УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Ю. А. Самарский
10 июня 2010 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по курсу	ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ	
по направлению	010600	
факультет	ФИВТ	
кафедра	анализа данных	
курс	II	
семестр	3	Два задания
лекции	32 часа	Две контрольные работы
семинарские занятия	32 часа	Экзамен

ВСЕГО ЧАСОВ — 64.

Программу составил: д.ф.-м.н., профессор А. М. Райгородский.

Задания составил: ассистент А. Б. Дайняк.

Программа обсуждена на заседании
кафедры анализа данных 3 июня 2010 г.

Заведующий кафедрой А. Ю. Волож

Программа обсуждена на заседании
Ученого совета ФИВТ 6 июня 2010 г.

Председатель Ученого совета ФИВТ В. Е. Кривцов

ПРОГРАММА КУРСА

1. Основные правила комбинаторики: правило сложения, правило умножения, формула включений и исключений, принцип Дирихле.

2. Размещения, перестановки и сочетания. Бином Ньютона, полиномиальная формула. Тождества.

3. Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Формула Стирлинга. Оценки биномиальных коэффициентов вида $C_n^{[an]}$, $a \in (0, 1)$. Асимптотика для C_n^k при $k^2 = o(n)$. Оценки той же величины при бо́льших k.

4. Функция Мёбиуса. Формула обращения Мёбиуса. Применение формулы обращения Мёбиуса для подсчета числа циклических последовательностей.

5. Задачи о разбиениях чисел на слагаемые. Рекуррентные формулы. Формула Харди–Рамануджана.

6. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.

7. Степенные ряды и производящие функции. Пример тождества, доказываемого с помощью степенных рядов. Теоремы о сходимости степенных рядов. Числа Фибоначчи и Каталана. Нахождение сумм с участием биномиальных коэффициентов, чисел Фибоначчи и др.

8. Основные термины теории графов. Маршруты в графах, степени вершин. Изоморфизм графов. Планарность графа. Критерий Куратовского. Критерий эйлеровости графа.

9. Эквивалентные определения дерева. Формула Кэли. Унициклические графы. Точная формула и асимптотика для числа различных унициклических графов.

10. Последовательности и графы де Брёйна.
Правило «ноль лучше единицы».

11. Хроматическое число, число независимости, кликовое число и соотношения между ними.

12. Гиперграфы. Теорема Эрдеша–Ко–Радо (максимальное число ребер в 1-пересекающемся гиперграфе). t-пересекающиеся гиперграфы, величина $m(n,k,t)$. Пример, когда нижняя оценка $m(n,k,t) \geq C_{n-t}^{k-t}$ заведомо не точна. История последовательных продвижений в задаче: теорема Эрдеша–Ко–Радо (общий случай), теорема Франкла, теорема Уилсона, теорема Алсведе–Хачатряна.

13. Кнезеровский граф. Его число независимости и его кликовое число. Верхняя оценка его хроматического числа. Теорема Ловаса о хроматическом числе кнезеровского графа.

14. Линейно-алгебраический метод.
Теорема Франкла–Уилсона для гиперграфов.

15. Хроматические числа пространств. Нижняя оценка хроматического числа пространства с помощью теоремы Франкла–Уилсона.

16. Проблема Борсука. Историческая справка. Связь с теоремой Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана. Контрпримеры к гипотезе Борсука. Нижняя оценка числа Борсука с помощью теоремы Франкла–Уилсона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2006.
2. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Бином. Лаборатория знаний, Мир, 2009.
3. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. — М.: Книжный дом «Либроком», 2009.
4. *Райгородский А. М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2008.
4. *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2007.
5. *Райгородский А. М.* Экстремальные задачи теории графов и анализ данных. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008.
6. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: МЦНМО, 2004.
7. *Холл М.* Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.

ЗАДАЧИ

Основные правила комбинаторики. Размещения, перестановки и сочетания.

1. Комиссия из 60 человек провела 40 заседаний, причём на каждом заседании присутствовали ровно 10 членов комиссии. Докажите, что найдутся два члена комиссии, по крайней мере дважды встречавшиеся на заседаниях.

2. В комнате площадью 6 уложены три ковра площадью 3 каждый (форма комнаты и ковров произвольная). Докажите, что какие-то два из этих трёх ковров перекрываются по площади, не меньшей 1.

3. Вычислить $\sum \frac{1}{2^k}$, где суммирование ведётся по всем натуральным k, не кратным 2, 3 и 5.

4. Сколькими способами можно нарисовать квадрат на клетчатом листе бумаги размера $m \times n$ клеток? (Например, на клетчатом листе 3×2 можно нарисовать квадрат восемью различными способами.)

