psi(K) \geqslant 0, \psi(0) = 0$ — известная монотонно возрастающая выпуклая функция от размера кредита K, взятого соинвесторами, например, линейная:

$$\psi(K) \doteq l_2 K, l_2 = fix > 1. \tag{7}$$

Предполагается, что условия договоров соинвесторов с кредиторами обеспечивают кредиторам достаточный уровень доходности кредитования проекта, поэтому надобность отдельного неравенства типа (6б) из [1] в инженерно-финансовой задаче ($k = 2$) отпадает.

Замечание 1. Исходное для (6) условие (3) из [1] было записано в виде ограничения снизу потока долговых выплат. Ускоренные выплаты кредита, допускаемые этим исходным потоковым неравенством, могут оказаться выгодны соинвесторам как средство экономии на процентах, если договор с кредитором это позволяет. В объемах выплат такие тонкости отследить трудно, но все равно условие (6) записано в виде неравенства. Конечно, в оптимальном для соинвесторов варианте условие (6) реализуется как равенство, но и неравенство оптимальности не помешает.

К тому же неравенство иногда удобнее, чем равенство, по техническим соображениям, когда функция $\psi(K)$ задается по участкам с различным аналитическим представлением $\psi_1(K), \psi_2(K), \ldots$, таким что $\psi(K) = \max\{\psi_1(K); \psi_2(K); \ldots\}$, а функции $\psi_1, \psi_2, \ldots$ определены всюду при $K \geqslant 0$. Тогда неравенство $z \geqslant \psi$ эквивалентно системе неравенств $z \geqslant \psi_1, z \geqslant \psi_2, \ldots$ без указания участков активности, в то время как равенство $z = \psi$ пришлось бы расписывать по участкам.

Итоговый баланс инвестиционного счета соинвесторов:

$$(S + K + y) - (x + z) \geqslant 0 \qquad (k = 2), \tag{8}$$

требующий неотрицательности сальдо счета в результате всех поступлений $(S + K + y)$ и всех списаний $(x + z)$ за все время жизни проекта.

Выполнение неравенства (8) гарантирует неотрицательности счета соинвесторов, вообще говоря, только в конечный момент времени $t = T$. Но если при тех же самых объемных показателях, удовлетворяющих неравенству (8), соинвесторам удастся договориться с кредиторами о своевременном выделении суммы кредитов K в пределах (5) и о распределении объема выплат z из (6), согласованном с динамикой первичных доходов y из (3), то неотрицательность счета соинвесторов будет обеспечена и во все промежуточные моменты времени.

Например, соинвесторы договариваются с кредиторами о следующем:

1) кредиты в общем объеме K предоставляются импульсно в момент истощения начального запаса S собственных средств соинвесторов либо организуется кредитная линия, компенсирующая поток первичных затрат;

2) все выплаты по взятым кредитам заканчиваются не позже момента времени T, но они не производятся, пока интенсивность потока первичных доходов от реализации проекта не начнет превосходить интенсивность потока первичных расходов, а скорость выплат нигде не будет превышать разности между интенсивностями этих потоков.

Замечание 2. В подтверждение достаточности такого договора проинтегрируем дифференциальное уравнение динамики текущего счета соинвесторов $S(t)$ с одним кредитором e:

$$S^{\cdot}(t) = v(t) - u(t) + v_e(t) - u_e(t), \qquad S(0) = S = fix$$

для случая ступенчатых потоков первичных расходов $u(t)$, доходов $v(t)$ и долговых выплат $u_e(t)$ при импульсном потоке кредитования, заданного правосторонней δ-функцией, таких что:

$$u(t) \doteq \begin{cases} (x/t_*) \text{ при } 0 \leqslant t < t_*, \\ 0 \text{ при } t_* \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \quad v(t) \doteq \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant t < t_*, \\ y/(T-t_*) \text{ при } t_* \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \quad \text{где } t_* = fix \in (0,T),$$

$$u(t) \doteq \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant t < t_*, \\ z/(T-t_*) \text{ при } t_* \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \quad v_e(t) \doteq K\delta(t-t_1), \text{ где } t_1 \in (0,t_*) : S(t_1) = 0,$$

После интегрирования уравнения для $S^{\cdot}$ по указанным участкам постоянства потоков при соблюдении непрерывности функции $S(t)$ убедимся в неотрицательности решения на всех характерных временных участках, если выполняются неравенства (5), (6), и (8) для объемов x,y,z и K, а именно: $m \geqslant K = x - S > 0, y \geqslant z$, тогда

