УДК 517.95; 519.63

В. М. Ипатова

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Задача инициализации для модели общей циркуляции атмосферы

Рассматривается двухслойная квазигеострофическая модель общей циркуляции атмосферы, основными переменными которой являются баротропная и бароклинная составляющие функции тока. Предполагается, что имеются натурные измерения скорости воздуха. Данные наблюдений используются для отыскания неизвестного начального состояния модели. Расхождение между наблюдаемыми величинами и результатами моделирования измеряется целевым функционалом стоимости. Доказывается разрешимость оптимизационной задачи при положительных значениях параметра регуляризации. Исходная система уравнений модели аппроксимируется полуявной спектрально-разностной схемой, по отношению к которой ставится дискретная задача инициализации. Получена теорема о сходимости численных решений обратной задачи к ее точным решениям.

Ключевые слова: модели динамики атмосферы, обратные и вариационные задачи, численные методы, спектрально-разностные схемы.

1. Введение

В последние десятилетия наблюдается возрастающий интерес к задачам по управлению системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Это обстоятельство продиктовано потребностями современных приложений с объектами управления большой сложности, а также быстрым развитием вычислительной техники, создающей возможности для практических расчетов. К числу таких задач относится проблема ассимиляции данных наблюдений в моделях гидродинамики. Эта обратная (по отношению к моделированию) задача имеет следующую вариационную трактовку: определяется функционал стоимости, измеряющий расхождение между наблюдаемыми величинами и результатами моделирования, после чего отыскиваются те неизвестные входные параметры модели, для которых функционал стоимости принимает свое наименьшее возможное значение. Строгий математический анализ и обоснование процедуры вариационной ассимиляции данных включают в себя исследование таких вопросов, как существование решений оптимизационной задачи и сходимость ее численных решений к точным решениям. В настоящей работе эти вопросы изучаются по отношению к двухслойной бароклинной квазигеострофической модели общей циркуляции атмосферы. Основными переменными модели являются баротропная и бароклинная составляющие функции тока, однако функция тока не относится к числу величин, для которых в метеорологии ведутся натурные наблюдения. По этой причине предполагается, что известны измерения вектора скорости воздуха. В качестве параметров модели, подлежащих определению, выбрано начальное состояние, поскольку задача инициализации является одной из наиболее известных и часто решаемых на практике.

Отметим, что сходимость численных решений задачи ассимиляции данных ранее исследовалась в [1, 2] для квазигеострофических моделей динамики океана при предположениях, что уравнения рассматриваются в прямоугольной области и заданы наблюдения за возвышением уровня поверхности океана.

2. Двухслойная квазигеострофическая модель общей циркуляции атмосферы

Пусть S — двумерная сфера радиуса R, $\theta \in [0, 2\pi)$ — долгота, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ — широта, Ω — угловая скорость вращения Земли, g — ускорение свободного падения, $l = 2\Omega \sin\varphi$ — параметр Кориолиса, $\Delta = \frac{1}{R^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{R^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$ — оператор Лапласа–Бельтрами, $J(u,v) = \frac{1}{R^2\cos\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi} - \frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)$ — якобиан, $\Lambda_n = n(n+1)$ — собственные значения $(-\Delta)$, отвечающие собственным функциям $w_{mn} = w_{mn}(\theta,\varphi)$, $|m| \leqslant n$, где $w_{mn} = Y_{mn}(\theta,\varphi)$ — сферические гармоники.

Атмосфера разбивается по высоте на два слоя, первому слою соответствуют значения давления от 0 до 500 мб, а второму — от 500 до 1000 мб, $\psi_1 = \psi_1(\theta,\varphi,t)$, $\psi_2 = \psi_2(\theta,\varphi,t)$ — действительнозначные функции, обозначающие функцию тока внутри первого и второго слоев, $x_1 = \frac{\psi_1+\psi_2}{2}$, $x_2 = \frac{\psi_2-\psi_1}{2}$ — баротропная и бароклинная составляющие функции тока, $x = (x_1, x_2)$. Модель общей циркуляции атмосферы имеет вид [3]

$$\frac{\partial\Delta x_1}{\partial t} + J\left(x_1,\ \Delta x_1 + l\right) + J\left(x_2,\ \Delta x_2\right) = \mu\,\Delta^2 x_1 - \sigma\Delta\left(x_1 + x_2\right) + f_1, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\Delta x_2 - \alpha x_2)}{\partial t} + J\left(x_2,\ \Delta x_1 + l\right) + J\left(x_1,\ \Delta x_2\right) = \\ = \mu\,\Delta^2 x_2 - \sigma\Delta\left(x_1 + x_2\right) + \alpha J\left(x_1,\ x_2\right) - \mu_1\Delta x_2 + \sigma_1 x_2 + f_2,\end{gathered} \tag{2}$$

$$x\big|_{t=0} = x_0. \tag{3}$$

Здесь $\sigma,\ \mu,\ \sigma_1,\ \mu_1,\ \alpha$ — положительные постоянные, $f_1,\ f_2$ — заданные функции.

Обозначим через $L_2^0 = L_2^0(S)$ действительное гильбертово пространство

$$L_2^0 = \left\{u(\theta,\varphi) \in L_2(S),\ \int_S u dS = 0\right\}$$

со скалярным произведением $(u,v) = \int_S uvdS$ и нормой $\|u\| = (u,u)^{1/2}$. С оператором $(-\Delta)$ свяжем шкалу гильбертовых пространств $H^p = H^p(S)$, $p \in \mathbb{R}$, полагая

$$H^p = \left\{u(\theta,\varphi) \in L_2^0,\ \|u\|_p = \|(-\Delta)^{p/2}u\| < +\infty\right\}.$$

