УДК 532.51, 517.956.6, 517.972.5

Н.А. Гусев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Асимптотические свойства решений линеаризованных уравнений движения слабо сжимаемой среды*

Рассматривается начально-краевая задача для линеаризованных уравнений вязкой баротропной слабо сжимаемой среды в ограниченной области. Изучается поведение решений данной задачи при стремлении коэффициента сжимаемости к нулю. Приводятся достаточные условия слабой и сильной сходимости этих решений к решению соответствующей задачи для несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: линеаризованные уравнения сжимаемой среды, фактор сжимаемости, слабо сжимаемая среда.

I. Введение

Для математического описания механики жидкостей, как правило, используется модель несжимаемой жидкости. Данная модель является идеализацией, так как любая реальная жидкость, существующая в природе, является *слабо сжимаемой*. В связи с этим возникает задача об исследовании свойств решений уравнений слабо сжимаемой среды, в частности, сходимости этих решений к решению уравнений несжимаемой жидкости.

Поведение решений уравнений сжимаемой среды при стремлении числа Маха к нулю[1] исследовалось в работах [1–4]. В частности, было доказано (см. [1, 4]) существование последовательности слабых решений начально-краевой задачи для этих уравнений, для которой поле скорости сходится *слабо* к полю скорости несжимаемой жидкости. Однако с физической точки зрения *сильная* сходимость поля скорости (а также давления) является более естественной и поэтому также представляет значительный интерес.

Сильная сходимость поля скорости была установлена для искусственной системы уравнений сжимаемой среды, используемой при численном решении уравнений несжимаемой жидкости методом искусственной сжимаемости (см., например, [5, III, § 8]). Также была установлена $*$-слабая сходимость градиента давления. Сильная сходимость давления не исследовалась.

При некоторых условиях сходимость решений уравнений сжимаемой среды не может быть сильной. Так, в [6] было получено *необходимое* условие сильной сходимости *классических* решений уравнений сжимаемой среды при стремлении коэффициента сжимаемости к нулю. Это условие представляет собой ограничение на начальное условие для уравнений несжимаемой жидкости и, вообще говоря, не выполняется. В силу отсутствия на данный момент глобальных теорем существования классических решений уравнений сжимаемой среды [2] актуально исследование необходимых и достаточных условий сильной сходимости для *слабых* решений.

В данной работе рассматриваются *линеаризованные* уравнения движения слабо сжимаемой среды. Эти уравнения описывают первую поправку к решению уравнений несжимаемой жидкости, обусловленную сжимаемостью среды. Они значительно проще исходных нелинейных уравнений, что делает возможным более детальное исследование влияния коэффициента сжимаемости на их решения. Линеаризованные уравнения сжимаемой среды представляют и самостоятельный интерес (например, в [7] исследовались спектральные свойства оператора, соответствующего стационарным линеаризованным уравнениям сжимаемой среды).

В большинстве работ рассматривались уравнения движения сжимаемой среды, линеаризованные вблизи состояния покоя (см. [8,9]). В [9] была получена априорная оценка для сильного обобщённого решения начально-краевой задачи для таких уравнений в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$, однако влияние коэффициента сжимаемости на константы, входящие в эту оценку, не исследовалось. Существование сильного обобщённого решения задачи Коши в $\mathbb{R}^3$ для уравнений было установлено в [8]. Вопросы существования и единственности слабых решений в указанных работах не рассматривались.

В данной работе приводятся достаточные условия существования и единственности слабых решений начально-краевой задачи для общих линеаризованных уравнений слабо сжимаемой среды.

*Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственные контракты П532 и П938) и гранта РФФИ 09-01-12157-офи-м.

[1] Если коэффициент сжимаемости стремится к нулю, а остальные параметры фиксированы, то и число Маха стремится к нулю.

Исследуется сходимость этих решений при стремлении коэффициента сжимаемости к нулю. Основные результаты по сходимости состоят в следующем:

- В общем случае поле скорости сходится *слабо*.
- Если начальное условие для поля скорости соленоидально, то поле скорости сходится *сильно* и поле давления сходится *слабо*.
- Если, кроме того, начальное условие для давления совпадает со значением давления в несжимаемой жидкости в начальный момент времени, то сходимость поля давления является *сильной*.

