

А.С. Бугаев<sup>1</sup>, А.П. Буслаев<sup>2,3</sup>, А.Г. Таташев<sup>3,2</sup>, М.В. Яшина<sup>3,2</sup>

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт (государственный университет)

<sup>2</sup> Московский автомобильно-дорожный институт (государственный технический университет)

<sup>3</sup> Московский технический университет связи и информатики

## Оптимизация частично-связных потоков в детерминированно-стохастической модели

Рассматривается модель многополосного частично связанного движения, в которой скорость движения частиц представляет собой сумму детерминированной и стохастической составляющей. Решается задача максимизации средней скорости и интенсивности движения по параметрам, определяющим модель.

**Ключевые слова:** стохастические модели, случайное блуждание, автотранспортные потоки, многополосное движение, оптимизация.

### I. Введение

В [1] рассмотрена модель движения частиц (автотранспортных средств) по фрагменту дороги с несколькими полосами. В этой модели скорость движения является суммой детерминированной и стохастической составляющих, причем детерминированная составляющая движения соответствует фоновому движению на полосе, а стохастическая составляющая — индивидуальным перемещениям частиц. Каждая полоса состоит из последовательности клеток, размер которых определяется *динамическим габаритом, то есть длиной участка дороги, на котором размещается одна частица с учетом расстояния между соседними, определяемым требованиями безопасности и зависящим от величины скорости движения*. Стохастическое движение описывается монотонным случайным блужданием частиц по клеткам полосы, а регулярное движение описывается равномерным перемещением всех клеток полосы [1, 2].

В [3] рассматривалась модель движения частиц по неподвижной полосе и получена формула для средней скорости частиц. Эта формула позволяет вычислить стохастическую составляющую скорости движения в модели с движущимися полосами в предположении, что частицы не переходят с одной полосы на другую. Предполагается, что зависимость динамического габарита от скорости регулярного движения известна [4].

В случае, когда вероятность перемещения частицы в свободном состоянии стремится к единице, результаты [3] соответствуют результатам работы [5], где рассматривалась сходная модель, в которой случайность проявлялась лишь в начальном размещении частиц на клеточном поле. Исследованию модели данного класса посвящена также работа [6].

В [7] рассматривалась двухполосная стохастическая модель, в которой разрешались переходы частиц на соседнюю полосу. Разработан способ

приближенного вычисления средней скорости движения частиц. Точность приближения этого способа проверялась имитационным моделированием.

В [8] результаты работы [7] обобщены на случай, когда частицы различаются по типу.

В одной из пионерских работ, посвященных клеточным моделям потоков [9], получены содержательные результаты методом имитационного моделирования.

При изучении одноканального движения частиц широко применялись также различные модели следования за лидером, представляющие собой дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом [10], приводящие к гладким решениям.

В [11, 12] модели случайного блуждания по дискретной решетке, аналогичные введенной в [1], были использованы при решении некоторых проблем оптимизации дорожного движения.

В настоящей работе рассматриваются различные постановки задачи максимизации средней скорости и интенсивности по скоростям регулярного движения, определяющим динамический габарит. Исследуются случаи, когда переходы частиц на соседние полосы запрещены (*канализованное движение*) и когда такие переходы разрешены. При канализованном движении оптимизация осуществляется также по распределению частиц по полосам. Задача для канализованного движения решается с помощью формулы, полученной в [3]. Для решения задачи оптимизации в случае, когда переходы на соседнюю полосу разрешены, частично используется метод имитационного моделирования.

Дадим описание рассматриваемой в настоящей работе модели. Предположим, что имеются  $k$  последовательностей ячеек ( $k$  полос) (рис. 1). Движение на каждой полосе представляет собой сумму двух составляющих [1, 2]. Первой из этих составляющих является регулярное движение, которое определяет разбиение полосы на клетки. Бу-

дем обозначать через  $v = v_{det,i}$  скорость регулярного движения на  $i$ -й полосе,  $i = 1, \dots, k$ . Зависимость размера динамического габарита  $d(v)$  (м) от  $v = v_{det}$  (м/с) будем описывать, например, формулой [4]:

$$d(v) = 5,7 + 0,504v + 0,0285v^2. \quad (1)$$

Как отмечается в [4], зависимость (1) получена аппроксимацией связи между скоростью и средним интервалом между автомобилями посредством параболы, при этом коэффициенты определены методом наименьших квадратов и имеют прозрачный физический смысл.

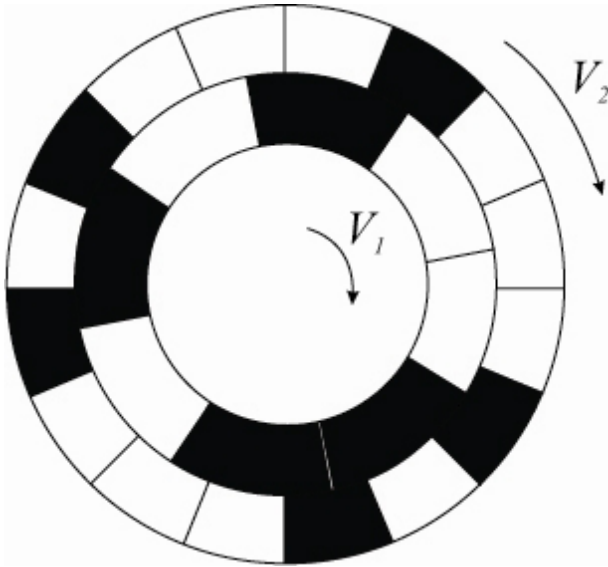


Рис. 1. Модель двухполосного движения

Вторая составляющая скорости движения частицы обусловлена индивидуальными перемещениями частиц в соседние ячейки по ходу движения. За единицу времени с некоторой вероятностью  $p$  частица имеет намерение переместиться вперед и осуществляет это намерение, если позволяет конфигурация.

Будем рассматривать следующие задачи.

**Задача 1.** Оптимизация распределения частиц при канализованном движении. Требуется при фиксированной плотности  $\rho$  и регулярной скорости  $v$  максимизировать интенсивность  $I$  потока частиц, то есть среднее число частиц, пересекающих сечение дороги в единицу времени:

$$I(v, r_1, \dots, r_k) \rightarrow_{\vec{r}} \max, \\ \frac{r_1 + \dots + r_k}{d(v)} = \frac{m}{nd(v)} = \rho,$$

где  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) — отношение числа  $m_i$  частиц на  $i$ -й полосе к числу ячеек  $n$  на этой полосе,  $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $m$  — число всех частиц,  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = m$ ;  $\rho$  — плотность потока, то есть отношение числа  $m$  частиц к длине пути  $L = nd(v)$ .

**Задача 2.** В условиях задачи 1 полагаем, что регулярная скорость движения может зависеть от

полосы:  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)$ :

$$I(\vec{v}, \vec{r}, p) \rightarrow_{\vec{v}, \vec{r}} \max,$$

$$\frac{r_1}{d(v_1)} + \frac{r_2}{d(v_2)} + \dots + \frac{r_k}{d(v_k)} = \rho.$$

**Задача 3.** В условиях задачи 1 разрешаются переходы частиц с одной полосы на другую. Требуется исследовать зависимость средней скорости частицы от плотности потока.

