

УДК 535.42

А. И. Миланич<sup>1,2</sup>, А. А. Баранов<sup>1</sup><sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет)<sup>2</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН

## Предельное разрешение в оптике

Обсуждаются квантовые и классические ограничения для разрешения в оптике и даны соответствующие оценки. Проанализированы возможные методы повышения разрешения оптических систем. Также рассмотрен квантово-механический аспект предела разрешения оптических систем, который примерно в 10 раз меньше классического предела. Также обсуждаются границы применимости принципа Гюйгенса–Френеля для численного моделирования в оптике.

**Ключевые слова:** дифракция, разрешение оптических приборов, квантово-механический предел, оптика, принцип Гюйгенса–Френеля.

Разрешение оптических приборов зависит от аберраций оптических элементов и от дифракции. При этом предельное разрешение в оптике определяется исключительно дифракцией на апертуре прибора. Методы расчета и компенсации аберраций оптических систем разработаны еще Аббе и Зейделем в XIX веке и минимальны у современных приборов. Вопрос о дифракционном пределе не столь очевиден, о чем свидетельствуют появляющиеся в последнее время статьи о «суперлинзах» [1] и о преодолении дифракционного предела [2, 3] (хотя предел, который преодолен, не может быть пределом). Данная работа посвящена обсуждению существующих в оптике ограничений для предельного разрешения, накладываемых как дифракцией, так и квантовой природой фотонов.

В классической оптике принципиальным ограничителем для предельного разрешения оптических систем выступает дифракция, сформулированная в виде критерия Рэля, а в квантовой механике — принцип неопределенности Гейзенберга.

В классической оптике размер дифракционного пятна в фокальной плоскости определяется апертурой и фокусным расстоянием системы и для тонкой линзы радиус кружка Эйри равен —  $\Delta x \approx 0.61\lambda \frac{F}{D}$ , где  $\lambda$  — длина волны,  $D$  — диаметр линзы, а  $F$  — ее фокусное расстояние. Следовательно, при стремлении фокусного расстояния к нулю (точнее, при стремлении к нулю отношения фокусного расстояния к диаметру) размер пятна в фокальной плоскости тоже стремится к нулю, что означает возможность разрешения сколь угодно малых расстояний. Но это невозможно!

Таким образом, традиционный подход к задаче о дифракции на апертуре оптического прибора на основе принципа Гюйгенса–Френеля содержит в себе внутреннее противоречие. Для линзы невозможность визуализации сколь угодно малых объектов объясняют тем, что в видимой области спектра из-за аберраций невозможно изготовить линзу с относительной апертурой  $a = \frac{D}{F}$  существенно больше 1 (при существующих показателях преломления стекол). Однако современная голографическая и интегральная оптика преодолела данное ограничение и в принципе позволяет изготовить голографические оптические фокусирующие элементы (например, зонные пластинки Френеля) с достаточно большими значениями относительного отверстия (10 и более).

На практике используются линзы с относительным отверстием порядка или менее 1, поэтому экспериментально достигаемый минимальный размер объекта близок к  $\lambda$ , что можно трактовать как с позиций классической, так и квантовой оптики. В данной работе предпринята попытка «уточнить» критерий Рэля, а также объяснить вышеописанное противоречие с позиций квантовой оптики.

### Классическая волновая оптика

В работе [3] справедливо указывается на то, что для получения фокусировки излучения в как можно меньшей области пространства необходимо увеличивать вклад лучей, проходящих через периферию апертуры оптического прибора. Приемы такого рода в оптике принято называть аподизацией апертуры — модуляцией фазово-амплитудного распределения светового поля по апертуре. Аподизация достаточно хорошо изучена [8], а эффект увеличения разрешения составляет 10–20 % (коэффициент  $0.50\lambda$  в известных формулах вместо  $0.61\lambda$ , причем эффект аподизации достигается за счет существенной потери мощности сигнала).