Для вектор-функций $x = (x_1, x_2)$ высоты два введем пространства $V_p = V_p(S) = H^p \times H^p$ с нормой $\|x\|_p = \left(\|x_1\|_p^2 + \|x_2\|_p^2\right)^{1/2}$, где $V_0 = L_2^0 \times L_2^0$, $\|x\|_0 \equiv \|x\|$.
Пусть $T > 0$ — некоторый конечный момент времени, обозначим $G = S \times (0,T)$, $(\cdot,\cdot)_G$, $\|\cdot\|_G$ — скалярное произведение и норма в $L_2(G)$. Введем пространства

$$X = L_2\left(0,T;V_3\right), \quad Y = L_2\left(0,T;V_2\right), \quad Y_1 = L_2\left(0,T;V_1\right),$$

$$Z = L_2\left(0,T;V_{-1}\right), \quad W = \left\{x \in X, \frac{\partial\, x}{\partial\, t} \in Y_1\right\}.$$

В [4] показано, что $C\left([0,\,T]\ ;\, V_2\right)$ непрерывно вложено в W, поэтому для вектор-функций из W имеет смысл начальное условие (3).

Введем билинейные формы $a_1(u\,,v)$, $a_2(u\,,v)$, $b_1(u\,,v)$ и трилинейную форму $b_2(u\,,v\,,w)$:

$$a_1(u\,,v) = \int_S \left(\nabla u_1 \nabla v_1 + \nabla u_2 \nabla v_2 + \alpha u_2 v_2\right)\, dS,$$

$$\begin{aligned}a_2(u\,,v) = \textstyle\int_S\{&\mu\left(\Delta u_1\Delta v_1 + \Delta u_2\Delta v_2\right) + \mu_1\nabla u_2\nabla v_2 + \\ &+ \sigma\nabla(u_1+u_2)\nabla(v_1+v_2) + \sigma_1 u_2 v_2\}dS,\end{aligned}$$

$$b_1(u\,,v) = \int_S \left[J(u_1, l\,)v_1 + J(u_2, l\,)v_2\right]dS,$$

$$\begin{aligned}b_2(u\,,v,w) = \textstyle\int_S \{&J(w_1,v_1)\Delta u_1 + J(w_2,v_2)\Delta u_1 + J(w_1,v_2)\Delta u_2 + \\ &+ J(w_2,v_1)\Delta u_2 + \alpha J(w_2,v_2)u_1\}\ dS.\end{aligned}$$

Вектор-функцию $x \in W$ будем называть решением задачи (1) – (3), если она удовлетворяет при почти всех $t \in [0,T]$ равенству

$$a_1\left(\frac{\partial x}{\partial t}, y\right) + a_2(x,y) = b_1(x,y) + b_2(x,x,y) - (f,y) \quad \forall\, y \in V_2,$$

где $f = (f_1, f_2)$, и для нее выполнено начальное условие (3).

Будем далее обозначать через c различные положительные постоянные. Нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 1 ([5, 6]). *Имеют место неравенства*

$$\|\nabla u\|_{L_4(S)} \leqslant 2^{1/4}\|u\|_1^{1/2}\|u\|_2^{1/2} \quad \forall\, u \in H^2,$$

$$|b_2(u,v,w)| \leqslant c\|u\|_2\|v\|_2\|w\|_2 \quad \forall\, u,v,w \in V_2,$$

$$|(J(w,u),\Delta v) + (J(w,v),\Delta u)| \leqslant c\|\nabla u\|_{L_4(S)}\|\nabla v\|_{L_4(S)}\|w\|_2 \quad \forall\, u,v,w \in H^2.$$

Лемма 2 ([7]). *Пусть B_0, B_1, B_2 — три банаховых пространства, причем $B_0 \subset B_1 \subset B_2$, пространства B_0 и B_2 рефлексивны, B_0 компактно вложено в B_1, а B_1 непрерывно вложено в B_2, и пусть $W = \left\{x \in L_{p_0}(0,T;B_0), \quad \dfrac{\partial x}{\partial t} \in L_{p_1}(0,T;B_2)\right\}$, где T конечно и $1 < p_k < \infty$, $k = 0, 1$. Тогда вложение W в $L_{p_0}(0,T;B_1)$ компактно.*

Покажем, что справедливы

Теорема 1. *Для решения задачи* (1) – (3) *верны априорные оценки*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t)\|_1 + \|x\|_Y \leqslant c\left(\|x_0\|_1 + \|f\|_Z\right), \tag{4}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|x(t)\|_2 + \|x\|_X \leqslant c\left(\|x_0\|_2 + \|f\|_Z\right), \quad \left\|\frac{\partial x}{\partial t}\right\|_{Y_1} \leqslant c_1, \tag{5}$$

где c_1 зависит от $\|x_0\|_2$ и $\|f\|_Z$.

Доказательство. Умножая (1) – (2) на x скалярно в V_0, имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|x\|_1^2 + \alpha\|x_2\|^2\right) + \mu\|x\|_2^2 + \sigma\|x_1+x_2\|_1^2 + \mu_1\|x_2\|_1^2 + \sigma_1\|x_2\|^2 =\\ &= -(f,x) \leqslant \|f\|_{-1}\|x\|_1 \leqslant \frac{\mu}{2}\|x\|_1^2 + c\|f\|_{-1}^2.\end{aligned}$$

Применяя неравенство Гронуолла, получаем (4). Умножая (1) – (2) на Δx скалярно в V_0, находим, что

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|x\|_2^2 + \alpha\|x_2\|_1^2\right) + \mu\|x\|_3^2 + \sigma\|x_1+x_2\|_2^2 + \mu_1\|x_2\|_2^2 + \sigma_1\|x_2\|_1^2 =\\ &= (f,\Delta x) - (J(x_1,l),\Delta x_1) - (J(x_2,l),\Delta x_2) \leqslant \|f\|_{-1}\|x\|_3 + c\|x\|_1\|x\|_2 \leqslant\\ &\leqslant \frac{\mu}{2}\|x\|_3^2 + c\left(\|f\|_{-1}^2 + \|x\|_1^2\right).\end{aligned}$$

Применяя неравенство Гронуолла, убеждаемся в справедливости первой оценки (5). Вторую оценку (5) можно получить, умножая (1) – (2) на $\partial x/\partial t$ скалярно в V_0.