В случае, когда полоса единственна, задача 3 и эквивалентная задача 1 сводятся к задаче, рассматривавшейся в [3]. Как и для случая одной полосы, рассматриваемая *общая задача 3* может быть описана цепью Маркова. Однако решение соответствующей системы уравнений не выражается в виде удобной формулы, как это имеет место для случая одной полосы [3]. Зависимость интенсивности потока от плотности может быть представлена приближенно.

Назовем *средней стохастической скоростью частиц на  $j$ -й полосе  $u(r_j)$*  отношение числа перемещений в единицу времени частиц, находящихся на полосе, к числу всех частиц на этой полосе.

В соответствии с формулой, полученной в [3], где рассматривается задача вычисления средней скорости стохастического движения по неподвижной полосе, имеем ( $m = rn$ ):

$$u(r) = u\left(\frac{m}{n}\right) = u(r, p) = \frac{1}{m} Q = \\ = \frac{n}{m} \sum_{j=1}^{\min(m, n-m)} \frac{C p}{(1-p)^{j-1}} C_{m-1}^{j-1} C_{n-m-1}^{j-1}, \quad (2)$$

где  $C$  определено следующим соотношением:

$$C = \left( \sum_{j=1}^{\min(m, n-m)} \frac{n}{j} \cdot C_{m-1}^{j-1} C_{n-m-1}^{j-1} \frac{1}{(1-p)^{j-1}} \right)^{-1}.$$

График функции  $u(r)$ ,  $0 < r < 1$ , при  $n = 20$ ,  $m = 10$ ,  $p = 0,5$  изображен на рис. 2. Эта функция не является выпуклой по  $r$ , так как вторая разность  $\Delta^2 u(r) = u(r+2h) - 2u(r+h) + u(r)$ ,  $h = n^{-1}$  не всегда отрицательна. На рис. 3, 4 изображены зависимости соответственно первой  $\Delta u(r) = u(r+h) - u(r)$  и второй разности  $\Delta^2 u(r)$  от  $r$  при  $n = 20$ ,  $m = 10$ ,  $p = 0,5$ .

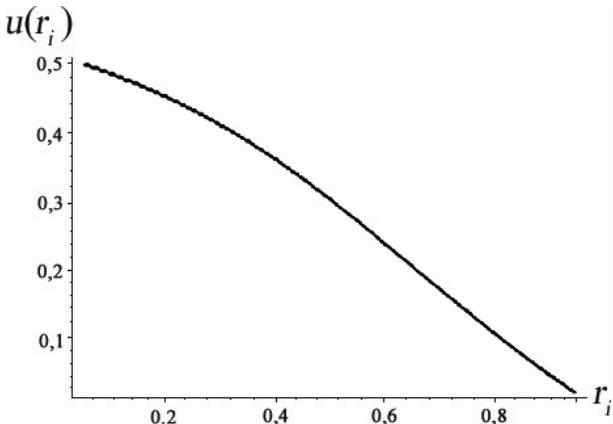


Рис. 2. Зависимость  $u(r_i)$  от  $r_i$  при  $n = 20$ ,  $m = 10$ ,  $p = 0,5$ .

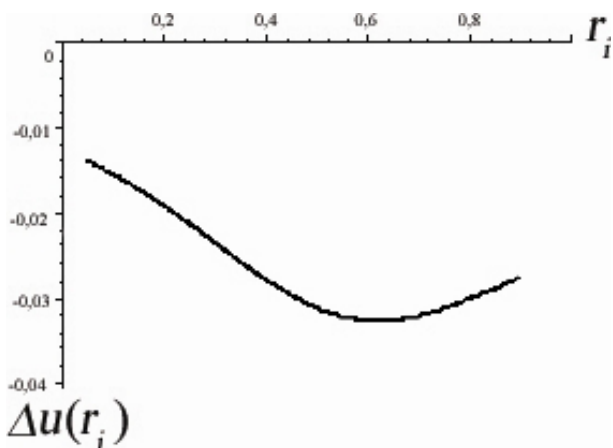


Рис. 3. Зависимость  $\Delta u(r_i)$  от  $r_i$  при  $n = 20$ ,  $m = 10$ ,  $p = 0,5$ .

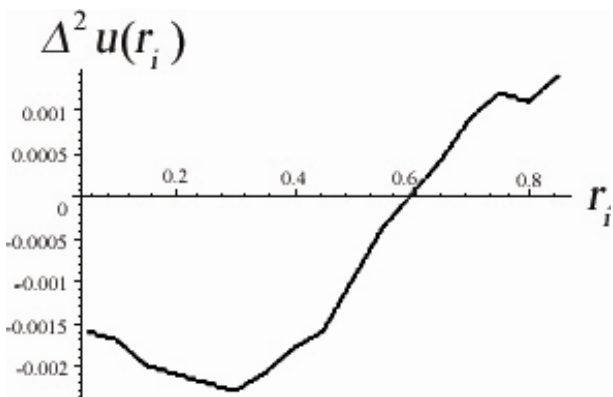


Рис. 4. Зависимость  $\Delta^2 u(r_i)$  от  $r_i$  при  $n = 20$ ,  $m = 10$ ,  $p = 0,5$ .

## II. Оптимальное распределение потоков при одинаковых скоростях регулярного движения

### II.1. Двухполосное канализированное движение

Будем рассматривать двухполосное канализированное движение с одинаковыми детерминированными скоростями движения, равными  $v$  для

каждой полосы (рис. 1). Каждая полоса представляет собой замкнутую последовательность ячеек, причем число ячеек на каждой полосе равно  $n$ .

На  $j$ -й полосе находится  $m_j$  частиц,  $j = 1, 2$ . Обозначим через  $(i, j)$   $i$ -ю ячейку  $j$ -й полосы,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2$ . Ячейка  $(i + 1, j)$  следует за ячейкой  $(i, j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $j = 1, 2$ . За ячейкой  $(n, j)$  следует ячейка  $(1, j)$ ,  $j = 1, 2$ . Перемещения частиц могут происходить в целочисленные моменты времени  $1, 2, \dots$ . Если в некоторый целочисленный момент времени  $t$  в ячейке  $(i, j)$  находится частица, а следующая ячейка  $j$ -й полосы свободна, то с вероятностью  $0 < p < 1$  в промежутке времени  $(t, t + 1)$  независимо от других осуществляется переход частицы в следующую ячейку.

Пусть  $r = m/2n$ ,  $r_j = m_j/n$ ,  $j = 1, 2$ ,

$$r_1 + r_2 = 2r,$$

$$u(r_1, r_2) = (r_1 u(r_1) + r_2 u(r_2)) / (2r), \quad (3)$$

где  $u(r_1, r_2)$  — средняя стохастическая скорость частиц по двум полосам. Тогда *средняя физическая скорость* частиц определяется как

$$v(r_1, r_2) = v + u(r_1, r_2) d(v).$$

Если  $\rho = m/L$  — плотность потока частиц, отношение числа частиц к длине  $L$  пути и соответственно по полосам  $\rho_i = m_i/L$ ,  $i = 1, 2$ , то интенсивность  $I(r_1, r_2)$  потока определяется формулой

$$I(r_1, r_2) = \rho v(r_1, r_2).$$

Интенсивность потока представляет собой *среднее число частиц, пересекающих в единицу времени сечение пути, неподвижное в системе отсчета, относительно которой каждая из полос движется со скоростью  $v$* .