С точки зрения современных представлений «неточность» критерия Рэля состоит в том, что при больших значениях относительного отверстия в сочетании с аподизацией (экранирование центральной области апертуры) световые лучи сходятся в фокусе под углами, близкими к  $90^\circ$ . Поэтому «малоугловое» приближение (основанное на принципе Гюйгенса–Френеля) становится необоснованным и может привести к ошибочным результатам. На это обращено внимание в работе В.Г. Низьева [4], который предлагает несколько искусственный, но математически обоснованный метод «дипольно-волновой дифракции». Кроме того, эта работа указывает на нарушение условия поперечности волн при решении задачи дифракции исходя из принципа Гюйгенса–Френеля, которое имеет определяющее значение при больших апертурах.

Формально дифракционная картина Фраунгофера соответствует бесконечной удаленности, поэтому при расчете распределения поля в фокусе линзы (или фокусирующего элемента, который может быть и голографическим) имеет смысл говорить об угловом распределении и угловых размерах.

Чтобы проиллюстрировать вышесказанное, были выполнены следующие компьютерные расчеты. Первоначально задавалась функция пропускания линзы вида  $f(r) = \Theta\left(r^2 - (1 - \varepsilon)\frac{D^2}{4}\right) + \Theta\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right)$ , которая соответствует экранированию центральной области линзы. Здесь  $\Theta$  — тета-функция Хевисайда. Выполнив фурье-преобразование в полярных координатах, получим радиальное распределение поля в фокальной плоскости вида

$$\int_0^{D/2} J_0(kr) f(r) r dr, \quad k = \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda},$$

где  $\theta$  — угол направления на дифракционную картину Фраунгофера.

В силу равномерной сходимости интеграла Фурье и стремления при  $\varepsilon \rightarrow 0$  аподизационной функции к дираковской дельта-функции распределение поля в фокусе будет стремиться к функции Бесселя первого рода нулевого порядка  $J_0(kD/2)$ . Известно, что эта функция имеет первый нетривиальный ноль, приблизительно равный 2,5, в то время как функция  $J_1(kD/2)/(kD/2)$ , описывающая фраунгоферову дифракцию на круглой апертуре, имеет ноль вблизи 4. Следовательно, в терминах «критерия» Рэля использование периферической засветки дает, как минимум, улучшение разрешения в  $4/2,5 = 1,6$  раза.

Чтобы проверить (подтвердить) данное утверждение, нами было выполнено численное моделирование дифракции излучения гелий-неонового лазера на периферически аподизированной апертуре зонной пластинки Френеля радиусом 15 мм при радиусе экранированной части 14 мм по методу Низьева для различных поляризаций (линейной, радиальной и циркулярной).

Расчеты показали, что для разных поляризаций в распределениях поля имеются небольшие различия, причем для циркулярной поляризации наблюдалась максимальная концентрация световой энергии в пределах центрального максимума, как это и указывается в [4]. Кроме того, произведенное численное моделирование позволяет сделать следующее предположение. По-видимому, значение, близкое к  $0.61 \lambda / 1.6 = 0.37 \lambda$ , является непреодолимым пределом при численном моделировании и расчетах на основе принципа Гюйгенса–Френеля, что определяет границы применимости данного принципа и соответствует сугубо эмпирической природе принципа Гюйгенса–Френеля. В самом деле, принцип Гюйгенса–Френеля постулируется, а не выводится, и поэтому, вероятно, он ограниченно применим

для больших углов дифракции, на что следует обратить внимание.

Примеры типичных распределений показаны на рис. 1.

