Д.А. Шабанов

22 октября 2011 г.

Предлагаемые темы научно-исследовательских работ

1 Задачи теории Рамсея

Классические теоремы теории Рамсея (например, теоремы Рамсея, Ван дер Вардена, Хейлса–Джуэтта) утверждают, что в любой конечной раскраске очень большой регулярной структуры найдется достаточно большая одноцветная подструктура. В качестве иллюстрации приведем формулировку теоремы Хейлса–Джуэтта, как наименее известной из перечисленных выше.

Пусть C_t^n обозначает n-мерный куб:

$$C_t^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ x_i \in \{1, \ldots, t\}\} = \{1, \ldots, t\}^n.$$

Линией в кубе C_t^n называется такой упорядоченный набор $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^t$ точек куба, $\mathbf{y}^j = (y_1^j, \ldots, y_n^j)$, что для любого $i = 1, \ldots, n$

либо $y_i^1 = \ldots = y_i^t$,

либо $y_i^1 = 1$, $y_i^2 = 2$,..., $y_i^t = t$,

т.е. либо все i-е координаты равны, либо они образуют последовательность $(1, 2, \ldots, t)$. Тогда, оказывается, имеет место следующий результат.

Теорема. (Хейлс, Джуэтт) *Для любых $t, r \geqslant 2$ найдется такое число $HJ(t, r)$, что если $n \geqslant HJ(t, r)$, то в любой r-цветной раскраске точек куба C_t^n найдется одноцветная линия.*

Оригинальные доказательства классических теорем теории Рамсея дают очень слабые оценки на заявляемые экстремальные величины (вроде $HJ(t, r)$ из теоремы Хейлса–Джуэтта). Получение количественных оценок в подобных теоремах —

это одно из центральных направлений современной экстремальной комбинаторики.

Студентам предлагается познакомиться с вероятностными методами, лежащими в основе получения нижних оценок в проблемах теории Рамсея, а затем и самим попытаться получить новые результаты в данной области.

2 γ-правильные раскраски гиперграфов

Понятие правильной раскраски можно по-разному переносить с графов на гиперграфы. Напомним, что раскраска множества вершин графа называется *правильной*, если любые две вершины, соединенные ребром, покрашены в разные цвета. Пусть теперь у нас дан гиперграф $H = (V, E)$. Первое естественное определение — это считать раскраску множества вершин гиперграфа H правильной, если в ней любые две вершины, содержащиеся в одном ребре, покрашены в разные цвета. Такие раскраски гиперграфа принято называть *сильными* (в англоязычной литературе также используется термин *rainbow colorings*). Минимальное же число цветов, требуемое для сильной раскраски множества вершин гиперграфа H, принято называть *сильным хроматическим гиперграфа* H. Однако, понятие сильной раскраски не вносит в теорию гиперграфов ничего принципиально нового по сравнению с графами: сильная раскраска вершин гиперграфа $= (V, E)$ есть не что иное, как правильная раскраска вершин вспомогательного графа $G = (V, E_1)$, в котором две различные вершины смежны тогда и только тогда, они имеют общее ребро в гиперграфе H.

Гораздо более глубокое понятие правильной раскраски гиперграфа было предложено П. Эрдешем и А. Хайналом в 1966 году. Согласно их определению раскраска множества вершин V гиперграфа $H = (V, E)$ называется *правильной*, если в этой раскраске все ребра из E неодноцветны (т.е. содержат вершины разных цветов). *Хроматическим числом* $\chi(H)$ гиперграфа H называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски вершин этого гиперграфа. Подобное определение хроматического числа гиперграфа очень хорошо сочетается с другими характеристиками гиперграфа (число независимости, максимальная степень вершины и т.п.), позволяя сохранить ту же самую взаимосвязь между ними, что и в обычных графах.

Однако для произвольного гиперграфа $H = (V, E)$ можно определить следующее параметрическое семейство γ-*хроматических чисел*. Пусть фиксировано натуральное число $\gamma \geqslant 1$. Множество $V_0 \subset V$ называется γ-*независимым*, если для любого $e \in E$ выполнено $|e \cap V_0| \leqslant \gamma$. Раскраска множества вершин V в r цветов называется γ-*правильной*, если в ней все цветовые классы вершин являются

γ-независимыми множествами. Соответственно, γ-хроматическим числом $\chi_\gamma(H)$ гиперграфа H называется такое минимальное число r, что для H существует γ-правильная r-раскраска.