Для простоты считаем, что отношение  $L$  к  $d(v)$  — целое число. Тогда число ячеек на каждой полосе определяется по формуле

$$n = L/d(v).$$

Будем решать задачу максимизации интенсивности потока путем распределения  $m$  частиц по полосам ( $m$  задано), то есть выбора возможных значений  $r_1$  и  $r_2$ , максимизирующих  $I(r_1, r_2)$ . Эта задача редуцируется к максимизации  $v(r_1, r_2)$ , которая в свою очередь сводится к максимизации  $u(r_1, r_2)$  при  $0 \leq r_1, r_2 \leq 1$ ,  $r_1 + r_2 = 2r$ ,  $r = m/2n$ .

На рис. 5 представлена зависимость функции  $u(r_1, 2r - r_1)$  от  $r_1$  при  $n = 20$ ,  $m = 10$  и  $p$ , равным соответственно 0,1, 0,5 и 0,9.

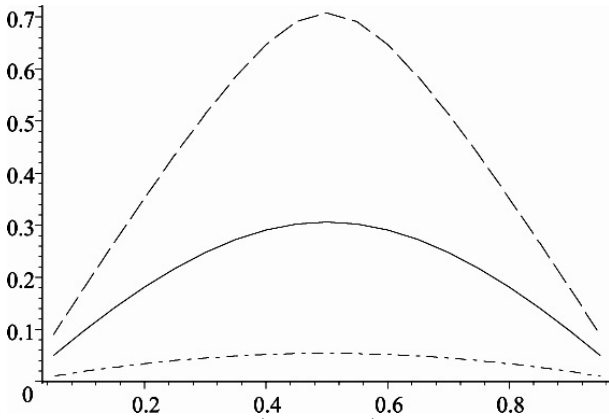


Рис. 5. Зависимость  $u(r_1, 2r - r_1)$  при  $n = 20$ ,  $m = 20$ ,  $p = 0,1$ ,  $p = 0,5$  (сплошная линия),  $p = 0,9$  (пунктирная линия)

**Лемма 1.** Для любого фиксированного  $r = n^{-1}, 2n^{-1}, \dots, 1 - n^{-1}$  последовательность  $u(r_1, 2r - r_1)$  монотонна по переменной  $r_1$  на множестве  $r_1 = n^{-1}, 2n^{-1}, \dots, r$ .

**Доказательство.** Функция

$$U(x) = u(x, 2r - x) = xu(x) + (2r - x)u(2r - x),$$

$0 < x < r$ , имеет производную  $(u(x) - u(2r - x)) + (xu'(x) - (2r - x)u'(2r - x))$ .

Первое слагаемое очевидно положительно при  $x < r$ , а второе — из-за того, что  $|u'(x)| \leq |u'(2r - x)|$ , то есть  $|u(x + h) - u(x)| \leq |u(2r - x) - u(2r - x - h)|$ , при  $x < r$  ( $h = n^{-1}$ ).

Учитывая лемму 1 и симметрию функции  $u(r_1, r_2)$ , можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 1.** Решение задачи 1 при  $k = 2$  достигается на равном распределении потока по полосам.

**Лемма 2.** Если функция  $f(x)$  на отрезке  $[0, 1]$  монотонно убывает и имеет отрицательную вторую производную, то функция  $F(x) = xf(x) + (1 - x)f(1 - x)$  на этом отрезке также имеет отрицательную вторую производную, то есть выпукла.

**Доказательство.** Имеем

$$F''(x) = 2f'(x) + xf''(x) + 2f'(1 - x) + (1 - x)f''(1 - x), x \in [0, 1].$$

Так как  $f'(x) < 0$ ,  $f'(1 - x) < 0$ ,  $f''(x) < 0$ ,  $f''(1 - x) < 0$ , то и  $F''(x) < 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , что и требовалось доказать.

**Лемма 3.** Пусть функция  $f(x_1, \dots, x_k)$  не зависит от порядка аргументов, а функция  $F(x_1, \dots, x_{k-1}) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, 1 - x_1 - \dots - x_{k-1})$ , определенная на множестве  $x_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, k - 1$ ),  $x_1 + \dots + x_{k-1} \leq 1$ , строго выпукла по каждой переменной при фиксированных значениях остальных переменных, то эта функция достигает наибольшего значения при  $x_1 = \dots = x_{k-1} = 1 - x_1 - \dots - x_{k-1} = x_k$ .

**Доказательство.** Функция  $F(x_1, \dots, x_{k-1})$  достигает в некоторой точке своего наибольшего значения. Пусть  $x_{10}, \dots, x_{k-1,0}$  — набор значений аргументов функции, для которого  $x_{i0} \neq 1 - x_{10} - \dots - x_{i0} - \dots - x_{k-1,0}$  при некотором  $1 \leq i \leq k - 1$ . Обозначим  $1 - x_{10} - \dots - x_{i-1,0} - x_{i+1,0} - \dots - x_{k-1,0}$  через  $a$ .

В силу выпуклости функции  $F(x_1, \dots, x_{k-1})$  по переменной  $x_i$

$$F(x_{10}, \dots, x_{i-1,0}, x_{i0}, x_{i+1,0}, \dots, x_{k-1,0}) + F(x_{10}, \dots, x_{i-1,0}, 1 - x_{10} - \dots - x_{k-1,0}, x_{i+1,0}, \dots, x_{k-1,0}) < 2F(x_{10}, \dots, x_{i-1,0}, \frac{a}{2}, x_{i+1,0}, \dots, x_{k-1,0}).$$

Отсюда, учитывая, что в силу симметрии функции  $f(x_1, \dots, x_k)$  относительно ее аргументов

$$F(x_{10}, \dots, x_{i-1,0}, x_{i0}, x_{i+1,0}, \dots, x_{k-1,0}) = F(x_{10}, \dots, x_{i-1,0}, 1 - x_{10} - \dots - x_{k-1,0}, x_{i+1,0}, \dots, x_{k-1,0}),$$

получаем, что на рассматриваемом наборе значений аргументов функция  $F$  не может достигать наибольшего значения, откуда следует доказываемое утверждение.

**Лемма 4.** Пусть функция  $g(x)$  на отрезке  $[0, 1]$  монотонно убывает и имеет отрицательную вторую производную, тогда функция

$$H(x_1, \dots, x_{k-1}) = x_1g(x_1) + \dots + x_{k-1}g(x_{k-1}) + (1 - x_1 - \dots - x_{k-1})g(1 - x_1 - \dots - x_{k-1})$$

удовлетворяет условиям леммы 2 для функции  $F(x_1, \dots, x_{k-1})$ .

**Доказательство.**

Имеем

$$H(x_1, \dots, x_{k-1}) = h(x_1, \dots, 1 - x_1 - \dots - x_{k-1}),$$

где

$$h(x_1, \dots, x_k) = x_1g(x_1) + \dots + x_kg(x_k).$$

Значение функции  $h(x_1, \dots, x_k)$  не зависит от порядка аргументов.