Теорема 2. *При всех $x_0 \in V_2$ и $F \in Z$ задача* (1) – (3) *имеет единственное решение $x \in W$.*

Доказательство. Для построения решения воспользуемся методом Бубнова–Галеркина. Пусть Q_k есть линейная оболочка собственных векторов w_{mn}, $|m| \leqslant n$, $n = \overline{1,k}$, и $Q^k = Q_k \times Q_k$. Будем искать приближенное решение $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ в виде

$$x_j^k = \sum_{n=1}^{k}\sum_{m=-n}^{n} r_{j,mn}^k(t)\,w_{mn}(\theta,\varphi).$$

Неизвестные функции времени находятся из системы

$$a_1\left(\frac{\partial x^k}{\partial t}, y\right) + a_2\left(x^k, y\right) = b_1\left(x^k, y\right) + b_2\left(x^k, x^k, y\right) - (f, y)\,,\\ \left(x^k, y\right)\Big|_{t=0} = (x_0, y) \quad \forall y \in Q^k. \tag{6}$$

Повторяя рассуждения теоремы 1, убеждаемся, что для приближенного решения верны оценки, аналогичные (4) – (5). Выделим из последовательности приближенных решений сходящуюся подпоследовательность (за которой для краткости сохраним прежнее обозначение) $x^k \to x$ слабо в W и сильно в $L_2(0,t;V_p)$ при $p<3$. Переходя в (6) к пределу при $k\to\infty$, находим, что x является решением задачи (1) – (3).

Пусть x и u какие-либо решения задачи (1) – (3). Для разности $z = u - x$ имеем

$$\frac{\partial \Delta z_1}{\partial t} + J\left(z_1,\ \Delta u_1 + l\right) + J\left(x_1,\ \Delta z_1\right) + J\left(z_2,\ \Delta u_2\right) + \\ + J\left(x_2,\ \Delta z_2\right) - \mu\,\Delta^2 z_1 + \sigma\Delta\left(z_1 + z_2\right) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial(\Delta z_2 - \alpha z_2)}{\partial t} + J\left(z_2,\ \Delta u_1 + l\right) + J\left(x_2,\ \Delta z_1\right) + J\left(z_1,\ \Delta u_2\right) + \\ + J\left(x_1,\ \Delta z_2\right) - \mu\,\Delta^2 z_2 + \sigma\Delta\left(x_1 + x_2\right) + \mu_1\Delta z_2 - \sigma_1 z_2 = \\ = \alpha\left(J\left(z_1,\ u_2\right) + J\left(x_1,\ z_2\right)\right), \tag{8}$$

$$z|_{t=0} = 0.$$

Умножая (7) – (8) на z скалярно в V_0, получаем соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|z\|_1^2 + \alpha\|z_2\|^2\right) + \mu\|z\|_2^2 + \sigma\|z_1+z_2\|_1^2 + \mu_1\|z_2\|_1^2 + \sigma_1\|z_2\|^2 = \\ = (J(z_1,x_1) + J(z_2,x_2), \Delta z_1) + (J(z_1,x_2) + J(z_2,x_1), \Delta z_2) - \alpha(J(z_1,x_2), z_2). \tag{9}$$

Оценим характерные нелинейные члены в правой части (9):

$$|(J(z_1,x_1),\Delta z_1)| \leqslant \|\nabla z_1\|_{L_4(S)}\|\nabla x_1\|_{L_4(S)}\|z_1\|_2 \leqslant \\ \leqslant c\|z_1\|_1^{1/2}\|z_1\|_2^{3/2}\|x_1\|_2 \leqslant \frac{\mu}{2}\|z_1\|_2^2 + c\|z_1\|_1^2\|x_1\|_2^4,$$

$$|(J(z_1,x_2),z_2)| \leqslant \|z_1\|_1\|\nabla x_2\|_{L_4(S)}\|z_2\|_{L_4(S)} \leqslant c\|z\|_1^2\|x_2\|_2.$$

Таким образом, из (9) вытекает оценка

$$\frac{d}{dt}\left(\|z\|_1^2 + \alpha\|z_2\|^2\right) \leqslant c\|z\|_1^2\left(\|x\|_2^4 + \|x\|_2\right).$$

Используя неравенство Гронуолла, заключаем, что $z = 0$.

3. Задача инициализации и ее разрешимость

Пусть на измеримом множестве $G_0 \subset G$ известны наблюдения за вектором скорости воздуха на первом и втором уровнях, которые задаются функциями u_k^0, v_k^0, $k = 1,2$. Обозначим через χ характеристическую функцию G_0 и продолжим u_k^0, v_k^0 нулем на множество $G \setminus G_0$. Каждому решению задачи (1) – (3) сопоставим функции $\psi_1(x) = x_1 - x_2$, $\psi_2(x) = x_1 + x_2$, $v_k(x) = -\dfrac{1}{R\cos\varphi}\dfrac{\partial\psi_k(x)}{\partial\theta}$, $u_k(x) = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial\psi_k(x)}{\partial\varphi}$, $k = 1,2$.

Определим на W функционал стоимости

$$I\left(x\right) = m_1\left\|\chi u_1(x) - u_1^0\right\|_G^2 + m_2\left\|\chi v_1(x) - v_1^0\right\|_G^2 + m_3\left\|\chi u_2(x) - u_2^0\right\|_G^2 + m_4\left\|\chi v_2(x) - v_2^0\right\|_G^2,$$

где m_1, m_2, m_3, m_4 — неотрицательные весовые множители.

Задачу (1) – (3) кратко запишем в виде $\Phi(x) = (f;\, x_0)$. Из теорем 1 и 2 вытекает, что существует ограниченный обратный оператор $\Phi^{-1} : Z \times V_2 \to W$, определенный на всем $Z \times V_2$.