II. Обозначения

Рассмотрим ограниченную область $D \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$) с кусочно-гладкой границей ∂D. Пусть $T > 0$, $Q_T = D \times (0, T)$.

В данной работе используются стандартные обозначения для пространств Лебега $L^2(D)$, Соболева $H^1(D)$, Лебега–Бохнера $L^p(0,T;X)$ (где X — банахово пространство, $p \geqslant 1$ или $p = \infty$) и т. п. (см., например, [10]). Множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным в $G \subset \mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) носителем обозначается как $\mathcal{D}(G)$. Топология в $\mathcal{D}(G)$ вводится стандартным образом (см., например, [10, с. 179]); сопряжённое к $\mathcal{D}(G)$ пространство обозначается как $\mathcal{D}'(G)$.

Замыкание $\mathcal{D}(D)$ в $H^1(D)$ обозначим через $H_0^1(D)$. Пространство, сопряжённое к $H_0^1(D)$, обозначим через $H^{-1}(D)$. Сопряжённое к $H_0^1(D)^d$ пространство можно отождествить с $H^{-1}(D)^d$.

С помощью $(\cdot,\cdot)$, в зависимости от контекста, будем обозначать стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$ либо скалярное произведение в $L^2(D)^k$, т. е. $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int\limits_D u_i v_i\, dx$.

Пусть X — банахово пространство, X^* — сопряжённое к нему, $x_n \subset X$, $f_n \subset X^*$ $x \in X$, $f \in X^*$. Введём обозначения

$$\langle f, x\rangle = f(x);$$
$$x_n \rightharpoonup x \quad \Leftrightarrow \quad x_n \text{ сходится к } x \text{ слабо в } X;$$
$$f_n \rightharpoondown f \quad \Leftrightarrow \quad f_n \text{ сходится к } f \text{ $*$-слабо в } X^*.$$

Пусть $\mathcal{J}(D)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных соленоидальных векторных полей (т. е. функций $D \to \mathbb{R}^d$). Пусть $J(D)$ и $V(D)$ — замыкания $\mathcal{J}(D)$ в $L^2(D)^d$ и $H_0^1(D)^d$ соответственно. Обозначим через P_J ортогональный проектор $L^2(D)^d$ на $J(D)$, часто называемый *проектором Лерэ–Гельмгольца.*

III. Линеаризованные уравнения слабо сжимаемой среды

Рассмотрим вязкую баротропную среду с уравнением состояния $\varrho = F(\mathrm{p})$, где ϱ и p — плотность и давление соответственно. Линеаризуем это уравнение в окрестности некоторого значения давления p_{ref}:

$$\varrho = F(\mathrm{p}) \approx F(\mathrm{p}_{ref}) + F'(\mathrm{p}_{ref})(\mathrm{p} - \mathrm{p}_{ref}).$$

Обозначим $F(\mathrm{p}_{ref}) = \varrho_0 > 0$, $F'(\mathrm{p}_{ref}) = \alpha$. С физической точки зрения $1/\alpha = \dfrac{\partial \mathrm{p}}{\partial \varrho} = c^2 > 0$, где c — скорость звука. Итак, линеаризованное уравнение состояния имеет вид

$$\varrho = \varrho_0 + \alpha(\mathrm{p} - \mathrm{p}_{ref}).$$

При линеаризации уравнений движения сжимаемой баротропной среды с таким уравнением состояния получается следующая система уравнений для поправок ρ, $\mathbf{u}$ и p к плотности, скорости и давлению соответственно:

$$\begin{gathered} \rho_t - (\mathbf{b},\nabla)\rho + c\rho + \operatorname{div}\mathbf{u} = \sigma, \\ \mathbf{u}_t + \nabla p = -A\mathbf{u} + \rho\mathbf{f} + \mathbf{s}, \\ \rho = \alpha p, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где

$-A\mathbf{u} = \mu\Delta\mathbf{u} + \eta\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} - [(\mathbf{u},\nabla)\mathbf{b}_1 + (\operatorname{div}\mathbf{b}_2)\mathbf{u} + (\mathbf{b}_3,\nabla)\mathbf{u}]$,

ρ, p, c, σ — скалярные поля (т. е. функции $\overline{D \times (0,T)} \to \mathbb{R}$),

$\mathbf{b}, \mathbf{b}_{1,2,3}, \mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{s}$ — векторные поля (т. е. функции $\overline{D \times (0,T)} \to \mathbb{R}^d$), причём $\mathbf{b}|_{\partial D} = 0$.