на участке $0 \leqslant t < t_1 : u(t) = (x/t_*), v(t) = u_e(t) = v_e(t) = 0 \Rightarrow$

$$S(t) = S - \frac{x}{t_*}t > 0, \text{ так как } t_1 = \frac{S}{x}t_*;$$

на участке $t_1 \leqslant t < t_* : u(t) = (x/t_*), v(t) = u_e(t) = 0, v_e(t) = K\delta(t-t_1) \Rightarrow$

$$S(t) = K - \frac{x}{t_*}(t-t_1) = \left(1 - \frac{t}{t_*}\right)x > 0, \text{ так как } K = x - S,\ t_1 = \frac{S}{x}t_*;$$

на участке $t_* \leqslant t \leqslant T : u(t) = v_e(t) = 0,\ v(t) = y/(T-t_*),\ u_e(t) = z/(T-t_*) \Rightarrow$

$$S(t) = \frac{y-z}{T-t_*}(t-t_*) \geqslant 0, \text{ так как } y \geqslant z.$$

Таким образом, в рассмотренном простом, но довольно типичном случае удается за счет необременительных соглашений с кредиторами о распределении во времени объемов кредитования и долговых выплат обеспечить достаточность «объемных» ограничений (5), (6), и (8), в общем случае лишь необходимых для поточечной неотрицательности текущего счета соинвесторов. Такой же результат достижим и в более сложных ситуациях.

Ограничение по доходности проекта для соинвесторов (подобное условие для кредиторов считается включенным в договорные ограничения (6)):

$$yr_y + (k-1)Kr_K \geqslant [xr_x + (k-1)zr_z]I \quad (k = 1,2), \tag{9}$$

где $I = fix > 1$ — уровень доходности проекта, приемлемый для соинвесторов;

$r_x,r_y,r_z,r_K = fix \in (0;1)$ — поправочные множители к объемам x,y,z и K, приближенно учитывающие дисконтирование соответствующих финансовых потоков u,v,u_e,v_e из (1).

В своем исходном «потоковом» варианте ограничение по доходности проекта звучит так: отношение кумулятивного объема всех дисконтированных доходов к объему всех дисконтированных расходов должно быть не меньше желаемого уровня [2, 3].

Объемы x,y,z и K согласно их определениям (1) вычисляются интегрированием недисконтированных финансовых потоков, а в исходном ограничении доходности, приведенном в (6а) из [1], фигурируют дисконтированные потоки. Дисконтирующие поправки для объемов можно заранее подсчитать, если задать форму потока во времени и вычислить затем нужные интегралы.

Ниже это сделано в абстрактных обозначениях для ступенчатого и импульсного потоков, характерных для процессов инвестирования и уже использованных в замечании 2:

для ступенчатого потока с интенсивностью q —

$$q(t) = \begin{cases} \frac{Q}{t_1-t_0} \text{ при } 0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant T \\ 0 \text{ при } t < t_0 \text{ или } t > t_1, \end{cases} \quad \text{где } Q \doteq \int\limits_0^T q(t)dt - \text{недисконтированный объем},$$

дисконтированный объем: $\int\limits_0^T q(t)e^{-\lambda t}dt = Q\frac{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda t_1}}{(t_1-t_0)\lambda}$,

поправка: $r = \frac{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda t_1}}{(t_1 - t_0)\lambda} \approx 1 - \frac{1}{2}(t_0 + t_1)\lambda$ при $\lambda t_1 \ll 1$;
для импульсного потока —

$$q(t) \doteq Q\delta(t - t_1), \int_0^T q(t)dt = Q, \int_0^T q(t)e^{-\lambda t}dt = Qe^{-\lambda t_1},$$

поправка: $r = e^{-\lambda t_1} \approx 1 - \lambda t_1$ при $\lambda t_1 \ll 1$.

Проделав такую работу со всеми потоками, нужными для (9), и задав их форму, как в замечании 2, можно получить следующие поправки на дисконтирование для перехода к «объемному» неравенству (9) от исходного «потокового» неравенства (6а) из [1]:

$$r_x = \frac{1 - e^{-\lambda t_*}}{\lambda t_*} \approx 1 - \frac{\lambda}{2} t_*, r_y = r_z = \frac{e^{-\lambda t_*} - e^{-\lambda T}}{(T - t_*)\lambda} \approx 1 - \frac{\lambda}{2}(T + t_*),$$

$$r_K = e^{-\lambda t_1} \approx 1 - \lambda t_1, t_* = (S/x)t_1 \text{ при } x > S,$$

где все приближенные выражения получены из линейных разложений экспонент в ряд Тэйлора в окрестности нуля при $\lambda T \ll 1$.