Теорема 3. *Пусть $f \in Z$, $x_n = \Phi^{-1}(f;\, y_n)$, $x = \Phi^{-1}(f;\, x_0)$ и $y_n \to x_0$ слабо в V_2. Тогда $x_n \to x$ слабо в W.*

Доказательство. Последовательность $\{y_n\}$ ограничена в V_2. По теореме 1 последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной в W. Выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $x_n \to z$ слабо в W. В силу леммы 2 тогда $x_n \to z$ сильно в Y. Пространство $C([0,\, T]\,;\, V_2)$ непрерывно вложено в W, поэтому $y_n \to z|_{t=0}$ слабо в V_2. Используя оценки леммы 1, убеждаемся, что $b_2(x_n,\, x_n,\, y) \to b_2(z,\, z,\, y)$ слабо в $L_2(0,\, T)$ при $\forall\, y \in V_2$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, находим, что z является решением задачи (1) – (3), то есть $z = x$.

Будем считать, что данные наблюдений используются для отыскания неизвестного начального состояния x_0, в то время как правая часть f в модели (1) – (2) известна и фиксирована. Определим на V_2 функционал

$$J_\lambda(x_0) = \lambda \|x_0 - x_0^a\|_2^2 + I\left(\Phi^{-1}(f;\, x_0)\right), \tag{10}$$

где $\lambda \geqslant 0$ — параметр регуляризации, $x_0^a \in V_2$ — некоторое априорно известное приближенное значение x_0.

Рассмотрим следующую задачу инициализации: при заданном $f \in Z$ найти функцию $x_0 \in V_2$ такую, что

$$J_\lambda(x_0) = \inf\left\{J_\lambda(y) \,|\, y \in V_2\right\}. \tag{11}$$

Достаточные условия ее разрешимости дает

Теорема 4. *Если $\lambda > 0$ и функции u_k^0, v_k^0, $k = 1, 2$ принадлежат $L_2(G)$, то задача* (11) *имеет решение.*

Доказательство. Обозначим через $m = \inf\left\{J_\lambda(y) \,|\, y \in V_2\right\}$ и рассмотрим минимизирующую J_λ последовательность $\{y_n\}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} J_\lambda(y_n) = m$. Если $\lambda > 0$, то последовательность $\{y_n\}$ ограничена в V_2. Выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $y_n \to x_0$ слабо в V_2. Обозначим $z_n = \Phi^{-1}(f;\, y_n)$, $x = \Phi^{-1}(f;\, x_0)$. По теореме 3 имеет место сходимость $z_n \to x$ слабо в W. Из леммы 2 вытекает, что $z_n \to x$ сильно в Y. Тогда $u_k(z_n) \to u_k(x)$, $v_k(z_n) \to v_k(x)$, $k = 1, 2$, сильно в $L_2(G)$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} I(z_n) = I(x)$. По свойству слабой полунепрерывности снизу нормы имеем $\|x_0 - x_0^a\|_2 \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \|y_n - x_0^a\|_2$, следовательно, $J_\lambda(x_0) \leqslant m$. Учитывая определение m, приходим к выводу, что x_0 является решением задачи (11). Поскольку $J_\lambda(x_0) = m$, то $\|y_n\|_2 \to \|x_0\|_2$, значит, $y_n \to x_0$ сильно в V_2.

4. Сходимость численных решений задачи инициализации

Перейдем к рассмотрению дискретного метода для отыскания приближенных решений задачи (11). Пусть $\mathcal{H}_n$ — собственное подпространство оператора Лапласа–Бельтрами, соответствующее собственному значению $\Lambda_n = n(n+1)$. Обозначим через $\mathcal{H}^N = \cup_{n=1}^N \mathcal{H}_n$, $\Xi^N = \mathcal{H}^N \times \mathcal{H}^N$ и через P_N оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{H}^N$. Пусть $\tau = T/K$ — шаг сетки по времени, $t_k = k\tau$, $k = \overline{0, K}$, и x^k — значение приближенного решения на слое $t = t_k$. Далее нам потребуется предположение о том, что при изменении τ и N выполняется неравенство

$$\tau\Lambda_N = \tau N(N+1) \leqslant C \tag{12}$$

с некоторой положительной константой C.

Аппроксимируем задачу (1) – (3) полуявной спектрально-разностной схемой:

$$\begin{gathered}\Delta\left(x_1^k - x_1^{k-1}\right)/\tau + P_N J(x_1^{k-1}, \Delta x_1^{k-1} + l) + P_N J(x_2^{k-1}, \Delta x_2^{k-1}) + \\ +\sigma\Delta(x_1^k + x_2^k) - \mu\Delta^2 x_1^k = q_1^k \in \mathcal{H}^N, \\ (\Delta - \alpha)\left(x_2^k - x_2^{k-1}\right)/\tau + P_N J(x_2^{k-1}, \Delta x_1^{k-1} + l) + P_N J(x_1^{k-1}, \Delta x_2^{k-1}) - \\ -\alpha P_N J(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) + \sigma\Delta(x_1^k + x_2^k) - \mu\Delta^2 x_2^k + \mu_1 \Delta x_2^k - \sigma_1 x_2^k = q_2^k \in \mathcal{H}^N, \\ x^k \in \Xi^N, \quad k = \overline{1, K}, \quad x^0 = \rho \in \Xi^N.\end{gathered} \tag{13}$$

Задачу (13) будем записывать в виде $F(x) = (q; \rho)$, где оператор F зависит от τ и N, но для краткости мы эту зависимость опускаем. Уравнения (13) представляют собой линейную относительно x^k систему с невырожденной матрицей, поэтому оператор F однозначно обратим на всем $\left(\Xi^N\right)^K \times \Xi^N$.