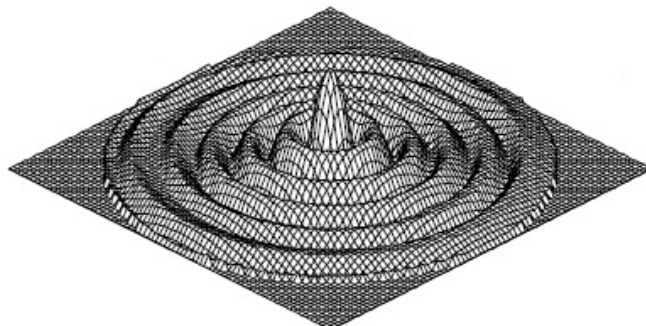


Рис. 1

Отметим, что критерий Рэлея был сформулирован для глаза, в век отсутствия точных и надежных фотометрических приборов и поэтому сегодня может быть несколько «уточнен». Рассмотрим два некогерентных точечных источника, разделенных угловым расстоянием  $\theta_0$ , и аподизированный по периферии фокусирующий элемент. Будем считать, что угловые расстояния малы (хотя мы рассматриваем случай больших значений относительной апертуры). Тогда распределение интенсивности вблизи центра изображения дифракционной картины будет описываться функцией  $J_0^2\left(\frac{\pi D \sin \theta}{\lambda} - \frac{\pi D \sin(\theta_0/2)}{\lambda}\right) + J_0^2\left(\frac{\pi D \sin \theta}{\lambda} + \frac{\pi D \sin(\theta_0/2)}{\lambda}\right)$ .

Построив семейство функций такого рода в зависимости от параметра  $\frac{\pi D \sin(\theta_0/2)}{\lambda}$  в диапазоне от 0 до 2 с шагом 0,1 (см. рис. 2), можно сделать вывод, что контраст между локальными максимумами распределения интенсивности соответствует изображению двух точечных источников (но полностью пропадет при значении параметра вблизи 1). Это означает, что при использовании прибора, чувствительного к контрасту изображения, разрешение будет определяться только соотношением сигнал-шум, а разрешением фотоприемника и лимитирующим фактором  $0.5 \times 0.61 \frac{\lambda}{D} = 0.3 \frac{\lambda}{D}$ , то есть в два раза меньше традиционного критерия Релея.

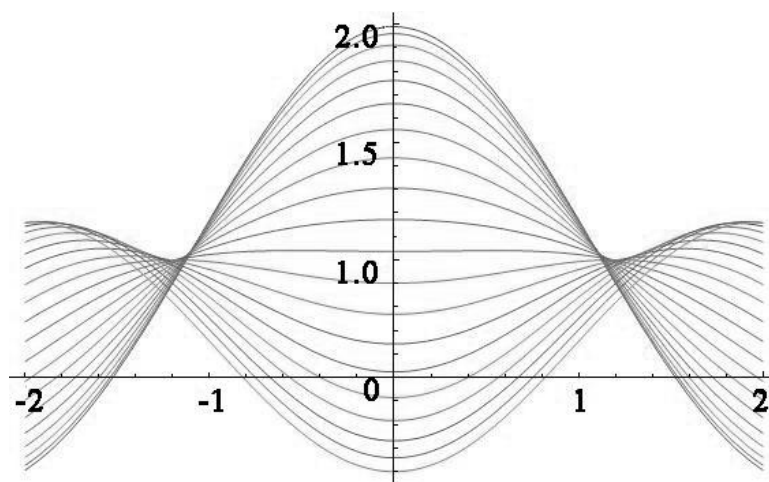


Рис. 2

Подтверждением вышесказанного можно считать работу [9], где последовательная компьютерная обработка изображений позволила достичь разрешения 20–25 нм в оптическом диапазоне при облучении объектов ультрафиолетом.

### Квантовый предел

Наконец, рассмотрим вопрос о квантово-механическом пределе разрешения в оптике, который связан с квантовой природой фотонов. Ранее понятие квантово-механического предела разрешения в оптике было предложено в [5] и обсуждалось в [6]. Квантово-механический предел определим как среднеквадратичное отклонение распределения излучения по координате в точке фокуса оптической системы.

Для простоты рассмотрим цилиндрическую линзу (что соответствует одномерному случаю). Из точного соотношения принципа неопределенностей Гейзенберга [7] для волнового пакета в фокусе линзы следует записать:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi},$$

где  $\Delta x$ ,  $\Delta p_x$  — среднеквадратичные отклонения координаты и импульса, а  $h$  — постоянная Планка. Значение  $\Delta x$  и есть квантово-механический предел (среднеквадратичная ширина пятна в фокальной плоскости отличается от радиуса кружка Эйри и критерия Релея).