Коэффициенты вязкости $\mu > 0$ и $\eta \geqslant 0$ предполагаются постоянными. Число $\alpha > 0$ называется *коэффициентом (фактором) сжимаемости* [6].

Поля $\mathbf{b}, \mathbf{b}_{1,2,3}$ и c определяются полем скорости $\mathbf{v}$, в окрестности которого проводится линеаризация: $\mathbf{b}_{1,2,3} = \mathbf{v} = -\mathbf{b}$, $c = \operatorname{div}\mathbf{v}$. Однако наряду с этим «основным» случаем мы будем рассматривать и «обобщённый» случай, когда все поля различны.

Поставим для уравнений (3.1) следующие начальные и краевые условия:

$$\mathbf{u}|_{\partial D} = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^o, \quad p|_{t=0} = p^o. \tag{3.2}$$

Решение задачи (3.1), (3.2) зависит от фактора сжимаемости α:

$$\{\mathbf{u}, p\} = \{\mathbf{u}_\alpha, p_\alpha\}.$$

Основной целью данной работы является изучение поведения решений при $\alpha \to 0$. Однако перед исследованием этого предельного перехода необходимо дать определения слабого решения задачи (3.1), (3.2) и слабого решения соответствующей задачи для несжимаемой жидкости.

IV. Существование и единственность слабых решений

Предположим, что

1. $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(D)^d)$;
   $\mathbf{b}_3 \in L^\infty 0,T;L^\infty(D)^d$.
2. $\mathbf{b} \in L^1(0,T;H_0^1(D)^d)$;
   $c, \operatorname{div}\mathbf{b} \in L^1(0,T;L^\infty(D))$.

3. $f \in L^2(0,T;L^\infty(D)^d)$; $\sigma \in L^2(0,T;L^2(D))$; $\mathbf{s} \in L^2(0,T;H^{-1}(D)^d)$.
4. $\mathbf{u}^o \in L^2(D)^d$, $\mathbf{p}^o \in L^2(D)$.

Обозначим $\rho^o = \alpha p^o$.

Определение 4.1. Пара

$$\{\mathbf{u}, p\} \in L^2(0,T;H_0^1(D)^d) \times L^\infty(0,T;L^2(D))$$

называется *слабым решением* задачи (3.1), (3.2), если для $\forall \psi \in \mathcal{D}([0,T))$, $\forall \Phi \in \mathcal{D}(D)^d$ и $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)_{\downarrow D}$

$$-\int_0^T (\rho,\varphi)\psi_t\,dt - (\rho^o,\varphi)\psi(0) + \int_0^T \Big\{(\rho[c+\operatorname{div}\mathbf{b}],\varphi) + (\rho\mathbf{b},\nabla\varphi) + (\operatorname{div}\mathbf{u}-\sigma,\varphi)\Big\}\psi\,dt = 0,$$

$$-\int_0^T (\mathbf{u},\Phi)\psi_t\,dt - (\mathbf{u}^o,\Phi)\psi(0) + \int_0^T \langle\nabla p,\Phi\rangle\,\psi\,dt = \int_0^T \Big\{\langle -A\mathbf{u},\Phi\rangle + (\rho\mathbf{f},\Phi) + \langle\mathbf{s},\Phi\rangle\Big\}\psi\,dt.$$

Здесь $\varphi_{\downarrow D}$ обозначает сужение функции φ на область D:

$$\langle\nabla p,\Phi\rangle = -(p,\operatorname{div}\Phi).$$

Оператор $A\colon H_0^1(D)^d \to H^{-1}(D)^d$ для гладких функций $\mathbf{u}$ определяется по формуле $\langle A\mathbf{u},\Phi\rangle = (A\mathbf{u},\Phi)$, а на остальные функции продолжается по непрерывности.

