УДК 519.248.3

М.Е. Широков

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Московский физико-технический институт (государственный университет)

О свойствах вероятностных мер на множестве квантовых состояний*

Рассмотрены два свойства множества вероятностных мер на пространстве квантовых состояний, снабженного топологией слабой сходимости, а также их следствия, которые связаны с некоторыми функциональными конструкциями, используемыми в выпуклом анализе и его приложениях.

Ключевые слова: квантовое состояние, вероятностная мера, барицентрическое отображение, выпуклая оболочка и выпуклое замыкание функции.

I. Введение

Понятие ансамбля — набора квантовых состояний с соответствующим распределением вероятностей — широко используется в квантовой теории информации. В частности, такие важные характеристики, как пропускная способность Холево квантового канала (the Holevo capacity) и сцепленность формирования (the Entanglement of Formation) состояния составной квантовой системы, определяются как экстремальные значения функционалов, зависящих от ансамбля квантовых состояний [3, 10].

Ансамбль квантовых состояний можно рассматривать как атомическую вероятностную меру на множестве всех квантовых состояний, атомы которой соответствуют состояниям ансамбля. Поэтому естественно представлять произвольную борелевскую вероятностную меру на множестве всех квантовых состояний как обобщенный ансамбль. Эта точка зрения особенно удобна при изучении бесконечномерных квантовых каналов и систем, поскольку в этом случае необходимо рассматривать непрерывные ансамбли квантовых состояний, т. е. семейства состояний индексируемые вещественным параметром (или вектором) [19]. Одно из преимуществ такого подхода состоит в возможности применения общих результатов теории вероятностных мер на полных сепарабельных метрических пространствах [4, 12, 15].

В данной статье рассмотрены следующие общие свойства множества вероятностных мер на пространстве квантовых состояний:

- слабая компактность подмножеств вероятностных мер, барицентры которых образуют компактные подмножества состояний;
- открытость барицентрического отображения и некоторых его сужений в топологии слабой сходимости.

Эти свойства, подробно описанные в разделах III и IV, отражают определенные соотношения между топологией и выпуклой структурой множества квантовых состояний. Первое из них можно рассматривать как «разновидность» слабой компактности, поскольку оно позволяет доказывать для некомпактного множества квантовых состояний и его замкнутых выпуклых подмножеств хорошо известные для выпуклых компактов результаты. Второе свойство показывает, грубо говоря, что любое малое возмущение среднего состояния квантового ансамбля можно реализовать посредством соответствующих малых возмущений состояний этого ансамбля, оно дает возможность, в частности, доказать сохранение полунепрерывности сверху при операциях выпуклого замыкания функции и выпуклой надстройки (the convex roof) функции (стандартные операции выпуклого анализа).

Некоторые применения этих свойств и их следствий рассмотрены в разделе V, расширенный обзор приложений в квантовой теории информации дан в [14].

II. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ — банаховы пространства всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ с операторной нормой $\|\cdot\|$ и всех ядерных операторов в $\mathcal{H}$ со следовой нормой $\|\cdot\|_1 = \operatorname{Tr}|\cdot|$ соответственно, а $\mathfrak{B}_+(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ — конусы положительных операторов в этих пространствах [10]. Замкнутое выпуклое подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H}) \mid \operatorname{Tr} A = 1\}$ конуса $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ является полным сепарабельным метрическим пространством с метрикой, определяемой следовой нормой. Следуя традиции, операторы из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ будем обозначать греческими буквами ρ, σ, ω и называть *состояниями*, поскольку каждый такой оператор ρ задает

*Работа выполнена при финансовой поддержке научной программы «Математическая теория управления» РАН, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/11133, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», контракт П938, и грантов РФФИ 09-01-00424а и 10-01-00139а.

линейный нормальный функционал $A \mapsto \mathrm{Tr}\, A\rho$ с единичной нормой на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, называемый в теории операторных алгебр состоянием [6].

Пусть $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H})$ — подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, состоящее из состояний ранга $\leqslant k$. В частности, $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ — множество чистых состояний — одномерных проекторов.

Обозначим $\mathrm{co}(\mathcal{A})$ и $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ выпуклую оболочку и выпуклое замыкание подмножества $\mathcal{A} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Множество крайних точек выпуклого множества $\mathcal{A}$ обозначим $\mathrm{extr}\,\mathcal{A}$.

Пусть $C(\mathcal{A})$ — множество непрерывных ограниченных функций на множестве $\mathcal{A}$.

Для произвольной функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ ее выпуклую оболочку (максимальную выпуклую функцию, не превосходящую функцию f) и ее выпуклое замыкание (максимальную выпуклую полунепрерывную снизу функцию, не превосходящую функцию f) обозначим $\mathrm{co}\, f$ и $\overline{\mathrm{co}} f$ соответственно [16, 17].

Для произвольного замкнутого подмножества $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ пусть $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ — множество борелевских вероятностных мер на $\mathcal{A}$, снабженное топологией слабой сходимости [4, 12]. Поскольку $\mathcal{A}$ — полное сепарабельное метрическое пространство, множество $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ также можно считать полным сепарабельным метрическим пространством [12]. Пусть $\mathcal{P}^a(\mathcal{A})$ и $\mathcal{P}^f(\mathcal{A})$ — подмножества множества $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, состоящие из атомических мер со счетным и конечным числом атомов соответственно.