Замечание 3. Поправочные множители, используемые здесь для пересчета дисконтированных финансовых потоков в объемы, меняются при изменении формы распределения интенсивности финансовых потоков во времени. Но эти распределения должны получаться из решения динамической задачи в потоках, а не предугадываться или постулироваться, так что поправочные множители к объемам следует воспринимать как способ приближенного дисконтирования.

Однако исходная процедура дисконтирования финансовых потоков, как и всякая модель поведенческих характеристик человека, не может претендовать на высокую точность. В самом деле, «сегодняшние» деньги могут быть неудачно использованы индивидуумом, а в каком-то периоде ему остро потребуются «завтрашние» деньги для преодоления возможных кризисных обстоятельств. Если индивид хотя бы приближенно такое предвидит, то полезность завтрашних денег может им оцениваться выше, чем полезность сегодняшних.

В связи со сказанным поправочное дисконтирование объемных финансовых показателей можно представлять не как приближенное следствие дисконтирования финансовых потоков, а как исходный постулат, тоже в какой-то мере приближенный к реальности.

Чистый дисконтированный доход, максимизируемый соинвесторами:

$$F_K \doteq [yr_y + (k - 1)\mathrm{K}r_K] - [xr_x + (k - 1)zr_z](k = 1{,}2). \tag{10}$$

Этот доход здесь вычисляется тоже в объемах x,y,z и K из (1) с дисконтирующими множителями r_x,r_y,r_z и r_K, расшифрованными после ограничения (9). Согласно экономической теории [2, 3] он представляет собой разность между суммой всех дисконтированных доходов, содержащейся в первой квадратной скобке (10), и суммой дисконтированных расходов, стоящей во второй квадратной скобке.

Итоговые формулировки оптимизационных задач для соинвесторов:
инженерная задача ($k = 1$) —

$$\begin{gathered} F_1 = yr_y - xr_x \Rightarrow \max \text{по} (x,y) \in D_1, \\ \text{где} D_1 \doteq \{(x,y) : \text{удовлетворяют условиям } (2),(3),(9)\}; \end{gathered} \tag{11}$$

финансово-инженерная задача ($k = 2$) —

$$\begin{aligned} &F_2 = (yr_y + \mathrm{K}r_K) - (xr_x + zr_z) \Rightarrow \max \text{по } (x,y,z,K) \in D_2, \\ &\text{где } D_2 \doteq \{(x,y,z,K) : \text{удовлетворяют условиям } (2), (3), (5), (6), (8), (9)\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Обе задачи конечномерны и нелинейны, но доступны сравнительному аналитическому исследованию с буквенными параметрами.

Решение инженерной задачи. Решения обеих задач (11) и (12) строятся по схеме последовательной оптимизации, подробно изложенной в [4]. Сначала фиксируются все переменные, кроме одной, и аналитически находится максимум целевой функции по выделенной переменной в пределах диапазона ее допустимости для всевозможных значений остальных, фиксированных, переменных. Найденный максимум целевой функции максимизируется по очередной переменной при фиксированных оставшихся и так далее, пока состав переменных не будет исчерпан.

Если схема последовательной оптимизации дает решение, то оно и будет решением исходной задачи одновременной оптимизации. Возможные тонкости с отсутствием решений той или иной задачи, не встретившиеся ниже, проанализированы в [4].

Для облегчения восприятия все дисконтирующие множители в задачах (11) и (12) положены единичными.

$$r_x = r_y = r_z = r_K = 1. \tag{13}$$

Временный отказ от дисконтирования, принятый в (13) по чисто техническим причинам не меняет характера решаемых задач.

Инженерная задача (11) остается двумерной выпуклой с одним нелинейным ограничением:

$$\begin{array}{l} F_1(x,y) = y - x \Rightarrow \max \text{по}(x,y) \in D_1 : \\ \text{а)} a \leqslant x \leqslant b - \text{физические ограничения расходов,} \\ \text{б)} 0 \leqslant y \leqslant \varphi(x) - \text{физические ограничения доходов,} \\ \text{в)} y \geqslant Ix - \text{условие достаточной прибыльности,} \end{array} \tag{14}$$

где $a \geqslant 0, b > a, I > 1$ — фиксированные параметры, а $\varphi(x)$ — заданная функция максимальных доходов (монотонно возрастающая, выпуклая и дифференциируемая).