5. Сколькими способами можно выдать 18 различных задач пяти студентам, чтобы

1. один (любой) из студентов получил две задачи, а остальные — по четыре задачи?
2. двое получили по три задачи, а остальные — по четыре задачи?

6. Доказать тождества

1. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$,
2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n}{n+1}$,
3. $n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n$.

Обращение Мёбиуса. Разбиения чисел. Асимптотики.

7. Сколько различных циклических последовательностей длины 10 можно составить из букв A, B, C, D, E, так, чтобы в каждой последовательности присутствовали ровно четыре из этих букв?

8. Найти асимптотику для

1. $\binom{n^5}{n^4}$
2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$
3. $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots$

9. Найти асимптотику для количества неупорядоченных разбиений натурального числа N на слагаемые, каждое из которых не превосходит $\left\lfloor \frac{N}{100} \right\rfloor$.

Рекуррентные соотношения. Производящие функции.

10. Пусть $s(n)$ обозначает количество всех подмножеств A множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, таких, что для любых двух $a, b \in A$ выполнено неравенство $|a - b| \geq 2$. Найти производящую функцию и асимптотику для $s(n)$.

11. Найти число сбалансированных скобочных последовательностей длины n. Например, последовательность `((()())())` сбалансирована, в отличие от последовательностей `())()` и `()(()(`.

12. Найти производящую функцию последовательности $a_n = \sin(\alpha n)$, где α — фиксированный действительный параметр.

13. Вычислить $\sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{17}\right)^k$.

14. Сколькими способами можно выложить $2 \times 2 \times n$ колонну кирпичами размера $2 \times 1 \times 1$?

15. Найти формулу для a_n, где последовательность $\{a_k\}$ удовлетворяет начальным условиям $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = 3$ и рекуррентному соотношению $a_k = 4a_{k-3} - 3a_{k-1}$.

Теория графов.

16. Указать пять неэквивалентных последовательностей де Брёйна для $n = 4$.

17. Перечислить все попарно неизоморфные непланарные графы с 6 вершинами и 11 рёбрами. Сколько существует попарно неизоморфных графов с 8 вершинами и 25 рёбрами?

18. Найти число максимальных по включению независимых множеств в цепи на n вершинах.

19. Доказать, что если в графе меньше 15 циклов, то он планарен.

20. В связном графе G ровно один цикл. Известно, что в G ровно 30 вершин степени 1, а остальные вершины имеют степень 2 и 3. Найти число вершин степени 3 в G.

21. Найти хроматические числа графов K_n, $K_{m,n}$ и их рёберных графов.

22. В некотором государстве каждые два города соединены дорогой с односторонним движением. Доказать, что найдётся город, из которого можно проехать в любой другой город не более чем по двум дорогам.

23. Рёбра дерева раскрашены в несколько цветов. Если все рёбра, инцидентные вершине дерева, одноцветны, то можно все их одновременно перекрасить в любой другой цвет. Всегда ли, перекрашивая дерево по такому правилу, можно сделать все его рёбра одноцветными? Тот же вопрос для уницикличеcких графов.

24. Известно, что число независимости некоторого графа на 36 вершинах равно четырём. Доказать, что максимальная степень вершины в таком графе не меньше 8. Привести пример графа, на котором достигается указанная нижняя оценка.

25. Обозначим через $\Gamma(G)$ рёберный граф графа G. Пусть граф G имеет максимальное число рёбер среди всех графов на n вершинах без клик размера $(m+1)$. Найти необходимые и достаточные условия того, что граф $\Gamma(\Gamma(G))$ гамильтонов.

26. Чего больше: деревьев на 100 вершинах или уницикличеcких графов на 98?

Комбинаторика систем множеств.

27. Найти размер наибольшей совокупности семиэлементных подмножеств множества $\{1, \ldots, 15\}$, каждые два из которых пересекаются по крайней мере по трём элементам.

28. Рассмотрим совокупность векторов длины 8 с координатами $0, 1, -1$, у каждого из которых ровно четыре нулевых координаты, а первая ненулевая координата равна 1. Доказать, что если векторы в совокупности попарно неортогональны, то размер совокупности не превосходит 70.

29. Можно ли разбить множество всех $(0, 1)$–векторов длины 20, имеющих ровно 7 ненулевых координат, на 7 подмножеств, так, чтобы любые два ортогональных вектора принадлежали различным подмножествам? Тот же вопрос, если все векторы имеют по 8 ненулевых координат.

30. Пусть семиэлементные подмножества $S_1, \ldots, S_k$ множества $\{1, \ldots, 21\}$ таковы, что $|S_i \cap S_j| \in \{0, 2, 3, 5, 6\}$ для любых $1 \le i < j \le k$. Доказать, что $k \le 210$.