Покажем, что функция  $H(x_1, \dots, x_{k-1})$  имеет отрицательную вторую частную производную по переменной  $x_i$  для любого  $i = 1, \dots, k - 1$ . Действительно,

$$H''_{x_i} = 2g'_i(x_i) + x_i g''_{x_i x_i}(x_i) + 2g'_i(1 - x_1 - \dots - x_{k-1}) + (1 - x_1 - \dots - x_{k-1}) g''_{x_i x_i}(1 - x_1 - \dots - x_{k-1}).$$

Так как  $g'_i(x_i) < 0$ ,  $g'_i(1 - x_1 - \dots - x_{k-1}) < 0$ ,  $g''_{x_i x_i}(x_i) < 0$ ,  $g''_{x_i x_i}(1 - x_1 - \dots - x_{k-1}) < 0$ ,  $x \in [0, 1]$ . Таким образом, утверждение леммы 4 верно.

При произвольном  $k$  из леммы 3 получаем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Если на интервале  $n^{-1}, \dots, kr - n^{-1}$ ,  $r = \frac{m}{kn}$  функция  $u(r_1)$  выпукла, то решение задачи 1 при произвольном  $k$  достигается на равном распределении потока по полосам.

**II.2. Исследование случая  $p \sim 0$**

Рассмотрим случай, когда  $p$  мало, а  $n$  велико. В соответствии с (3) имеем

$$u_j(r_j) = p \cdot \frac{n - m_j}{n - 1} + o(p), p \sim 0. \quad (4)$$

Пренебрегая в (3) слагаемым порядка малости выше  $p$ , перепишем (2) в виде

$$u_j(r_j) = p \left( 1 - \frac{m_j - 1}{n - 1} \right). \quad (5)$$

Формулу (5) можно записать в виде

$$u_j(r_j) = p(1 - r_j) + O\left(\frac{1}{n}\right), \frac{1}{n} \sim 0. \quad (6)$$

Пренебрегая бесконечно малым слагаемым, перепишем (6) в виде

$$u_j(r_j) = p(1 - r_j). \quad (7)$$

Из (2) и (7), учитывая, что  $r_2 = 2r - r_1$ , сводим задачу к максимизации:

$$u(r_1, 2r - r_1) = p(r_1(1 - r_1) + (2r - r_1)(1 - (2r - r_1)))/(2r) \quad (8)$$

при ограничении

$$\max(0, 2r - 1) < r_1 < \min(2r, 1). \quad (9)$$

Нетрудно установить, что максимум (8), (9) достигается при  $r_1 = r_2$ .

**II.3. Исследование случая  $p \sim 1$**

Перейдем к рассмотрению случая, когда значение  $p$  близко к 1. При  $p \sim 1$  имеем [3]:

$$u_j(r_j) = \begin{cases} 1, & r_j \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{r_j} - 1 + O(1 - p), & r_j > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

Пренебрегая в (10) бесконечно малым слагаемым, получим ( $j = 1, 2$ ):

$$u(r_1, r_2) = (r_1 \min(1, \frac{1}{r_1} - 1) + r_2 \min(1, \frac{1}{r_2} - 1))/(2r). \quad (11)$$

Максимум (11) с ограничениями (9) достигается при  $r_1 = r_2 = r$ .

На рис. 6 приводятся зависимости  $u(r_1, 2r - r_1)$  от  $r_1$  при  $p \sim 1$ ,  $r = 0,5$ ,  $0 \leq r_1 \leq 1$ ,  $r = 0,4$ ,  $0 \leq r_1 \leq 0,8$ ,  $r = 0,6$ ,  $0,2 \leq r_1 \leq 1$ . При расчете полагаем  $m = 10$ . Величина  $r_1$  принимает значения в интервале  $\max(0, 2r - 1) < r_1 < \min(2r, 1)$ .

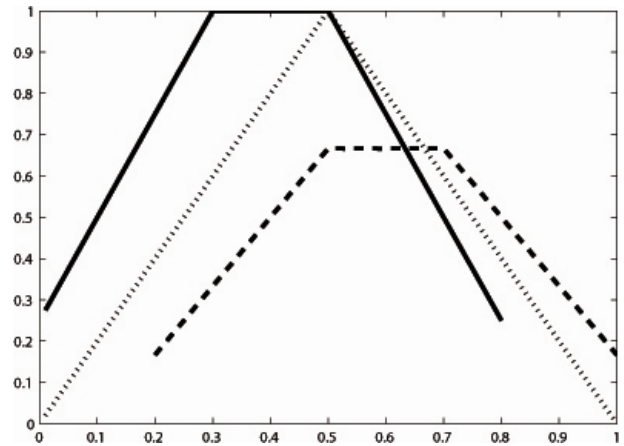


Рис. 6. Зависимость  $u(r_1, 2r - r_1)$  от  $r_1$  при  $p \sim 1$ ,  $r = 0,5$  — пунктирная линия,  $r = 0,4$  — жирная линия,  $r = 0,6$  — пунктирная и жирная

Как видно из приведенных результатов, зависимость  $u(r_1, r_2)$  от  $r_1$  выпукла по  $r_1$ , симметрична и достигает максимума при  $r_1 = r_2$ .

**III. Оптимизация детерминированной и стохастической компонент при канализированном движении**

В силу вышесказанного в условиях задачи 1 при фиксированном значении  $v$  для обеих полос получаем равномерное распределение частиц по полосам. Следовательно, задачу оптимизации потоковой скорости  $v$  можно рассматривать для одной полосы. Считаем, что на полосе имеется  $n$  ячеек и на ней находится  $m$  частиц. Естественно предположить, что значение параметра  $p$ , определяющего индивидуальное поведение в потоке, зависит от  $v$ , то есть определяется заданной функцией  $p = p(v)$ ,  $0 \leq p \leq 1$ . Рассмотрим следующую модель поведения:

$$v + p(v)d(v) = v_0, \quad (12)$$

которая означает, что существует равновесная средняя скорость для частиц рассматриваемого потока, то есть ожидаемая скорость движения в случае незначительного уровня помех.

Реальная средняя скорость  $v(m, n)$  движения частицы по полосе представляет собой сумму детерминированной составляющей  $v$  и стохастической составляющей  $u(m, n)$ :

$$v(m, n) = v + d(v)u(m, n), \quad (13)$$

$$u(m, n) = \frac{n}{m} \sum_{k=1}^{\min(m, n-m)} \frac{Cp(v)}{(1 - p(v))^{k-1}} C_{m-1}^{k-1} C_{n-m-1}^{k-1},$$

$$C = \left( \sum_{k=1}^{\min(m, n-m)} \frac{n}{k} \cdot C_{m-1}^{k-1} C_{n-m-1}^{k-1} \frac{1}{(1 - p(v))^{k-1}} \right)^{-1},$$

$$m \leq n(v) = L/d(v).$$

Число ячеек  $n$  определяется величиной динамического габарита, который в свою очередь зависит от детерминированной составляющей скорости. При росте значения  $v$  возрастает динамический габарит, а следовательно, уменьшается значение  $n$ , что в свою очередь приводит к увеличению  $r = m/n$  и уменьшению значения  $u(m,n)$ . При достижении  $n$  значения  $m$  величина стохастической составляющей скорости уменьшается до нуля. Дальнейшее увеличение детерминированной составляющей недопустимо, так как при больших ее значениях расстояние между частицами не может удовлетворять требованиям динамического габарита.