Множество допустимости D_1 в его невырожденном варианте непусто и представляет собой криволинейный треугольник, показанный на рис. 1. Там же тонкими прямыми линиями нанесены линии уровня целевой функции $F_1(x,y) = c = fix : y = x + c$ и стрелочкой изображен ее градиент: $\nabla F_1 = (-1; 1)$.

Из геометрических соображений ясно, что в приведенном варианте решение задачи (14) достигается в точке касания (x_1^*, y_1^*) криволинейного участка границы $y = \varphi(x)$ с самой «высокой» из достижимых линий уровня целевой функции: $y = x + c^*$. При более сильном ограничении $x \leqslant b < x_1^*$ решение смещается в правую угловую точку криволинейной границы.

Наличие или отсутствие решения задачи (14) определяется выполнением или невыполнением единственного условия непустоты ее множества допустимости D_1. Это условие, в общем случае необходимое, здесь оказывается и достаточным для существования решения, поскольку все остальные достаточные условия из теоремы Вейерштрасса для задачи (14) всегда выполняются: множество D_1 ограничено и замкнуто, а целевая функция F_1 непрерывна.

Геометрическое отыскание решения задачи (14), произведенное на рис. 1, подтверждается далее аналитически по схеме последовательной оптимизации. При этом условие непустоты множества допустимости D_1 расшифровывается тоже последовательно: сначала по одной переменной, а затем — по другой.

1°. Оптимизация доходов y при фиксированных расходах x. Фиксируется некоторое значение переменной x и по неравенствам из (14) строится соответствующее множество допустимости для переменной y:

$$\begin{array}{c} Y(x) \doteq \{y : (x,y) \in D_1 \text{ при } x = fix\} = [\underline{y}(x), \bar{y}(x)] \neq \emptyset, \\ \text{где } \underline{y}(x) \doteq Ix, \bar{y}(x) = \varphi(x). \end{array} \tag{15}$$

Естественно, что подходят только такие значения x, для которых $Y_1(x) \neq \emptyset$, и это требование будет присоединено, к исходным ограничениям на x из (14) при оптимизации по x.

Максимум по доходам y линейной функции прибыли $F_1 = (y - x)$ из (14) при фиксированных расходах x достигается на верхней границе $\bar{y}(x)$ из (15) возможных доходов:

$$\begin{array}{c} f_1(x) \doteq \max_{y \in Y(x)} F_1(x,y) \doteq F_1[x, \tilde{y}(x)] = \max_{y \in [\underline{y}, \bar{y}]} (y - x) = \bar{y} - x = \varphi(x) - x, \\ \text{где } \tilde{y}(x) = \varphi(x), \underline{y}(x) \leqslant \bar{y}(x), \end{array} \tag{16}$$

как и можно было ожидать по экономическому смыслу.

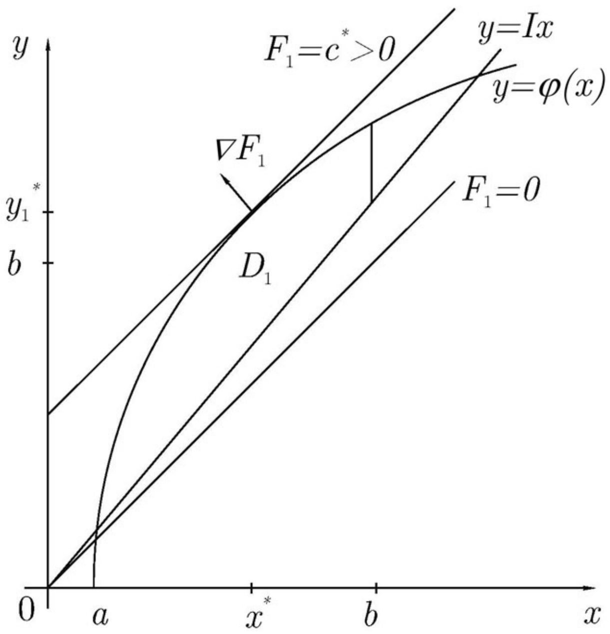

Рис. 1. Множество допустимости D_1 инженерной задачи и линии уровня F_1 = const её целевой функции