Зададим способ восполнения сеточных функций $x = \{x^k\}_{k=0}^K$ на весь отрезок $[0, T]$ при помощи равенства

$$A(x)(\theta, \varphi, t) = \frac{t_k - t}{\tau} x^{k-1}(\theta, \varphi) + \frac{t - t_{k-1}}{\tau} x^k(\theta, \varphi) \quad \text{при } t \in [t_{k-1}, t_k].$$

Определим на Ξ^N функционал, аналогичный функционалу стоимости (10), полагая

$$S_\lambda(\rho) = \lambda \left\|\rho - x_0^a\right\|_2^2 + I\left(A\left(F^{-1}(q;\, \rho)\right)\right),$$

где внешнее воздействие $q \in \left(\Xi^N\right)^K$ считается известным и фиксированным.

Рассмотрим следующую дискретную задачу инициализации: при заданном $q \in \left(\Xi^N\right)^K$ найти функцию $\rho \in \Xi^N$ такую, что

$$S_\lambda(\rho) = \inf\left\{ S_\lambda(y) \,|\, y \in \Xi^N \right\}. \tag{14}$$

Заметим, что эта задача является приближенным конечномерным аналогом оптимизационной задачи (11).

Для зависящих от времени функций зададим оператор проектирования на сетку P_h, действующий по формуле $P_h f^k = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t_k} P_N f(t)\,dt$. Обозначим через

$$\|x\|_{X_h} = \left(\tau \sum_{k=0}^{K} \|x^k\|_2^2\right)^{1/2}, \ \|q\|_{Z_h} = \left(\tau \sum_{k=1}^{K} \|q^k\|_{-2}^2\right)^{1/2}, \ \|x\|_{W_h} = \max_{0 \leqslant k \leqslant K} \|x^k\|_1 + \|x\|_{X_h}.$$

Далее нам потребуется

Теорема 5 ([8]). *Пусть X и Y — банаховы пространства, $\mathcal{F}: X \to Y$ – дифференцируемый по Фреше оператор, причем:*

1) $\mathcal{F}(0) = 0$ *и для его производной выполняется неравенство Липшица:*

$$\left\|\mathcal{F}'(y_1) - \mathcal{F}'(y_2)\right\|_{X \to Y} \leqslant L \left\|y_1 - y_2\right\|_X \quad \forall y_1, y_2 \in B_r(0),$$

где $B_r(0) = \{y \in X \mid \|y\|_X \leqslant r\}$, $L = L(r) > 0$ — зависящая от r константа;

2) *оператор $\mathcal{F}'(0)$ замкнут и имеет определенный на всем Y непрерывный обратный оператор $(\mathcal{F}'(0))^{-1}$.*

Тогда для любого $q \in Y$ такого, что $\|q\|_Y \leqslant \gamma/(M^2 L)$, $0 < \gamma < 1$, существует единственный элемент x, являющийся решением уравнения $\mathcal{F}(x) = q$ и удовлетворяющий оценке $\|x\|_X \leqslant \gamma/(ML)$, где $M = \left\|(\mathcal{F}'(0))^{-1}\right\|_{Y \to X}$.

Обозначим через $F'(y)$ производную оператора F и рассмотрим уравнение

$$F'(y)x = (q; \rho), \tag{15}$$

которое представляет собой систему

$$\begin{gathered}\frac{\Delta x_1^k-\Delta x_1^{k-1}}{\tau}+P_N J(x_1^{k-1},\Delta y_1^{k-1}+l)+P_N J(x_2^{k-1},\Delta y_2^{k-1})+\\+P_N J(y_1^{k-1},\Delta x_1^{k-1})+P_N J(y_2^{k-1},\Delta x_2^{k-1})+\sigma\Delta(x_1^k+x_2^k)-\mu\Delta^2 x_1^k=q_1^k,\end{gathered}\tag{16}$$

$$\begin{gathered}\frac{(\Delta-\alpha)(x_2^k-x_2^{k-1})}{\tau}+P_N J(x_2^{k-1},\Delta y_1^{k-1}+l)+P_N J(x_1^{k-1},\Delta y_2^{k-1})+\\+P_N J(y_2^{k-1},\Delta x_1^{k-1})+P_N J(y_1^{k-1},\Delta x_2^{k-1})-\alpha P_N J(y_1^{k-1},x_2^{k-1})-\\-\alpha P_N J(x_1^{k-1},y_2^{k-1})+\sigma\Delta(x_1^k+x_2^k)-\mu\Delta^2 x_2^k+\mu_1\Delta x_2^k-\sigma_1 x_2^k=q_2^k,\end{gathered}\tag{17}$$

$$x^k\in\Xi^N,\quad k=\overline{1,K},\quad x^0=\rho\in\Xi^N.$$

Теорема 6. *Если верно* (12), *то для решения уравнения* (15) *выполняется оценка*

$$\|x\|_{W_h}\leqslant c_2\left(\|\rho\|_1^2\ +\|q\|_{Z_h}^2\right)^{1/2},$$

где $c_2>0$ *зависит только от* $\|y\|_{W_h}$.

Доказательство. Умножим (16) на τx_1^k и (17) на τx_2^k скалярно в L_2^0. Просуммировав результаты, имеем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\|x^k\|_1^2+\frac{1}{2}\|x^k-x^{k-1}\|_1^2+\frac{\alpha}{2}\|x_2^k\|^2+\frac{\alpha}{2}\|x_2^k-x_2^{k-1}\|^2+\tau\Big(\mu\|x^k\|_2^2+\sigma\|x_1^k+x_2^k\|_1^2+\\+\mu_1\|x_2^k\|_1^2+\sigma_1\|x_2^k\|^2\Big)=\frac{1}{2}\|x^{k-1}\|_1^2+\frac{\alpha}{2}\|x_2^{k-1}\|^2-\tau(q^k,x^k)+\tau\Big(J(x_1^{k-1},\Delta y_1^{k-1}+l)+\\+J(x_2^{k-1},\Delta y_2^{k-1})+J(y_1^{k-1},\Delta x_1^{k-1})+J(y_2^{k-1},\Delta x_2^{k-1}),x_1^k\Big)+\tau\Big(J(x_2^{k-1},\Delta y_1^{k-1}+l)+\\+J(x_1^{k-1},\Delta y_2^{k-1})+J(y_2^{k-1},\Delta x_1^{k-1})+J(y_1^{k-1},\Delta x_2^{k-1})-\alpha J(y_1^{k-1},x_2^{k-1})-\alpha J(x_1^{k-1},y_2^{k-1}),x_2^k\Big).\end{gathered}$$