Проясним связь γ-хроматического числа с обычным понятием хроматического числа. Ясно, что если H — n-однородный гиперграф, то при $\gamma = n-1$ раскраска является $(n-1)$-правильной тогда и только тогда, когда она является правильной в обычном смысле, т.е. просто нет одноцветных ребер. Таким образом, $\chi_{n-1}(H) = \chi(H)$ для любого n-равномерного гиперграфа G. Далее, если $\gamma = 1$, то раскраска является 1-правильной тогда и только тогда, когда каждые две вершины одного цвета не соединены ребром, т.е. в каждом ребре все вершины имеют разные цвета, т.е. $\chi_1(H)$ — это сильное хроматическое число.

Студентам предлагается познакомиться с экстремальными проблемами для γ-хроматических чисел. Одной их таких проблем является задача типа Эрдеша–Хайнала. Пусть заданы натуральные числа $n > \gamma \geqslant 1$, $r \geqslant 2$. Требуется *найти величину $m_\gamma(n, r)$, равную минимально возможному количеству ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с γ-хроматическим числом больше r.* Формально определение $m_\gamma(n, r)$ можно записать так:

$$m_\gamma(n, r) = \min \left\{|E(H)| : \; H - n\text{-однородный гиперграф, } \chi_\gamma(G) > r\right\}.$$

Данная величина хорошо исследована в классическом случае $\gamma = n-1$, а также относительно хорошо — в частном случае $r = 2$ для произвольного γ. Для других значений r и γ никаких содержательных результатов неизвестно.

3 Раскраски разреженных гиперграфов

В мировой литературе *разреженным* (англ. *sparse*) гиперграфом называется однородный гиперграф $H = (V, E)$, у которого число ребер относительно мало по отношению к числу ребер полного гиперграфа с тем же количеством вершин ненулевой степени, т.е., грубо говоря,

$$|E| = o\left(\binom{|V|}{k}\right),$$

где k — однородность ребер.

Примерами разреженных гиперграфов являются гиперграфы с ограниченной степенью вершины. Изучение хроматических чисел подобных гиперграфов представляет значительный интерес в связи с тем, что подобные результаты находят приложения в теории Рамсея, комбинаторной геометрии и т.д. Приведем классическую теорему Эрдеша–Ловаса, с которой и начались исследования в данной области.

Теорема. (Эрдеш, Ловас) *Пусть H — n-однородный гиперграф с условием*

$$\Delta(H) \leqslant \frac{r^{n-1}}{4n},$$

где $\Delta(H)$ — максимальная степень вершины в H. Тогда $\chi(H) \leqslant r$.

Данную теорему можно усилить (т.е. ослабить условие на $\Delta(H)$) не только для всего класса n-однородных гиперграфов, но и для гиперграфов, обладающих дополнительными свойствами. Например, можно ограничиваться классами

- однородных простых гиперграфов (т.е. любые два ребра имеют не более одной общей вершины),
- однородных h-простых гиперграфов (т.е. любые два ребра имеют не более h-общих вершин),
- однородных гиперграфов с большим обхватом (т.е. в гиперграфе нет циклов малой длины).

Также представляют интерес исследования, связанные не только с правильными r-цветными раскрасками подобных гиперграфов, но и с другими видами раскрасок. Например, в мировой литературе активно изучаются:

- предписанные раскраски (у каждой вершины свой список *предписанных* цветов),
- полноцветные раскраски в r-цветов (каждое ребро должно содержать вершины всех цветов),
- справедливые раскраски в r-цветов (правильные раскраски, в которых мощности цветовых классов почти одинаковы, т.е. все цвета задействованы равномерно),
- *conflict-free* раскраски (в каждом ребре есть вершина *уникального* цвета, т.е. цвета, в который, кроме нее, никто не покрашен в этом ребре).