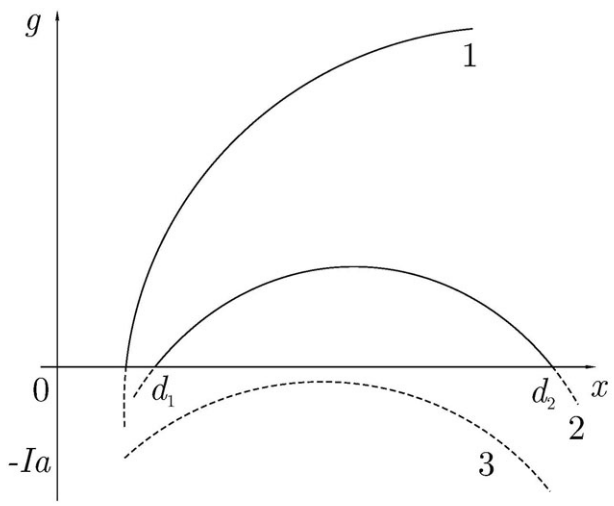

Рис. 2. Возможные варианты поведения ограничивающей функции $g(x) = \varphi(x) - Ix$ из (15) при различных значениях желаемой доходности

$I: \quad 1) I_1 = 0{,}2) I_2 > I_1{,}3) I_3 > I_2$

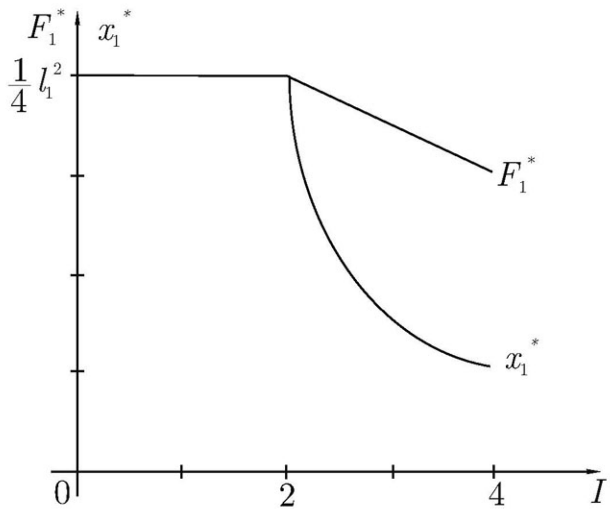

Рис. 3. Падение максимальной прибыли F_1^* и оптимальных расходов x_1^* при закритическом увеличении индекса I желаемой доходности

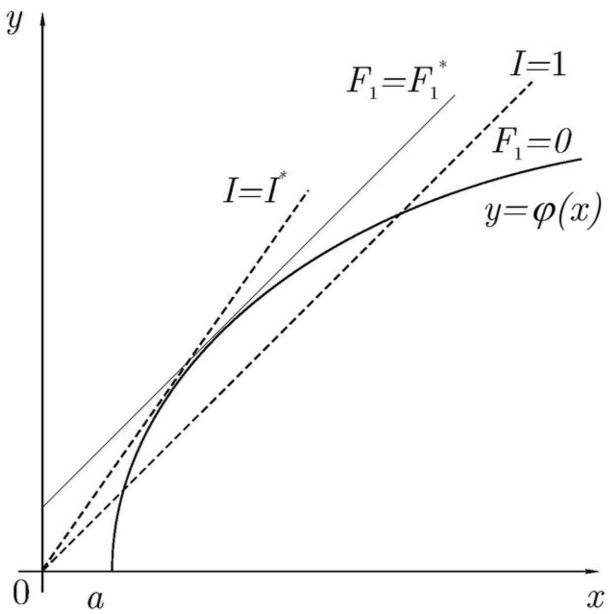

Рис. 4. Смещение светлой точки максимума индекса доходности к началу координат по сравнению с темной точкой максимума прибыли F_1^*

2°. Оптимизация расходов x при оптимальных доходах $y = \tilde{y}(x)$. Строится множество X допустимых значений оставшейся переменной x, удовлетворяющих исходным неравенством из (14), наложенным непосредственно на x, а также обеспечивающих непустоту множества (15) для ранее оптимизированной переменной y:

$$X = \{x \in [a{,}b] : g(x) \doteq \varphi(x) - Ix \geqslant 0\} \neq \emptyset. \tag{17}$$

Непустота множества допустимости X в экономических терминах означает, что хотя бы один физически реализуемый вариант проекта, индексируемый своими расходами, оказывается достаточно доходным для соинвесторов.