Теорема 4.1. Пусть выполнены предположения 1–4. Тогда задача (3.1), (3.2) имеет единственное слабое решение $\{\mathbf{u}, p\}$. При этом $\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(D)^d} + \alpha\|p\|^2_{L^2(D)} \in W^{1,1}(0,T)$ и для п. в. $t \in [0,T]$ выполняется равенство

$$\frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(D)^d} + \alpha\|p\|^2_{L^2(D)}\right)_t + \alpha\left(p\left[\frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{b}+c\right],p\right) + \langle A\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = (p,\sigma) + \alpha(p\mathbf{f},\mathbf{u}) + \langle\mathbf{s},\mathbf{u}\rangle\,.$$

При этом существует константа C, зависящая от A, $\mathbf{b}$, c, D и $\mathbf{f}$, такая, что при $0<\alpha<1$ справедлива оценка:

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(D)^d)} + \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(D)^d)} + \sqrt{\alpha}\|p\|_{L^\infty(0,T;L^2(D))} \leqslant C\Bigg\{\sqrt{\alpha}\|p^o\|_{L^2(D)} + \|\mathbf{u}^o\|_{L^2(D)^d} + \|\mathbf{s}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(D)^d)} + \frac{\|\sigma\|_{L^2(0,T;L^2(D))}}{\sqrt{\alpha}}\Bigg\}. \quad \square$$

Замечание 4.1. Для слабого решения задачи (3.1), (3.2) при $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)_{\downarrow D}$ и п. в. $t \in [0,T]$

$$(\rho(t)-\rho^o,\varphi) + \int_0^t \Big\{(\rho[c+\operatorname{div}\mathbf{b}],\varphi) + (\rho\mathbf{b},\nabla\varphi) + (\operatorname{div}\mathbf{u}-\sigma,\varphi)\Big\}\,dt = 0.$$

V. Уравнения несжимаемой жидкости

Предположим теперь, что p^o, $\mathbf{u}^o$, $\mathbf{s}$ и σ в (3.1), (3.2) зависят от α, то есть

$$p^o = p^o_\alpha, \quad \mathbf{u}^o = \mathbf{u}^o_\alpha, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}_\alpha, \quad \sigma = \sigma_\alpha,$$

причём $\sigma_\alpha \to 0$ и $\mathbf{s}_\alpha \to \mathbf{s}$ при $\alpha \to 0$. Тогда уравнения (3.1) формально переходят в нестационарные уравнения Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0,\\ \boldsymbol{v}_t + \nabla q = -A\boldsymbol{v} + \mathbf{s}.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Поставим для уравнений (5.3) следующие начальные и краевые условия:

$$\boldsymbol{v}|_{\partial D} = 0, \quad \boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}^o. \tag{5.4}$$

Определение 5.2. Пара

$$\{\boldsymbol{v}, q\} \in L^2(0,T;V(D)) \times \mathcal{D}'(Q_T)$$

называется *слабым решением* задачи (5.3), (5.4), если (5.3) выполняется в $\mathcal{D}'(D\times(0,T))$ и для $\forall\psi \in \mathcal{D}([0,T))$, $\forall\Phi \in \mathcal{J}(D)$

$$-\int_0^T (\boldsymbol{v},\Phi)\psi_t\,dt - (\boldsymbol{v}^o,\Phi)\psi(0) = \int_0^T \langle -A\boldsymbol{v}+\mathbf{s},\Phi\rangle\,\psi\,dt.$$

Достаточные условия существования слабого решения задачи (5.3), (5.4) при $\mathbf{b}_{1,2,3} = 0$ и $\lambda = 0$ приведены, например, в [5]. Регулярность решений задачи (5.3), (5.4) изучалась В.А. Солонниковым (см., например, [11]).