Минимальное значение  $v = v_{\min}$ , при котором условие (12) может быть выполнено, определяется условием

$$v_{\min} + d(v_{\min}) = v_0. \tag{14}$$

Считаем, что выполняется условие

$$m < L/d(v_{\min}).$$

При невыполнении этого условия требования на динамический габарит не удовлетворялись бы даже при минимальном допустимом значении  $v$ .

Максимальное допустимое значение  $v^*$ , при котором еще могут выполняться требования динами-

ческого габарита, определяется равенством

$$d(v^*) = \frac{L}{m}. \tag{15}$$

Так как из (12) следует, что должно выполняться неравенство  $v \leq v_0$ , то, учитывая (15), получаем для максимального допустимого значения  $v = v_{\max}$ :

$$v_{\max} = \min(d^{-1}(L/m), v_0) = \min(v^*, v_0). \tag{16}$$

При фиксированных значениях  $m$ ,  $L$  и  $v_0$  задача максимизации интенсивности эквивалентна в рассматриваемом случае максимизации средней скорости одноканального потока (13) на интервале допустимых значений  $v$ :

$$v_{\min} \leq v \leq v_{\max}.$$

**Пример 1.** Пусть  $L = 100$  м,  $m = 5$ ,  $v_0 = 10$  (м/с). Для этого случая из (14), (16) найдем  $v_{\min} = 2,6$  м/с,  $v_{\max} = 10$  м/с.

В табл. 1 и на рис. 7 приводятся результаты расчета значения средней скорости движения при допустимых значениях детерминированной составляющей.

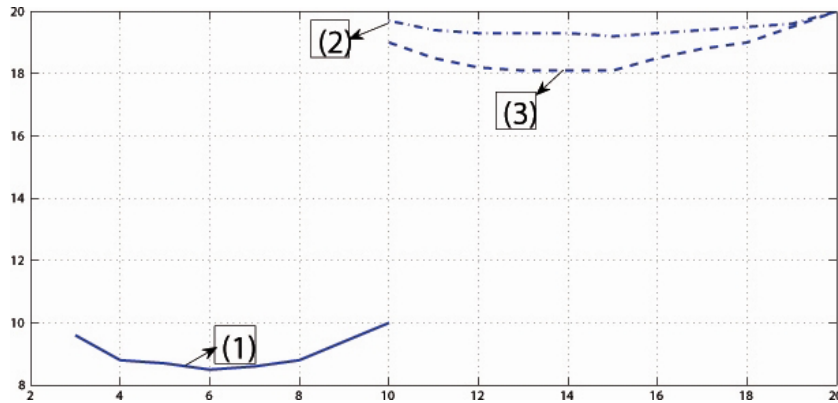


Рис. 7. Зависимость  $v(m,n)$  от  $v_0$  при  $L = 100$  (м),  $m = 5$ ,  $v_0 = 10$ (м/с) — пунктирная линия,  $L = 1000$  (м),  $m = 10$ ,  $v_0 = 20$ (м/с) — жирная линия,  $L = 1000$  (м),  $m = 20$ ,  $v_0 = 20$ (м/с) — пунктирная и жирная

Т а б л и ц а 1

**Зависимость средней скорости  $v(m,n)$  (м) от величины детерминированной составляющей  $v$  (м) при  $L = 100$  (м),  $m = 5$ ,  $v_0 = 10$ (м/с)**

$v$ (м/с)	3	4	5	6	7	8	9	10
$d(v)$ (м)	7.5	8.2	8.9	9.8	10.6	11.8	12.5	13.6
$n$	13	12	11	10	9	8	7	7
$r$	0.38	0.42	0.45	0.50	0.56	0.62	0.71	0.71
$p(v)$	0.94	0.73	0.56	0.41	0.28	0.17	0.07	0
$u(v)$	0.89	0.58	0.42	0.25	0.15	0.07	0.03	0
$u(v)d(v)$ (м/с)	6.6	4.8	3.7	2.5	1.6	0.8	0.4	0
$v(m,n)$ (м/с)	9.6	8.8	8.7	8.5	8.6	8.8	9.4	10.0

Т а б л и ц а 2

Зависимость средней скорости  $v(m,n)$  (м) от величины детерминированной составляющей  $v$  (м) при  $L = 1000$  (м),  $m = 10$ ,  $v_0 = 20$  (м/с)

$v$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$d(v)$ (м)	13.6	14.7	15.8	17	18.3	19.6	21	22.5	24	25.6	27.1
$n$	73	68	63	58	54	50	47	44	41	39	36
$r$	0.14	0.15	0.16	0.17	0.19	0.2	0.21	0.23	0.24	0.26	0.28
$p(v)$	0.74	0.61	0.5	0.41	0.33	0.25	0.19	0.13	0.08	0.04	0
$u(v)$ (м)	0.71	0.57	0.46	0.37	0.29	0.21	0.16	0.1	0.06	0.03	0
$u(v)d(v)$ (м/с)	9.66	8.40	7.26	6.25	5.28	4.24	3.32	2.36	1.51	0.59	0
$v(m,n)$ (м/с)	19.7	19.4	19.3	19.3	19.3	19.2	19.3	19.4	19.5	19.6	20

Т а б л и ц а 3

Зависимость средней скорости  $v(m,n)$  (м) от величины детерминированной составляющей  $v$  (м) при  $L = 1000$  (м),  $m = 20$ ,  $v_0 = 20$ (м/с)

$v$ (м/с)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$d(v)$ (м)	13.6	14.7	15.8	17	18.3	19.6	21	22.5	24	25.6	27.1
$n$	73	68	63	58	54	50	47	44	41	39	36
$r$	0.27	0.29	0.32	0.34	0.37	0.4	0.43	0.45	0.49	0.51	0.56
$p(v)$	0.74	2.11	2.02	1.93	1.85	1.78	1.71	1.64	1.58	1.53	1.47
$u(v)$	0.66	0.51	0.39	0.30	0.23	0.16	0.12	0.08	0.04	0.02	0
$u(v)d(v)$ (м/с)	9.0	7.5	6.2	5.1	4.1	3.1	2.5	1.8	1.0	0.5	0
$v(m,n)$ (м/с)	19.0	18.5	18.2	18.1	18.1	18.1	18.5	18.8	19.0	19.5	20

Значение  $v(m,n)$  достигает максимума, равного  $v_0$ , при  $v = v_{\min}$  ( $p(v_{\min}) = 1$ ) и при  $v = v_0$ , ( $p(v_{\min}) = 0$ ). При  $v_{\min} < v < v_{\max}$  имеем  $u(v_{\min}) < p(v_{\min})$  и  $v(m,n) < v_0$ . Как видно из результатов расчетов, при росте  $v$  значение  $v(m,n)$  сначала убывает, а затем возрастает.