Используя лемму 1 и неравенство Юнга, оценим

$$\begin{gathered}\tau\left|\Big(J(x_2^{k-1},\Delta y_2^{k-1})+J(y_2^{k-1},\Delta x_2^{k-1}),x_1^k\Big)\right|\leqslant c\tau\|x_1^k\|_2\|\nabla x_2^{k-1}\|_{L_4(S)}\|\nabla y_2^{k-1}\|_{L_4(S)}\leqslant\\\leqslant c\tau\|x_1^k\|_2\|x_2^{k-1}\|_1^{1/2}\left(\|x_2^k\|_2^{1/2}+\Lambda_N^{1/4}\|x_2^k-x_2^{k-1}\|_1^{1/2}\right)\|\nabla y_2^{k-1}\|_{L_4(S)}\leqslant\\\leqslant\frac{\tau\mu}{6}\|x^k\|_2^2+\frac{1}{4}\|x_2^k-x_2^{k-1}\|_1^2+c\tau\|x_2^{k-1}\|_1^2\|\nabla y_2^{k-1}\|_{L_4(S)}^4.\end{gathered}$$

При помощи аналогичных рассуждений получаем соотношение

$$\|x^k\|_1^2+\alpha\|x_2^k\|^2+\tau\mu\|x^k\|_2^2\leqslant\Big(1+c\tau(1+\|y^{k-1}\|_1^2\|y^{k-1}\|_2^2)\Big)\|x^{k-1}\|_1^2+\alpha\|x_2^{k-1}\|_1^2+c\tau\|q^k\|_{-2}^2,$$

из которого следует оценка $\|x\|_{W_h}^2\leqslant c\exp\left(\|y\|_{W_h}^4\right)\left(\|\rho\|_1^2\ +\|q\|_{Z_h}^2\right)$.

Лемма 3. *Для оператора* F' *верно неравенство Липшица*:

$$\|F'(y)-F'(z)\|_{W_h\to Z_h\times V_1}\leqslant L\|y-z\|_{W_h},$$

где L *— положительнная постоянная, не зависящая от* τ *и* N.

Доказательство. Обозначим $s=y-z$. Для любого $x\in(\Xi^N)^{K+1}$ имеем $F'(y)x-F'(z)x=(\xi;0)$, где

$$\xi_1^k=P_N\Big(J(x_1^{k-1},\Delta s_1^{k-1})+J(x_2^{k-1},\Delta s_2^{k-1})+J(s_1^{k-1},\Delta x_1^{k-1})+J(s_2^{k-1},\Delta x_2^{k-1})\Big),$$

$$\begin{gathered}\xi_2^k=P_N\Big(J(x_2^{k-1},\Delta s_1^{k-1})+J(x_1^{k-1},\Delta s_2^{k-1})+J(s_2^{k-1},\Delta x_1^{k-1})+J(s_1^{k-1},\Delta x_2^{k-1})-\\-\alpha J(s_1^{k-1},x_2^{k-1})-\alpha J(x_1^{k-1},s_2^{k-1})\Big).\end{gathered}$$

Пусть $r\in(\Xi^N)^K$. Используя оценки вида

$$\begin{gathered}\left|\Big(J(x_1^{k-1},\Delta s_1^{k-1})+J(s_1^{k-1},\Delta x_1^{k-1}),r_1^k\Big)\right|\leqslant c\|r_1^k\|_2\|\nabla s_1^{k-1}\|_{L_4(S)}\|\nabla x_1^{k-1}\|_{L_4(S)}\leqslant\\\leqslant c\|r_1^k\|_2\|s_1^{k-1}\|_1^{1/2}\|s_1^{k-1}\|_2^{1/2}\|x_1^{k-1}\|_1^{1/2}\|x_1^{k-1}\|_2^{1/2},\end{gathered}$$

приходим к неравенству

$$\tau \left| \sum_{k=1}^{K} (\xi^k, r^k) \right| \leqslant L \left(\tau \sum_{k=1}^{K} \|r^k\|_2^2 \right)^{1/2} \max_{0 \leqslant k \leqslant K} \|s^k\|_1^{1/2} \|s\|_{X_h}^{1/2} \max_{0 \leqslant k \leqslant K} \|x^k\|_1^{1/2} \|x\|_{X_h}^{1/2}.$$

Последние два утверждения позволяют доказать теоремы об устойчивости и сходимости (13).

Теорема 7. *Пусть верно* (12), *x является решением уравнения $F(x) = (q; \rho)$, а y есть решение уравнения $F(y) = (q+dq; \rho+d\rho)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, зависящее только от ε и $\|x\|_{W_h}$, такое, что $\|x - y\|_{W_h} \leqslant \varepsilon$ при $\left(\|d\rho\|_1^2 + \|dq\|_{Z_h}^2\right)^{1/2} \leqslant \delta$.*

Доказательство. Обозначим $z = y - x$ и рассмотрим оператор $\mathcal{F}(z) = F(x+z) - F(x)$, действующий из W_h в $Z_h \times V_1$. По лемме 3 оператор производной $\mathcal{F}'(z) = F'(x+z)$ непрерывен по Липшицу и в силу теоремы 6 норма $\|(\mathcal{F}'(0))^{-1}\|_{Z_h \times V_1 \to W_h} \leqslant c_2$. Таким образом, для $\mathcal{F}$ выполнены все условия теоремы 5. Поскольку (13) имеет единственное решение, то можно положить $\delta = \gamma(1-\gamma)/(c_2^2 L)$, где $\gamma = \min\{\varepsilon c_2 L, 1/2\}$.