VI. Сходимость к решению уравнений несжимаемой жидкости

Пусть при каждом $\alpha \in (0,1)$ выполнены предположения 1–4. Пусть

$$\{\mathbf{u}_\alpha, p_\alpha\}_{0<\alpha<1}$$

— множество решений задачи (3.1), (3.2) (существование и единственность которых следует из теоремы 4.1). Пусть $\{\boldsymbol{v}, q\}$ — слабое решение задачи (5.3), (5.4) с начальным условием

$$\boldsymbol{v}^o = P_J\mathbf{u}^o.$$

Теорема 6.2. Если при $\alpha \to 0$

$$\|\sigma_\alpha\|_{L^2(0,T;L^2(D))} = O(\sqrt{\alpha}),$$

$$\mathbf{s}_\alpha \rightharpoonup \mathbf{s} \quad \text{в } L^2(0,T;H^{-1}(D)^d),$$

$$\mathbf{u}^o_\alpha \rightharpoonup \mathbf{u}^o \quad \text{в } L^2(D)^d, \quad \|p^o_\alpha\|_{L^2(D)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

то при $\alpha \to 0$

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_\alpha \rightharpoonup \boldsymbol{v} \text{ в } L^2(0,T;H_0^1(D)^d),\\ \mathbf{u}_\alpha \rightharpoonup \boldsymbol{v} \text{ в } L^\infty(0,T;L^2(D)^d),\\ \nabla p_\alpha \rightharpoonup \nabla q \text{ в } \mathcal{D}'(D\times(0,T)).\end{gathered} \tag{6.5}$$

$\square$

Теорема 6.2 согласуется с результатами, полученными в [1, 4]. С помощью теоремы 4.1 можно усилить топологию сходимости (6.5)

Теорема 6.3. Пусть $\mathbf{b} \in L^2(0,T;L^\infty(D)^d)$, $c \in L^2(0,T;L^\infty(D))$. Пусть $\boldsymbol{v}_t \in L^2(0,T;H^{-1}(D)^d)$ и $q \in L^\infty(0,T;H^1(D)) \cap W^{1,2}(0,T;L^2(D))$. Если $\mathbf{u}^o \in J(D)$ и при $\alpha \to 0$

$$\|\sigma_\alpha\|_{L^2(0,T;L^2(D))} = o(\sqrt{\alpha}),$$
$$\mathbf{s}_\alpha \to \mathbf{s} \quad \text{в } L^2(0,T;H^{-1}(D)^d),$$
$$\mathbf{u}^o_\alpha \to \mathbf{u}^o \quad \text{в } L^2(D)^d, \quad \|p^o_\alpha\|_{L^2(D)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

то при $\alpha \to 0$

$$\mathbf{u}_\alpha \to \boldsymbol{v} \text{ в } L^2(0,T;H^1_0(D)^d),$$
$$\mathbf{u}_\alpha \to \boldsymbol{v} \text{ в } L^\infty(0,T;L^2(D)^d). \qquad \square$$

Замечание 6.2. При $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{1,2,3} = 0$ и $c = 0$ можно показать, что условие $\mathbf{u}^o = P_J\mathbf{u}^o$ является не только достаточным для сильной сходимости поля скорости $\mathbf{u}_\alpha$, но и необходимым.

Теорема 6.4. Пусть $\mathbf{b} \in L^2(0,T;L^\infty(D)^d)$, $c \in L^2(0,T;L^\infty(D))$. Пусть $\boldsymbol{v}_t \in L^2(0,T;H^{-1}(D)^d)$ и $q \in L^\infty(0,T;H^1(D)) \cap W^{1,2}(0,T;L^2(D))$. Если $\mathbf{u}^o \in J(D)$ и при $\alpha \to 0$

$$\|\sigma_\alpha\|_{L^2(0,T;L^2(D))} = O(\alpha),$$
$$\|\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(D)^d)} = O(\sqrt{\alpha}),$$

$\|\mathbf{u}^o_\alpha - \mathbf{u}^o\|_{L^2(D)^d} = O(\sqrt{\alpha})$, p^o_α ограничено в $L^2(D)$, то существует такая последовательность $\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$, что

$$p_{\alpha_n} \rightharpoonup \widetilde{q} \quad \text{в} \quad L^\infty(0,T;L^2(D)),$$

где $\{\boldsymbol{v}, \widetilde{q}\}$ — решение (5.3), (5.4). $\square$

Замечание 6.3. Поскольку $\widetilde{q}$ и q могут отличаться, p_α может не иметь слабого предела.