Чтобы аналитически построить множество (17) нужно разрешить неравенство $g(x) \geqslant 0$ относительно x и найти пересечение множества решений этого неравенства с отрезком $[a{,}b]$.

Функция $\varphi(x)$ максимально возможных доходов определена на полуоси $x \geqslant a$ и по предположению непрерывна, выпукла и монотонно возрастает начиная с $\varphi(a) = 0$. Поэтому уравнение $g(x) = \varphi(x) - Ix = 0$ будет иметь один d_1, два d_1,d_2 или ни одного корня по мере увеличения параметра I, что иллюстрируется на рис. 2.

Все три возможных варианта можно охватить единой записью:

$$d_1 \leqslant d_2 : g(d_1) = g(d_2) = 0, g(x) > 0 \ \forall x \in (d_1,d_2), \tag{18}$$

если условно положить

$$d_2 = +\infty, \text{ когда } g(x) > 0 \forall x > d_1, \text{ и } d_1 = +\infty, \text{ когда } g(x) < 0 \ \forall x \geqslant a. \tag{19}$$

Для примера (4):

$$\begin{gathered} g(x) \doteq l_1\sqrt{x-a} - \underline{I}x, \sqrt{d_{1,2}-a} = \tfrac{l_1}{2I} \mp \sqrt{(l_1/2I)^2 - a}, \text{ когда } (l_1/2I)^2 \geqslant a, \\ d_1 = +\infty, \text{ когда } (l_1/2I)^2 < a. \end{gathered} \tag{20}$$

Пересечение отрезка $[a,b]$ с обобщенным отрезком $[d_1,d_2]$ из (18), (19) дает в качестве множества допустимости (17) либо непустой отрезок $[\underline{x},\bar{x}]$, вырождающийся иногда в точку, либо пустое множество:

$$\begin{gathered} X = [\underline{x},\bar{x}] \neq \emptyset, \text{ если } b \geqslant d_1, \text{где } \underline{x} \doteq d_1 > a, \bar{x} \doteq \min\{d_2; b\}; \\ X = \emptyset, \text{ если } b < d_1. \end{gathered} \tag{21}$$

Пустым множество X получается, когда желаемый уровень доходности I назначен слишком высоким, отчего всюду $\varphi(x) < Ix$, что обозначено в (19) как $d_1 = +\infty$, или когда по каким-то причинам максимальная физически допустимая величина расходов b оказывается слишком малой настолько, что доходы не успевают превзойти расходы в желаемое число раз I. Оба эти варианта отсутствия решения охватываются в (21) единственным неравенством $b < d_1$ с использованием второй условности из (19). Нижняя граница расходов $x = \underline{a}$ множеству X не принадлежит, поскольку всегда $g(a) = -Ia < 0$, так как $\varphi(a) = 0$.

На непустом отрезке $[\underline{x},\bar{x}]$ после максимизации по y целевая функция согласно (16) сохраняет свойства непрерывности и строгой выпуклости, постулированные для функции максимальных доходов $y = \varphi(x)$. Но получившаяся функция прибыли $f_1(x) = \varphi(x) - x$ не обязательно будет монотонной по расходам x. Подобно ограничивающей функции $g(x) = \varphi(x) - Ix \leqslant f_1(x)$ при $I \geqslant 1$ функция $f_1(x)$ может остаться монотонно возрастающей, как кривая 1 на рис. 2, или может сначала возрастать, а потом убывать, как кривая 2 на рис. 2.

Максимум такой функции достигается в единственной точке x_1^*, расположенной на правой границе $\bar{x}$ отрезка допустимости (в первом случае) или внутри этого отрезка, в точке смены возрастания функции $f_1(x)$ на ее убывание (во втором случае), что для дифференцируемых функций $\varphi(x)$ может быть записано следующим образом:

$$\begin{gathered} \max_{x\in X} f_1(x) = \max_{x\in[\underline{x},\bar{x}]}[\varphi(x) - x] \doteq f_1(x_1^*) \doteq f_1^*, \\ \text{где } x_1^* = \begin{cases} \bar{x}, \text{ если} \varphi'(\bar{x}) \geqslant 1, \\ \tilde{x}, \text{ если} \varphi'(\bar{x}) \leqslant 1, \end{cases} \ \tilde{x} : \varphi'(\tilde{x}) = 1, \bar{x} = \min\{d_2; b\}. \end{gathered} \tag{22}$$