**Пример 2.** Пусть  $L = 1000$ ,  $m = 10$ ,  $v_0 = 20$  (м/с). Для данного случая  $v_{\min} = 8,2$  м/с,  $v_{\max} = 20$  м/с.

Результаты расчетов приводятся в табл. 2 и на рис. 7.

Как и в предыдущем примере, значение  $v(m,n)$  сначала убывает при возрастании  $v$ , а затем возрастает.

**Пример 3.** Пусть  $L = 1000$  м,  $m = 20$ ,  $v_0 = 20$  м/с. Для данного случая  $v_{\min} = 8,2$  м/с,  $v_{\max} = 20$  м/с.

Результаты расчета значения средней скорости движения при допустимых значениях детерминированной составляющей приводятся в табл. 3 и на рис. 7. Значения  $d(v)$ ,  $n$ ,  $p(v)$  и  $v_{\min}$  не зависят от  $m$  и при тех же допустимых значениях  $v$  остаются теми же, что и в примере 2. Так как в данном примере  $v_{\max} = v_0$ , то значение  $v_{\max}$  также остается таким же, как и в примере 2.

**Теорема 3.** При выполнении условий

$$r(v_{\min}) = \frac{md(v_{\min})}{2L} \leq \frac{1}{2} \tag{17}$$

и

$$d^{-1}\left(\frac{L}{m}\right) \geq v_0 \tag{18}$$

наибольшее возможное значение  $v(m,n)$ , равное  $v_0$ , достигается как при  $v = v_{\min}$ , так и при  $v = v_{\max}$ .

Если выполняется (17) и не выполняется (18), то наибольшее значение  $v(m,n)$  достигается только при  $v = v_{\min}$ .

Если же выполняется (18) и не выполняется (17), то наибольшее значение  $v = v(m,n)$  достигается только при  $v = v_{\max}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим случай, когда  $v = v_{\min}$ . Тогда  $p(v_{\min}) = 1$ . Поведение функции  $u(m,n)$  при значениях  $p$ , близких к 1, рассматривалось в п. 1.3. Учитывая формулу (10), при выполнении (17) имеем

$$v(m,n) = v + d(m,n) = (v_0 - d(m,n)) + d(m,n) = v_0,$$

а если (17) не выполняется, то получаем

$$v(m,n) = v_0 - d(v_{\min}) + d(v_{\min}) \left( \frac{1}{r(v_{\min})} - 1 \right) < v_0.$$

Предположим, что выполняется (18). Тогда  $v_{\max} = v_0$ ,  $p(v_{\max}) = 0$ ,  $v(m,n) = v_0$ . Если же (18) не выполняется, то  $0 < p(v_{\max}) < 1$ ,  $u(m,n) < p(v_{\max})$  и при  $v = v_{\max}$

$$v(m,n) = v_{\max} + u(m,n)d(v_{\max}) < < v_{\max} + p(v_{\max})d(v_{\max}) = v_0.$$

Аналогично, при  $v_{\min} < v < v_{\max}$  имеем  $0 < p(v) < 1$ ,  $u(m,n) < p(v)$ ,

$$v(m,n) = v + u(m,n)d(v) < v + p(v)d(v) = v_0.$$

Из приведенных соотношений для значений функции  $v(m,n)$  на концах и во внутренних точках допустимых значений  $v$  следует утверждение теоремы 3.

#### IV. Оптимизация канализированных потоков по распределению и скоростям

Рассмотрим задачу 2. Пусть  $m$  — число частиц,  $\rho$  — плотность потока,  $m_1$  — число частиц на первой полосе. Тогда  $(m_2 = m - m_1)$  — число частиц на второй полосе. Пусть  $L$  — длина каждой полосы. Число ячеек  $n_i = n_i(v_i)$  на  $i$ -й полосе определяется формулой

$$n_i = n_i(v_i) = \frac{L}{d(v_i)}. \quad (19)$$

Будем использовать следующие обозначения:  $v_i$  — скорость регулярного движения по  $i$ -й полосе;  $v(m_i, n_i, v_i)$  — средняя скорость движения частицы на  $i$ -й полосе в предположении, что на ней находится  $m_i$  частиц,  $i = 1, 2$ ;  $v(\vec{m}, \vec{n}, \vec{v}) = v(m_1, m_2, n_1, n_2, v_1, v_2)$  — средняя скорость частицы:

$$v(m_i, n_i, v_i) = v_i + d(v_i)u(m_i, n_i), \quad (20)$$

$$v(\vec{m}, \vec{n}, \vec{v}) = (m_1 v(m_1, n_1, v_1) + m_2 v(m_2, n_2, v_2)) / m, \quad (21)$$

где  $u(m_i, n_i)$  вычисляется по формуле (3),  $p(v)$  определяется из (12), а число  $n = n_i$  ячеек на  $i$ -й полосе вычисляется по формуле  $n_i = L/d(v_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Интенсивность потока

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = \rho_1 v(m_1, n_1, v_1) + \rho_2 v(m_2, n_2, v_2) = \\ &= \rho \left( \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} v(m_1, n_1, v_1) + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} v(m_2, n_2, v_2) \right) = \\ &= \rho v(\vec{m}, \vec{n}, \vec{v}), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\rho$  определяется из соотношения

$$\rho = \frac{m}{L}, \quad (23)$$

по-прежнему представляет собой среднее число частиц, пересекающих неподвижное сечение дороги. Относительно этого сечения детерминированная составляющая скорости первой полосы равна  $v_1$ , а второй —  $v_2$ .

Задача максимизации (22) по  $m_1$  при фиксированных  $m$ ,  $v_1$  и  $v_2$  и задача максимизации (22) по  $m_1$ ,  $v_1$  и  $v_2$  при фиксированных  $m$  сводятся к соответствующим задачам максимизации (21), то есть максимизации средней скорости частицы.

Задачи максимизации (21) по  $m_1$  решаются с учетом того, что на полосе не может находиться частиц больше, чем необходимо при соблюдении динамического габарита:

$$m_i \leq n_i(v_i), \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

На рис. 8 приводятся зависимости  $v(m_1, m - m_1)$  от  $m_1$  при фиксированном значении

$m$ . Наибольшее значение  $v(m_1, m - m_1)$  достигается при  $m_1 = 6$ ,  $m_2 = 4$ . Если значение  $m_1$  увеличить до 7, то условия на динамический габарит для первой полосы не будут выполняться.

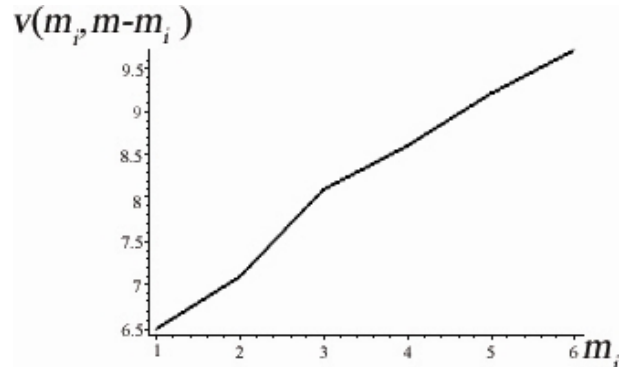


Рис. 8. Зависимость средней скорости  $v(m_1, m - m_1)$  от  $m_1$ ;  $m = 10$ ,  $p = 0,5$ ,  $v_1 = 10$ (м/с),  $v_2 = 5$ (м/сек),  $L = 100$  м

Формулы (1), (3), (20), (21) позволяют также решать задачу в предположении, что скорости  $v_1, v_2$  регулярного движения не фиксированы и осуществляется оптимизация по возможным значениям этих скоростей (задача 2).

