Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Задачи про исчисление предикатов

1. Выведите в исчислении предикатов следующие формулы:

a) $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$;
b) $\forall x\forall y\varphi \to \forall y\forall x\varphi$;
c) $\exists x\exists y\varphi \to \exists y\exists x\varphi$;
d) $\exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$;
e) $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
f) $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
g) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$;
h) $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$;
i) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$;
j) $(\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$;
k) $(\forall x\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$;
l) $(\exists x\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$;
m) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
n) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$;
o) $(\forall x\varphi \to \forall x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$;
p) $\forall x\exists y\forall z A(x,y,z) \to \exists z\forall x\exists y A(x,y,z)$;
q) $\forall y\exists x(A(x) \wedge B(y)) \to \exists x\forall y(A(x) \wedge B(y))$;
r) $\exists x\forall y\exists z A(x,y,z) \to \exists x(\forall y(\exists z A(x,y,z) \to P(x,y)) \to \forall y P(x,y))$

2. Докажите, что множество выводимых формул не изменится, если заменить два правила Бернайса на правило обобщения и две аксиомы $\forall x(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \forall x\varphi)$ и $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \psi)$, где формула ψ не зависит от x.

3. Пусть формула φ_1 содержит формулу ψ_1 в качестве подформулы. Докажите, что если ψ_1 доказуемо эквивалентна ψ_2 (т.е. формула $(\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_2 \to \psi_1)$ выводима в исчислении предикатов), то формула φ_1 доказуемо эквивалентна формуле φ_2, полученной из φ_1 заменой подформулы ψ_1 на ψ_2.