При этом согласно (16) оптимальный доход y_1^* и максимальная прибыль F_1^* оказываются таковыми:

$$y_1^* = \tilde{y}(x_1^*) = \varphi(x_1^*), F_1^* \doteq \max_{(x,y)\in D_1} F_1(x,y) = f_1(x_1^*) = \varphi(x_1^*) - x_1^*. \tag{23}$$

Полная конкретизация решения (22), (23) для иллюстративного примера (4) функции $\varphi(x)$ с использованием корней d_1 и d_2, найденных в (20), дает на самом широком отрезке $[a,b]$ физически допустимых расходов с $a = 0$ и $b \geqslant d_2$ следующие результаты:

$$\begin{gathered} \text{если } I \geqslant 2, \text{ то} \varphi'(\bar{x}) \geqslant 1 \text{ и } x_1^* = \left(\tfrac{l_1}{I}\right)^2, y_1^* = \tfrac{l_1^2}{I}, F_1^* = \tfrac{l_1^2}{I}\left(1 - \tfrac{1}{I}\right); \\ \text{если } I \ \leqslant 2, \text{то} \varphi'(\bar{x}) \leqslant 1 \text{ и } x_1^* = \tfrac{1}{4}l_1^2, y_1^* = \tfrac{1}{2}l_1^2, F_1^* = \tfrac{1}{4}l_1^2. \end{gathered}$$

В процессе последовательной оптимизации (15) — (23) найдено решение (22), (23) и установлено точное условие (21) его существования. Это же условие согласно его построению (15), (17) — (21) необходимо и достаточно для непустоты множества D_1 в исходной задаче (14) одновременной оптимизации, а значит, — и для существования решения задачи (14).

Далее, прямой проверкой можно убедиться в допустимости решения (22), (23) для задачи (14): $(x_1^*,y_1^*) \in D_1$, а любое допустимое отклонение от этого решения по его построению исходную целевую функцию не увеличивает:

$\forall (x,y) \in D_1 F_1(x_1^*,y_1^*) - F_1(x,y) = [F_1(x^*,y^*) - F_1(x,\tilde{y}(x))]_1 + [F_1(x,\tilde{y}(x)) - F_1(x,y)]_2 \geqslant 0,$
так как$[...]_1 = [\max_{x \in X} f(x)] - f(x) \geqslant 0, [...]_2 = [\max_{y \in Y(x)} F_1(x,y)] - F_1(x,y) \geqslant 0,$ следовательно решение (22), (23) оптимально и для исходной задачи (14).

Обратим внимание на экономическую особенность построенного оптимального решения (22), (23) инженерной задачи (14). Эта задача в дополнение к физическим ограничениям (2), (3) содержит единственное финансовое ограничение (9) о достаточной доходности проекта для соинвесторов. Такое ограничение уменьшает величину прибыли $f_1(x)$ в граничном варианте оптимального решения (22): $x_1^* = \bar{x} = d_2$ при $d_2 \leqslant b$, не позволяя прибыли дорасти до величины $f_1(\tilde{x}) > f_1(d_2)$, которая была бы обеспечена в точке $\tilde{x}$ равенства скоростей роста доходов и расходов при отсутствии ограничения (9). На внутренний вариант максимума, представленный в нижней строке (22), это ограничение не влияет.

Негативное воздействие на максимальную прибыль F_1^* ограничения по доходности проекта начинает проявляться с некоторого порогового значения I_1 индекса I желаемой доходности в неравенстве (9), и оно усиливается с ростом I. Это наглядно видно из решения примера, отображенного на рис. 3. Там при $I < I_1 = 2$ ограничение (9) в точке x_1^* максимума функции $f(x)$, совпадающей со стационарной точкой $\tilde{x}$, неактивно. А затем с увеличением параметра I, стационарная точка $\tilde{x} = 0{,}25 l_1^2$ становится недопустимой по этому ограничению. Оптимальные расходы x_1^* приходится уменьшать, теряя в величине прибыли из-за соответствующего падения доходов y_1^*.