Теорема 8. *Пусть $x_0 \in V_2$, $f \in Z$, функция $x \in W$ является решением задачи* (1) – (3) *и $w^k = P_N x(t_k)$, $k = \overline{0, K}$, а сеточная функция y есть решение уравнения $F(y) = (P_h f; P_N x_0)$. Тогда при выполнении* (12) *имеет место сходимость $\|y - w\|_{W_h} \to 0$ при $\tau \to 0$, $N \to \infty$. Если к тому же u_j^0, v_j^0, $j = 1, 2$, принадлежат $L_2(G)$, то $I(A(y)) \to I(x)$ при $\tau \to 0$, $N \to \infty$.*

Доказательство. Применяя оператор P_h обеим частям (1) и (2), получаем уравнение $F(w) = (P_h f + dq; P_N x_0)$. Обозначим $z = P_N x$, $z_t = \dfrac{\partial z}{\partial t}$, $x_t = \dfrac{\partial x}{\partial t}$, $[x] = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \|x(t)\|_2$ и оценим характерные члены, входящие в невязку dq.

$$d^k = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\Delta^2 z(t) - \Delta^2 w^k) dt = -\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-1}) \Delta^2 z_t dt,$$

$$\|d^k\|_{-2} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-1}) \|z_t\|_2 dt \leqslant \frac{\sqrt{\Lambda_N}}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-1}) \|z_t\|_1 dt \leqslant \sqrt{\frac{\tau \Lambda_N}{3}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|x_t\|_1^2 dt \right)^{1/2},$$

поэтому $\|d\|_{Z_h} \leqslant c\sqrt{\tau} \|x_t\|_{Y_1}$. Далее,

$$\delta^k = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_N \left(J(w^{k-1}, \Delta w^{k-1}) - J(x, \Delta x) \right) dt = \beta^k + \eta^k,$$

$$\beta^k = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_N \left(J(z, \Delta z) - J(x, \Delta x) \right) dt = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_N \left(J(z - x, \Delta x) + J(z, \Delta z - \Delta x) \right) dt,$$

$$\|\beta^k\|_{-2} \leqslant \frac{c}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|x\|_2 \|x - z\|_2 dt \leqslant \frac{c}{\sqrt{\tau}} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|x\|_2^2 \, \|x - z\|_2^2 dt \right)^{1/2},$$

$$\|\beta\|_{Z_h} \leqslant c \|x - P_N x\|_Y [x] \leqslant \frac{c}{\sqrt{\Lambda_N}} \|x\|_X [x].$$

Для второго слагаемого, входящего в δ^k, имеем

$$\eta^k = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_N \left(J(w^{k-1}, \Delta w^{k-1}) - J(z, \Delta z) \right) dt = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - t) P_N \frac{\partial J(z, \Delta z)}{\partial t} \, dt,$$

$$\|\eta^k\|_{-2} \leqslant \frac{c}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_k) \|z\|_2 \|z_t\|_2 dt \leqslant \frac{c\sqrt{\Lambda_N}}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_k) \|x\|_2 \|z_t\|_1 dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{c\tau \Lambda_N} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|x\|_2^2 \, \|x_t\|_1^2 dt \right)^{1/2}, \quad \|\eta\|_{Z_h} \leqslant c\sqrt{\tau} \|x_t\|_{Y_1} [x].$$

Применяя подобные рассуждения, убеждаемся, что $\|dq\|_{Z_h} \to 0$ при $\tau \to 0$, $N \to \infty$. Нетрудно заметить, что $\|w\|_{W_h} \leqslant c\|x\|_W$. В силу теоремы 7 имеет место сходимость $\|y - w\|_{W_h} \to 0$ при $\tau \to 0$, $N \to \infty$. Оценим $\|A(y)-x\|_{Y_1} \leqslant \|A(y)-A(w)\|_{Y_1}+\|A(w)-z\|_{Y_1}+\|z-x\|_{Y_1}$, где $\|A(y)-A(w)\|_{Y_1} \leqslant c\|y-w\|_{W_h}$,

$$A(w) - z = \frac{t_k - t}{\tau}(z(t_{k-1}) - z(t)) + \frac{t - t_{k-1}}{\tau}(z(t_k) - z(t)) \quad \text{при } t \in [t_{k-1}, t_k],$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A(w) - z\|_1^2 dt \leqslant c \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{(t_k - t)^2}{\tau^2} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t} z_t dt' \right\|_1^2 dt \leqslant c\tau^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|z_t\|_1^2 dt,$$

$$\|A(w) - z\|_{Y_1} \leqslant c\tau\sqrt{\tau}\|x_t\|_{Y_1}, \quad \|z - x\|_{Y_1} \leqslant \Lambda_N^{-1}\|x\|_X.$$

Поскольку $A(y) \to x$ сильно в Y_1, то $I(A(y)) \to I(x)$ при $\tau \to 0$, $N \to \infty$.

Покажем теперь, что справедлива следующая теорема о сходимости численных решений задачи идентификации

Теорема 9. *Пусть данные u_j^0, v_j^0, $j = 1, 2$, принадлежат $L_2(G)$ и последовательность функций ρ_n такова, что:*

1) *ρ_n является решением задачи инициализации* (14) *с шагом по времени τ_n, максимальным номером собственного подпространства N_n, правой частью $q = P_h f$ и параметром регуляризации $\lambda_n \geqslant 0$;*

2) *$\tau_n \to 0$, $N_n \to \infty$, $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$ и выполняется* (12).