Среднеквадратичный разброс импульсов фотонов в фокусе линзы зависит от дифракционного распыливания волнового пакета и угла схождения лучей в фокусе по отношению к оптической оси. Если при неизменном фокусном расстоянии устремить диаметр линзы к бесконечности, то дифракционный вклад устремится к нулю, и геометрическая составляющая определит распределение фотонов в фокальной плоскости. Поперечный импульс фотонов в фокусе оптической системы (линзы) лежит в пределах от  $-p$  до  $+p$ , где  $p = \frac{h}{\lambda}$  — импульс фотона соответствующей длины волны. При этом если провести аподизацию системы с подавлением центральных областей апертуры, аналогично описанному ранее, то среднеквадратичное отклонение поперечного импульса в точности равно  $\Delta p_x = p$ . Из (точного) соотношения неопределенности получаем  $\Delta x \geq \frac{\lambda}{4\pi}$ , что примерно на порядок лучше классического предела и является фундаментальным квантово-механическим пределом разрешения в оптике (разумеется, в рамках линейной теории).

Можно сделать следующие выводы.

Поскольку полученный предел на порядок выше, чем предсказывается теорией на основе принципа Гюйгенса–Френеля, то это также указывает на ограниченную применимость данного принципа.

Следует подчеркнуть, что квантово-механический предел и предложенный подход справедлив для любых квантовых частиц (электронов, ионов и т.д.), а не только фотонов, поскольку напрямую связан с квантово-механическим рассмотрением. Длине волны частицы соответствует длина волны де Бройля. Следовательно, данный предел невозможно превзойти как в обычной, так и в электронной и ионной микроскопии.

Отметим, что небольшое улучшение «предельного» разрешения возможно за счет точного учета функции распределения в фокусе оптической системы и компьютерной обработки изображений. Но это не противоречит сделанному ранее выводу о предельном разрешении, а соответствует иным критериям разрешения, отличным как от предложенного в данной работе, так и от критерия Релея.

Конечно, желательно выполнить экспериментальную проверку полученных результатов, поскольку представлены лишь теоретические оценки. Косвенным экспериментальным подтверждением может служить объяснение достигнутого в работе [9] разрешения 20–25 нм в оптическом диапазоне с компьютерной обработкой, которое теперь можно объяснить, поскольку полученное разрешение все же не противоречит предложенному критерию.

### Литература

1. Fang N. [et al.]. Sub-Diffraction-Limited Optical Imaging with a Silver Superlens // Science — 2005. — V. 308. — P. 534.
2. Либенсон М.Н. Преодоление дифракционного предела в оптике // Соросовский образовательный журнал. — 2000. — Т. 6. — № 3. — С. 99–104.

3. *Kuznetsova Y., Neumann A., Brueck S.R.J.* Imaging interferometric microscopy—approaching the linear systems limits of optical resolution // Optics Express. — 2007. — V. 15 (11). — P. 6651–6663.
4. *Низъев В.Г.* Дипольно-волновая теория дифракции электромагнитного излучения // Успехи физических наук. — 2002. — Вып. 172. — № 5. — С. 601–607.
5. *Миланич А.И.* Монохромный микроскоп сверхвысокого разрешения // Патент РФ № 2441291 от 27.01.2012.
6. *Миланич А.И., Баранов А.А.* Квантово-механический и дифракционный предел в оптике // Труды 53-й научной конференции МФТИ. — 2010. — Ч. 2. — С. 51–52.
7. *Сивухин Д.В.* Атомная и ядерная физика. — М.: Физматлит, 2006.
8. *Панова В.А., Андреев Л.Н.* Оптика микроскопов. — Л.: Машиностроение, 1976. — С. 148–150.
9. *Eric Betzig, George H. Patterson, Rachid Sougrat [et al.]* Imaging Intracellular Fluorescent Proteins at Nanometer Resolution // Science, Published Online. — 2006. — V. 313. — N 5793. — P. 1642–1645.

Поступила в редакцию 17.01.2012.