Казалось бы, и целевая функция прибыли F_1 и желаемая доходность I действуют в одну сторону — в сторону увеличения доходов y. Но первое действие абсолютное, а второе-относительное. Линии уровня прибыли $F_1 = y - x = \xi = \mathrm{const}$ как видно из рис. 4, идут более полого, чем линии уровня индекса доходности $I = y/x = \eta = \mathrm{const} > 1$. По этой причине точка максимума прибыли на множестве $y \leqslant \varphi(x)$, показанная темным кружком, располагается в зоне больших и расходов, чем точка максимума индекса доходности, показанная светлым кружком (в силу вогнутости функции $\varphi(x)$ физически возможных доходов).

Конечно, должны быть веские основания, чтобы предпочесть максимум относительной доходности максимуму абсолютного объема прибыли. Например, когда есть возможность участия в нескольких проектах с высокой относительной доходностью, обещающих в сумме большой объем прибыли.

Заключение. 1. Условия финансовой реализуемости инновационных проектов, представленные в [1], после их преобразований из интенсивностей финансовых потоков в кумулятивные объемы, то есть в интегралы от интенсивностей за все время жизни проекта, становятся обозримыми и пригодными для получения аналитических решений.

Однако полученные условия объемной допустимости только необходимы, но в общем случае еще не достаточны для выполнения условий потоковой допустимости в каждый момент времени. Тем не менее в классе кусочно-постоянных и импульсных потоков пример объемно-допустимого решения удалось развернуть во времени в поточно-допустимое.

При переходе от экспоненциально дисконтированных финансовых потоков к кумулятивным объемам должны быть использованы поправочные дисконтирующие множители, вычисленные в статье для кусочно-постоянных и импульсных потоков.

Более общие условия возможности обратного перехода от финансово-допустимых объемов к допустимым потокам требуют дальнейшего анализа.

2. Переход от финансовых потоков к объемам позволил сформулировать сравниваемые далее две задачи инженерной оптимизации и финансово-инженерной оптимизации в виде задач математического программирования. В инженерной задаче учитываются только физические условия

допустимости управлений и отсутствуют условия финансовой реализуемости проекта, а в финансово-инженерной учитываются все условия и предусматривается возможность финансирования проекта за счет собственных средств соинвесторов, за счет привлекаемых кредитов и доходов от реализации проекта. В инженерной задаче максимизируется первичная прибыль, а в финансово-инженерной — итоговая. Первичная прибыль — это разность между доходами от реализации проекта и расходами на проектирование и производство новшества. В итоговой прибыли из первичной вычитаются еще проценты за кредит.

Для получения аналитических решений обеих задач в рамках экономически естественных предположений оказался удобным метод последовательной оптимизации, позволивший не только строить максимизирующие стратегии для каждого управления, но и находить точные границы их существования.

3. Добавление в инженерную задачу условия по желательному уровню первичной доходности проекта, ограничивающего снизу отношение первичных доходов к первичным расходам, сужает множество допустимых первичных расходов. В результате слишком высокий уровень доходности оказывается недопустимым.

Сначала уровень желаемой доходности не сказывается на инженерном оптимуме, располагающемся во внутренней стационарной точке отрезка допустимости первичных расходов, где совпадают скорости роста доходов и расходов. Рост желаемой доходности выше некоторого порогового уровня (в иллюстративном примере он оказался весьма высоким — равным двукратному превышению доходов над расходами) приводит к недопустимости стационарной точки и к падению максимального объема первичной прибыли (в примере — к линейному по индексу желательной доходности).

У разработчиков проекта должны быть веские основания, чтобы пойти на увеличение относительной доходности проекта (для привлечения соинвесторов) в ущерб абсолютному объему прибыли. Например, они должны иметь возможность предложить соинвесторам еще один проект с высокой доходностью, обещающий в совокупности с первым проектом прибыль не меньшую, чем у одного первого проекта при допороговом уровне его доходности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-07-00343-а).

Литература

1. *Дружинин Ф.А., Токарев В.В.* Финансовая реализуемость инновационных проектов в игровой постановке // Труды МФТИ. — 2011. — Т. 3, № 2. — С. 84–96.

2. *Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов: Теория и практика. — М.: Дело, 2002.

3. *Орлова Е.Р.* Оценка инвестиций. — М.: Международная академия оценки и консалтинга, 2005 — 385 С.

4. *Соколов А.В., В.В. Токарев.* Методы оптимальных решений. Т. 1. — М.: Физматлит, 2010. — 562 с.

Поступила в редакцию 20.09.2011.