Тогда:

1) *если $\lambda_0 > 0$, то ρ_n содержит подпоследовательность, сильно в V_2 сходящуюся к решению задачи* (11) *с теми же данными и $\lambda = \lambda_0$;*

2) *если $\lambda_0 = 0$ и ρ_n ограничена в V_2, то из ρ_n можно выделить подпоследовательность, слабо в V_2 сходящуюся к решению задачи* (11) *с теми же данными и $\lambda = 0$.*

Доказательство. Обозначим через $m_\lambda = \inf \{J_\lambda(y) \,|\, y \in V_2\}$, $s_\lambda = \inf \left\{S_\lambda(y) \,|\, y \in \Xi^N\right\}$. Покажем, что для любого $\lambda_0 \geqslant 0$ верно неравенство

$$\limsup_{\tau\to 0, N\to\infty, \lambda\to\lambda_0} s_\lambda \leqslant m_{\lambda_0}. \tag{18}$$

Действительно, по определению точной нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется вектор-функция $y \in V_2$ такая, что $J_{\lambda_0}(y) \leqslant m_{\lambda_0}+\varepsilon/2$. Из теоремы 8 вытекает, что существуют шаги сетки $\tau^0 > 0$, номер $N^0 \in \mathbb{N}$ и константа $d > 0$ такие, что $S_\lambda(P_N y) \leqslant J_{\lambda_0}(y) + \varepsilon/2 \leqslant m_{\lambda_0} + \varepsilon$ при всех $\tau \leqslant \tau^0$, $N \geqslant N^0$ и $|\lambda - \lambda_0| \leqslant d$, тогда $s_\lambda \leqslant S_\lambda(P_N y) \leqslant m_{\lambda_0} + \varepsilon$, что и дает (18).

При всех $\lambda_0 > 0$ последовательность ρ_n ограничена в V_2, выделим из нее подпоследовательность $\rho_n \to x_0$ слабо в V_2 и сильно в V_1. Обозначим

$$x = \Phi^{-1}(f; x_0), \quad y_n = F^{-1}(P_h f; P_{N_n} x_0), \quad z_n = F^{-1}(P_h f; \rho_n).$$

На основании теоремы 8 имеем

$$I(A(y_n)) \to I(x) \text{ при } n \to \infty \tag{19}$$

и $||y_n||_{W_h} \leqslant c||x||_W$ при всех достаточно больших n. Так как $||P_{N_n} x_0 - \rho_n||_1 \to 0$, то по теореме 7 имеет место сходимость $||y_n - z_n||_{W_h} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $A(y_n) - A(z_n) \to 0$ сильно в $L_2(0, T; V_1)$, тогда и $I(A(y_n)) - I(A(z_n)) \to 0$. Учитывая (19), заключаем, что

$$S_0(\rho_n) \to J_0(x_0) \text{ при } n \to \infty. \tag{20}$$

Из слабой сходимости ρ_n к x_0 в V_2 вытекает, что $\liminf\limits_{n\to\infty} ||\rho_n - x_0^a||_2 \geqslant ||x_0 - x_0^a||_2$. Принимая во внимание (19) и сходимость $\lambda_n \to \lambda_0$, приходим к неравенству

$$\liminf_{n\to\infty} S_{\lambda_n}(\rho_n) \geqslant J_{\lambda_0}(x_0). \tag{21}$$

Но ρ_n являются решениями задачи (14), поэтому $S_{\lambda_n}(\rho_n) = s_{\lambda_n}$. Из (18) имеем $\limsup_{n\to\infty} S_{\lambda_n}(\rho_n) \leqslant m_{\lambda_0} \leqslant J_{\lambda_0}(x_0)$. Сравнивая (21) и последнее неравенство, убеждаемся, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{\lambda_n}(\rho_n) = J_{\lambda_0}(x_0) = m_{\lambda_0}, \tag{22}$$

то есть x_0 является решением задачи инициализации (11). Кроме того, из (20) и (22) находим, что $\lim_{n\to\infty} \lambda_n\|\rho_n - x_0^a\|_2^2 = \lambda_0\|x_0 - x_0^a\|_2^2$, тогда $\lim_{n\to\infty} \|\rho_n - x_0^a\|_2^2 = \|x_0 - x_0^a\|_2^2$, поэтому $\rho_n \to x_0$ сильно в V_2.

Если $\lambda_0 = 0$ и последовательность ρ_n ограничена в V_2, то вновь выделим из нее подпоследовательность $\rho_n \to x_0$ слабо в V_2 и сильно в V_1. Повторяя рассуждения настоящей теоремы нетрудно проверить, что равенство (22) остается в силе и x_0 является решением задачи инициализации (11).

5. Заключение

Нами доказана разрешимость задачи инициализации для двухслойной квазигеострофической модели общей циркуляции атмосферы, изучены условия и характер сходимости численных решений задачи к ее точным решениям.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Литература

1. *Ипатова В.М.* Сходимость численных решений задачи вариационного усвоения данных альтиметрии в квазигеострофической модели общей циркуляции океана // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 3. — С. 411–418.
2. *Agoshkov V.I., Ipatova V.M.* Convergence of solutions to the problem of data assimilation for a multilayer quasigeostrophic model of ocean dynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2010. — V. 25, N 2. — P. 105–115.
3. *Дымников В.П., Филатов А.Н.* Основы математической теории климата. — М.: ВИНИТИ, 1994.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
5. *Il'in A.A.* Navier-Stokes equations on the rotating sphere. A simple proof of the attractor dimension estimate // Nonlinearity. — 1994. — V. 7. — P. 31–39.
6. *Bernier Ch.* Existence of attractor for the quasi-geostrophic approximation of the Navier-Stokes equations and estimate of its dimension // Adv. Math. Sci. Appl. — 1994. — V. 4, N 2. — P. 465–489.
7. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
8. *Агошков В.И., Ипатова В.М.* О разрешимости основных и сопряженных уравнений в нелинейных задачах // Сопряженные уравнения в задачах математической физики. – М.: ОВМ АН СССР, 1990. — С. 1–46.

Поступила в редакцию 24.01.2012.