#### V. Многополосное движение частиц, при котором разрешаются переходы на другую полосу

Опишем модель, в которой осуществляется движение частиц по двум полосам по следующим правилам.

Имеются две замкнутые последовательности (полосы) ячеек. В каждой последовательности число ячеек равно  $n$ . Каждой ячейке ставится в соответствие пара чисел  $(i, j)$ , где  $j$  — номер полосы ( $j = 1, 2$ ), а  $i$  — порядковый номер ячейки на полосе,  $i = 1, \dots, n$ . Перемещение частицы осуществляется по следующим правилам.

Если ячейка, следующая за той, в которой находится частица, свободна, то в текущий момент времени с вероятностью  $p$  осуществляется перемещение частицы на ячейку вперед.

Если ячейка, следующая за ячейкой, в которой находится частица, занята и занята также клетка, находящаяся позади на соседней полосе, то рассматриваемая частица остается на месте (рис. 9).

Если ячейка, следующая за ячейкой, в которой находится частица, занята, а три прилегающие клетки на соседней полосе свободны, то осуществляется переход рассматриваемой частицы на соседнюю полосу с продвижением вперед (рис. 10).



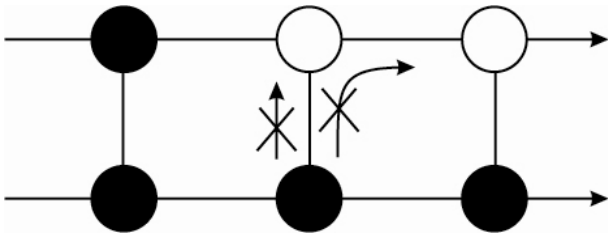


Рис. 9. Переход на другую полосу запрещен

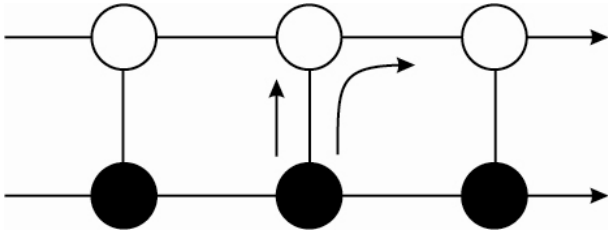


Рис. 10. Переход на другую полосу с продвижением вперед

Если ячейка, следующая за ячейкой, в которой находится частица, и ячейка на другой полосе впереди заняты, а две ячейки позади нее свободны, то осуществляется переход рассматриваемой частицы на соседнюю полосу без продвижения вперед (рис. 11).

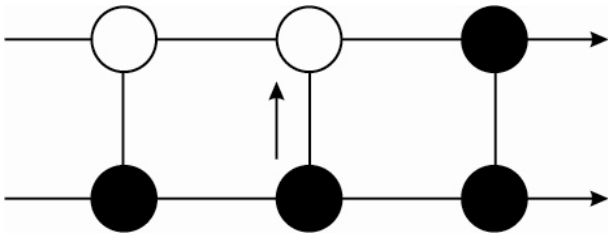


Рис. 11. Переход на другую полосу без продвижения вперед

Возникает задача исследования этой модели, в частности, задача вычисления средней скорости частицы для данной модели.

В [5] рассматривалась аналогичная модель с той разницей, что переход частиц на соседнюю полосу без перемещения вперед не происходит, а переход на другую полосу при наличии двух свободных ячеек на соседней полосе осуществляется независимо от того, занята или свободна ячейка, находящаяся на соседней полосе позади, и разработан приближенный способ вычисления характеристик рассматриваемой системы. Аналогичный способ может быть применен и для исследования характеристик модели, описанной в настоящем параграфе.

Поставленную задачу можно интерпретировать как задачу исследования случайного блуждания частиц по многограннику (рис. 12, 13).

Аналогичным образом модель может быть обобщена на случай многополосного движения с числом полос больше двух.

В табл. 4 приводятся результаты имитационного моделирования для движения частиц по двум полосам при  $m = 10$ ,  $p = 0,5$ . Интервал моделирования полагается равным 10 000 тактам. Полученные значения сравниваются с соответствующими

значениями средней скорости частиц, вычисленными по формуле (3) для движения частиц по полосе при том же значении отношения числа частиц к числу ячеек, то есть со значениями средней скорости частиц для двухполосного движения с одинаковыми полосами, при котором переходов частиц на другую полосу не происходит.

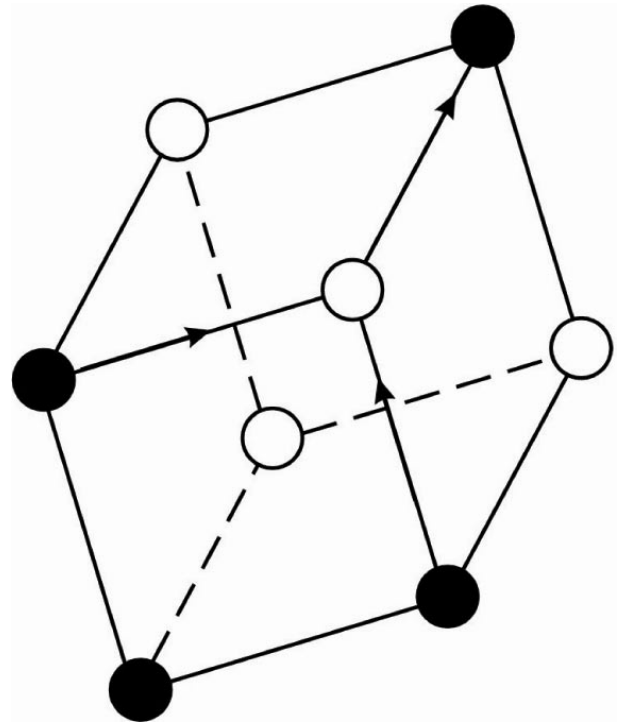


Рис. 12. Двухканальный четырехугольник

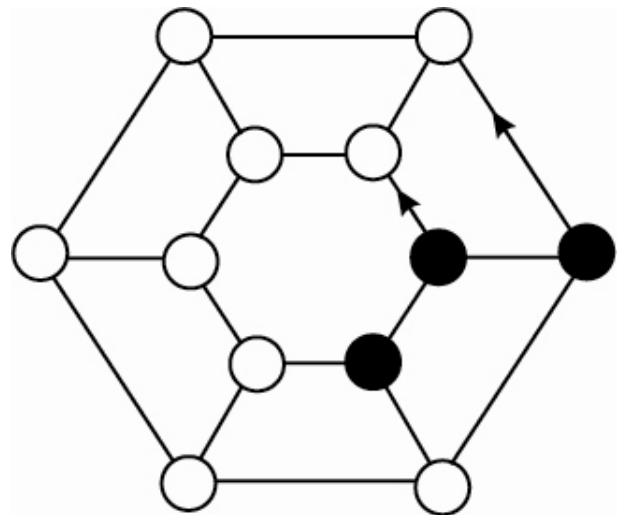


Рис. 13. Двухканальный шестиугольник

Значение  $u^*(r)$  получено с помощью имитационного моделирования (разрешены переходы на соседнюю полосу). Значение  $u^{**}(r)$  вычислено по формуле (3) для канализированного движения;  $\Delta$  — относительная величина (в процентах) превышения  $u^{**}(r)$  над  $u^*(r)$ :