Вернёмся теперь к «основному» случаю $c = -\operatorname{div}\mathbf{b}$. Из замечания 4.1 следует, что в этом случае для линеаризованных уравнений сжимаемой среды выполняется закон сохранения массы:

$$M_t = (\sigma, 1) = \int\limits_D \sigma\, dx, \quad \text{где} \quad M(t) = \int\limits_D \rho(t)\, dx.$$

Отсюда видно, что если $\sigma = 0$, то $\int\limits_D p(t)\, dx$ не зависит от t. Для несжимаемой жидкости $\int\limits_D q(t)\, dx$ в общем случае зависит от t, так как давление q определено с точностью до аддитивной функции времени. Однако для произвольного числа $A \in \mathbb{R}$ эту функцию можно определить так, что $\int\limits_D q(t)\, dx = A$ для п. в. $t \in [0,T]$.

Теорема 6.5. Пусть область D — звёздная (см. [12]): $\mathbf{b} \in W^{1,2}(0,T;W^{1,\infty}(D)^d)$, $c \in W^{1,2}(0,T;L^\infty(D))$, $\boldsymbol{v}_t \in L^2(0,T;H^{-1}(D)^d)$ и $q \in W^{2,2}(0,T;L^2(D)) \cap W^{1,2}(0,T;H^1(D))$, причём

$$\frac{d}{dt}\int\limits_D q(t)\, dx = 0 \quad \text{при п. в. } t \in [0,T].$$

Если $\mathbf{u}^o \in J(D)$ и при $\alpha \to 0$

$$\|\sigma_\alpha\|_{L^2(0,T;L^2(D))} = o(\alpha),$$
$$\|\mathbf{s}_\alpha - \mathbf{s}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(D)^d)} = o(\sqrt{\alpha}),$$
$$\|\mathbf{u}^o_\alpha - \mathbf{u}^o\|_{L^2(D)^d} = o(\sqrt{\alpha}),$$
$$p^o_\alpha \to q^o = q|_{t=0} \quad \text{в } L^2(D),$$

то при $\alpha \to 0$

$$p_\alpha \to q \quad \text{в} \quad L^\infty(0,T;L^2(D)). \qquad \square$$

Литература

1. *Feireisl E., Novotný A.* The Low Mach Number Limit for the Full Navier–Stokes–Fourier System // Arch. Rational Mech. Anal. – 2007. – N 186. – P. 77–107.

2. *Feireisl E.* Dynamics of viscous compressible fluids. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2004.

3. *Feireisl E., Novotný A.* The Oberbeck–Boussinesq Approximation as a Singular Limit of the Full Navier–Stokes–Fourier System // J. math. fluid mech. – 2009. – N 11. – P. 274–302.

4. *Lions P.-L., Masmoudi N.* Incompressible limit for a viscous compressible fluid // J. Math. Pures Appl. – 1998. – N 77(6). – P. 585–627.

5. *Temam R.* Navier–Stokes equations: theory and numerical analysis. – Amsterdam-New York-Oxford: North Holland Publishing Co., 1979.

6. *Шифрин Э.Г.* Условие непрерывной зависимости от сжимаемости нестационарных течений вязких мало сжимаемых жидкостей // Доклады Академии наук. – 1999. – № 365. – С. 197–200.

7. *Прибыль М.А.* Спектральный анализ линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой среды, заданных в $\mathbb{R}^3$ с периодическими краевыми условиями // Алгебра и анализ. – 2008. – Т. 20, № 2. – С. 149–177.

8. *Ikehata R., Koboyashi T., Matsuyama T.* Remark on the L_2 Estimates of the Density for the Compressible Navier–Stokes Flow in R^3 // Nonlinear Analysis. – 2001. – V. 47, N 4. – P. 2519–2526.

9. *Mucha P.B., Zajaczkowski W.M.* On a L_p-estimate for the linearized compressible Navier–Stokes equations with the Dirichlet boundary conditions // J. Differential Equations. – 2002. – V. 186, N 2. – 377–393.

10. *Gasinski L., Papageorgiou N.S.* Nonlinear Analysis. – Taylor & Francis Group, LLC, 2005.

11. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1973.

12. *Боговский М.Е.* Решение первой краевой задачи для уравнения неразрывности несжимаемой среды // Доклады Академии наук. – 1979. – Т. 248, № 5. – С. 1037–1040.

Поступила в редакцию 22.01.2011