

Московский физико-технический институт  
Факультет инноваций и высоких технологий  
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012  
Задачи про арифметичность предикатов

Предикат  $P: \mathbb{N}^k \rightarrow \{0, 1\}$  называется *арифметичным*, если он выразим в стандартной интерпретации арифметики  $(\mathbb{N}, +, \times, =)$ . Функция  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  называется *арифметичной*, если арифметичен предикат  $P_f: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \{0, 1\}$ , где  $P_f(\mathbf{x}, y) = 1 \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = y$ .

**1.** Покажите арифметичность следующих предикатов и функций:

- $x < y, x \leq y$ ;
- $x = 0, x = 1, x = c$  для произвольной константы  $c$ ;
- $x \dot{:} y$ ;
- $x/y$  (неполное частное от деления  $x$  на  $y$ );
- $x \bmod y$  (остаток от деления  $x$  на  $y$ );
- НОК( $x, y$ ), НОД( $x, y$ );
- $x$  — простое число;
- $x$  — степень двойки;
- $x$  — степень четвёрки (Указание: это квадрат степени двойки);
- Символ Лежандра (выразите 4 предиката:  $\ll \left(\frac{a}{p}\right) \text{ не определён} \gg, \ll \left(\frac{a}{p}\right) = 0 \gg, \ll \left(\frac{a}{p}\right) = 1 \gg, \ll \left(\frac{a}{p}\right) = -1 \gg$ ).

**2.** *Выразимой нумерацией пар* натуральных чисел называется инъективная арифметичная функция  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

- Докажите, что при любой выразимой нумерации пар функции  $\text{fst}(n)$  («первый элемент пары номер  $n$ ») и  $\text{snd}(n)$  («второй элемент пары номер  $n$ »), не определённые, если  $n$  не является номером пары, также арифметичны.
- Докажите, что при выразимой нумерации предикат « $n$  является номером некоторой пары» арифметичен.
- Придумайте выразимую нумерацию пар, такую что функции  $f, \text{fst}$  и  $\text{snd}$  выражаются бескванторными формулами.
- Придумайте взаимно однозначную выразимую нумерацию пар, такую что функции  $f, \text{fst}$  и  $\text{snd}$  выражаются бескванторными формулами.

Введём следующее взаимно однозначное кодирование натуральных чисел последовательностями из нулей и единиц: по числу  $n$  возьмём число  $n + 1$ , запишем его в двоичной записи и вычеркнем первую единицу. Например:  $5 \rightarrow 6 \rightarrow 110 \rightarrow 10, 18 \rightarrow 19 \rightarrow 10011 \rightarrow 0011$ . Обозначим код числа  $x$  через  $\hat{x}$ .

**3.** Упражнения:

- Покажите, что кодирование действительно взаимно однозначное.
- Найдите  $\widehat{57}, \widehat{179}, \widehat{1543}$ .

с) Кодами каких чисел являются строки 110, 101111, 010011000110010?

4. Покажите арифметичность следующих предикатов и функций. (В формулировках используются обозначения из теории формальных языков, но все они объясняются словами. Указание: нужно «переводить» утверждения с языка кодов на язык чисел).

- $\hat{x} \in \{0\}^*$  ( $\hat{x}$  состоит из одних нулей);
- $|\hat{x}| = |\hat{y}|$  ( $\hat{x}$  и  $\hat{y}$  одной длины);
- $|\hat{x}| \leq |\hat{y}|$  ( $\hat{x}$  не длиннее  $\hat{y}$ );
- $\hat{x}\hat{y}$  (конкатенация слов  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$ , т.е. слово, полученное приписыванием  $\hat{y}$  справа к слову  $\hat{x}$ );
- $\hat{x} \sqsubset \hat{y}$  ( $\hat{x}$  есть начало  $\hat{y}$ );
- $\hat{x} \sqsupset \hat{y}$  ( $\hat{x}$  есть конец  $\hat{y}$ );
- $\hat{x}$  — подслово  $\hat{y}$ .

5. Докажите, что существует трёхместный предикат, обладающий следующими двумя свойствами: во-первых, для любых  $a$  и  $b$  множество  $S_{ab} = \{x: S(x, a, b) = 1\}$  конечно. Во-вторых, для любого конечного множества  $M$  найдутся такие  $a$  и  $b$ , что  $S_{ab} = M$ . (Указание: в книге «Языки и исчисления» предлагается такой предикат:  $axa$  есть подслово  $b$ , тогда множество  $M = \{x_1, \dots, x_m\}$  совпадает с  $S_{ab}$  для  $a = 10\dots 01$  и  $b = ax_1ax_2a\dots ax_ma$ . Это утверждение неверно, однако предикат нетрудно исправить так, чтобы оно стало верным.)

6. Докажите арифметичность следующих предикатов и функций:

- Одноместного предиката « $x$  есть степень шестёрки»;
- Функции  $f(k) = 2^k$  (Указание: используйте выразимую нумерацию пар. Выразите такое свойство: график функции  $f(t) = 2^t$  проходит через точку  $(k, x)$ );
- Функции  $f(k) = p_k$  ( $k$ -ое по счёту простое число);
- Функции  $f(k) = \varphi_k$  ( $k$ -ое по счёту число Фибоначчи);
- Функции  $f(k) = C_k$  ( $k$ -ое по счёту число Каталана);
- Одноместного предиката « $x$  есть совершенное число» (совершенным называется число, равное сумме всех своих делителей, отличных от него самого. Например,  $6 = 3 + 2 + 1$ ,  $28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$ );
- Символа Якоби (выразите 4 предиката: « $\left(\frac{a}{p}\right)$  не определён», « $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ », « $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ », « $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ »).

7. (Ориентированным) графом называется пара  $(V, E)$ , где  $V$  — конечное множество вершин,  $E \subset V \times V$  — множество рёбер (т.е. упорядоченных пар вершин). Неориентированным графом называется граф, в котором  $\forall v (v, v) \notin E$  (т.е. нет петель) и  $\forall v, w (v, w) \in E \Leftrightarrow (w, v) \in E$  (т.е. каждое ребро если проведено, то в обе стороны).

- Придумайте, как занумеровать все графы натуральными числами. (Указание: если специфицировать число вершин  $n$ , то можно считать, что это числа  $0, 1, \dots, n-1$ . Соответственно, рёбра суть пары таких чисел.)

Выразите в этой нумерации следующие предикаты:

- b) «граф  $G$  неориентированный»;
- c) «граф  $G$  связан» (любые две вершины можно соединить путём, ориентация рёбер неважна);
- d) «граф  $G$  сильно связан» (любые две вершины в любом порядке можно соединить ориентированным путём);
- e) «в графе  $G$  нет ориентированных циклов»;
- f) «граф  $G$  является деревом»;
- g) «граф  $G$  можно раскрасить в три цвета» (т.е. покрасить каждую вершину в один из трёх цветов, так чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром);
- h) Двухместный предикат «граф  $G$  можно покрасить в  $k$  цветов»;
- i) Двухместный предикат «диаметр графа  $G$  равен  $d$ » (диаметр — максимальное расстояние между вершинами, расстояние между вершинами — длина кратчайшего пути между ними);