$$\Delta(r) = \left| \frac{u^{**}(r) - u^*(r)}{u^*(r)} \right|.$$

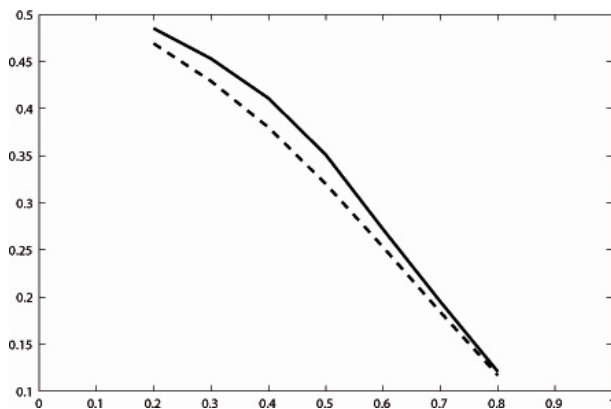
Т а б л и ц а 4

Зависимость средней скорости  $u(r)$  от отношения  $r$  числа частиц к числу ячеек  $n = 10, p = 0,5$

$r$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$u^*(r)$	0,485	0.453	0.411	0.351	0.272	0.195	0.121
$u^{**}(r)$	0.469	0.429	0.380	0.320	0.253	0.184	0.117
$\Delta$ (%)	4.9	8.4	8.0	8.3	8.7	7.1	3.4

Из табл. 4 видно, что значения  $u^*(r)$  превышают значения  $u^{**}(r)$ , что, очевидно, объясняется тем, что имитационной модели соответствовал случай, когда частицы при наличии препятствия движения на полосе имеют возможность перейти на другую полосу. Графики функций  $u^*(r)$  и  $u^{**}(r)$  изображены на рис. 14.

В табл. 5–6 приведены аналогичные результаты сравнения средних скоростей в двух моделях при некоторых других значениях параметров. В таблице 5 приводятся результаты для  $m = 20, p = 0,5$ .

Рис. 14. Зависимости  $u^*(r)$  и  $u^{**}(r)$ 

Т а б л и ц а 5

Зависимость средней скорости  $u(r)$  от отношения  $r$  числа частиц к числу ячеек  $n = 20, p = 0,5$

$r$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$u^*(r)$	0,476	0.444	0.400	0.339	0.267	0.191	0.120
$u^{**}(r)$	0.463	0.412	0.363	0.302	0.241	0.177	0.112
$\Delta$ (%)	5.1	8.0	10.2	12.2	10.8	5.8	7.1

В табл. 6 приводятся результаты для  $n = 30, p = 0,5$ .

Т а б л и ц а 6

Зависимость средней скорости  $u(r)$  от отношения  $r$  числа частиц к числу ячеек  $n = 30, p = 0,5$

$r$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$u^*(r)$	0,471	0.445	0.397	0.338	0.263	0.189	0.119
$u^{**}(r)$	0.448	0.408	0.359	0.300	0.240	0.172	0.112
$\Delta$ (%)	6.5	9.1	5.1	12.7	9.6	9.9	6.2

В рассмотренных примерах величина  $\Delta(r)$  принимает значения от 1.0 до 12.7 процентов.

При фиксированных значениях  $n$  и  $p$  наибольшее значение  $\Delta(r)$  достигается при  $r = 0,5$ . Это можно объяснить тем, что при малых значениях плотности потока редко возникает ситуация, когда требуется переход на другую полосу, а при больших нагрузках переходы на другую полосу затруднены и поэтому также редко происходят. При  $p = 0,8$  значения  $\Delta(r)$  меньше соответствующих значений для  $p = 0,2$  и  $p = 0,5$ .

Работа поддержана Грантом РФФИ 08-01-0939а и проектом АВЦП 2.1.2/369.

Авторы выражают благодарность студенту 5-го курса, первого за восьмидесятилетнюю историю существования МАДИ выпуска «Прикладной математики» Ярошенко А. за активное участие в приведенных в работе численных результатах.

## Литература

1. Buslaev A.P., Prichodko V.M., Tatashev A.G., Yashina M.V. The deterministic-stochastic flow model // arXiv: physics /0504139 v1[physics / soc.-ph] 20 Apr. 2005, P. 1–21.
2. Буслев А.П., Новиков А.Н., Приходько В.М., Таташев А.Г., Яшина М.В. Вероятностные и имитационные подходы к оптимизации автомобильного движения. — М.: Мир, 2003. — 286 с.
3. Buslaev A.P., Tatashev A.G. Particles Flow on the Regular Polygon [accepted to Journal of Concrete and Applicable Mathematics (JCAMM) 10.10.2010].
4. Inose H., Hamada T. Road Traffic Control. — University of Tokio Press, 1975.
5. Бланк М.Л. Точный анализ динамических систем, возникающих в моделировании транспортных потоков // Успехи математических наук. — 2000. — Т. 55. — N 3 (333). С. 167–168.
6. Blank M. L Dynamics of traffic jams: order and chaos // Mosc. Math. J. — V. 1, N. 1. — 2001. — P. 1–26.
7. Беляев Ю.К., Буслев А.П., Селезнев О.В., Таташев А.Г., Яшина М.В. Марковская аппроксимация стохастической модели движения по двум полосам // Московский автомобильно-дорожный институт (ГТУ). — М., 2002. — 32 с. Деп. ВИНТИ 03.07.2002 Г. N 1234-B — 2002.
8. Buslaev A.P., Tatashev A.G., Yashina M.V. Traffic flow stochastic model ( $2 \times 2$ ) with discrete set of states and continuous time. — arXiv: [cond-mat. other] 21 May 2004.
9. Schreckenberg M., Schadschneider A., Nagel K., Ito N. Discrete stochastic models for traffic flow // Phys. Rev. E. 1995. — V. 51, P. 2939–2949.
10. Daganzo C.F. A finite difference approximation for the kinetic wave model // Institute of transportation studies. — Trans. Res. — 1993. — V. 29. В (4).P. 261–276.
11. Бугаев А.С., Буслев А.П., Таташев А.Г. Монотонное случайное блуждание частиц по целочисленной полосе и LYuMen проблема // Мат. моделирование. Т. 18, № 12. — 2006. С. 19–34.
12. Бугаев А.С., Буслев А.П., Таташев А.Г. О моделировании сегрегации двухполосного потока частиц // Мат. моделирование. — 2008. — Т. 20, № 9. — С. 111–119.

Поступила в редакцию 15.10.2010.