Меру из $\mathcal{P}^a(\mathcal{A})$, состоящую из атомов $\{\rho_i\} \subset \subset \mathcal{A}$ с соответствующими весами $\{\pi_i\}$, обозначим $\{\pi_i, \rho_i\}$. С физической точки зрения такая мера может рассматриваться как дискретный ансамбль квантовых состояний, тогда как произвольная мера из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ — как непрерывный ансамбль [19].

Барицентр меры $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ — это состояние из $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$, определяемое интегралом Бохнера:

$$\mathbf{b}(\mu) = \int\limits_{\mathcal{A}} \sigma \mu(d\sigma).$$

Если $\mu = \{\pi_i, \rho_i\}$, то $\mathbf{b}(\mu) = \sum\limits_i \pi_i \rho_i$ — среднее состояние ансамбля $\{\pi_i, \rho_i\}$.

Для произвольного подмножества $\mathcal{B}$ множества $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ пусть $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ — подмножество множества $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, состоящее из мер с барицентром, лежащим в $\mathcal{B}$.

III. Критерий компактности и его следствия

Множество $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ компактно только тогда, когда $\dim \mathcal{H} < +\infty$ (поскольку множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ компактно только тогда, когда $\dim \mathcal{H} < +\infty$). В случае $\dim \mathcal{H} = +\infty$ имеет место следующий критерий компактности подмножеств множества $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, который доказывается с помощью теоремы Прохорова [19, предложение 2].

Теорема 3.1. Множество $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H})) \subset \subset \mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ компактно тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{A} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ компактно. □

Свойство, представленное в теореме 3.1, не является чисто топологическим, оно отражает определенное соотношение между топологией и выпуклой структурой множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (которая «задействована» в определении барицентра вероятностной меры). Это свойство (в контексте замкнутых полных метризуемых ограниченных подмножеств произвольного локально-выпуклого пространства) изучено в [18], где оно названо свойством μ-компактности. Показано, что μ-компактные выпуклые множества (в частности множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$) обладают многими известными свойствами выпуклых компактов, в частности, для них имеют место теорема Шоке о барицентрическом разложении, теорема Вестерстрема–О'Брайена (см. [7]), утверждение о полунепрерывности снизу выпуклой оболочки любой непрерывной ограниченной функции и т. д.

Прямым следствием теоремы 3.1 является следующее утверждение о барицентрическом разложении [13, лемма 1].

Следствие 3.1. Пусть $\mathcal{A}$ — замкнутое подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Тогда любое состояние из $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ является барицентром некоторой борелевской вероятностной меры с носителем, лежащим в $\mathcal{A}$. □

Для произвольного состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ множество $\mathcal{P}^f_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ плотно в $\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ [19, лемма 1]. С помощью теоремы 3.1 этот простой результат можно усилить следующим образом [13, лемма 5].

Следствие 3.2. Для любого состояния $\rho \in \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и натурального k множество $\mathcal{P}^a_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$ является плотным подмножеством множества $\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$. □

Это утверждение означает, что любую вероятностную меру с носителем во множестве состояний ранга $\leqslant k$ можно аппроксимировать последовательностью атомических мер — счетных ансамблей состояний ранга $\leqslant k$ с тем же самым барицентром.

Важным следствием критерия компактности в теореме 3.1 является следующее утверждение [13, лемма 2A], в котором корректность определения функции $\check{f}_{\mathcal{A}}$ гарантируется следствием 3.1.

Следствие 3.3. Пусть f — полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на замкнутом подмножестве $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Выпуклая функция

$$\check{f}_{\mathcal{A}}(\rho) \doteq \inf_{\mu \in \mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})} \int\limits_{\mathcal{A}} f(\sigma)\mu(d\sigma)$$

полунепрерывна снизу на множестве $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$. Для любого состояния ρ из $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ инфимум в определении величины $\check{f}_{\mathcal{A}}(\rho)$ достигается на некоторой мере из $\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})$. □

Известно, что для любой возрастающей последовательности $\{f_n\}$ непрерывных функций на выпуклом компактном множестве $\mathcal{A}$, поточечно сходящейся к непрерывной функции f_0, соответствующая последовательность $\{\overline{\mathrm{co}}f_n\}$ сходится к функции $\overline{\mathrm{co}}f_0$.[1] Критерий компактности из теоремы 3.1 позволяет доказать аналогичное утверждение для некомпактного множества $\mathcal{A} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ [20, предложение 6].

Следствие 3.4. Для любой возрастающей последовательности $\{f_n\}$ полунепрерывных снизу ограниченных снизу функций на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и любой сходящейся последовательности $\{\rho_n\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ имеет место неравенство

$$\liminf_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{co}}f_n(\rho_n) \geqslant \overline{\mathrm{co}}f_0(\rho_0),$$

где $f_0 = \sup_n f_n$ и $\rho_0 = \lim_{n\to+\infty} \rho_n$.

В частности,

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\mathrm{co}}f_n(\rho) = \overline{\mathrm{co}}f_0(\rho) \quad \forall\, \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}). \qquad \square$$

Замечание 3.1. Критерий компактности из теоремы 3.1 равносилен выполнимости последнего утверждения следствия 3.4 для любой последовательности $\{f_n\} \subset C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, сходящейся к функции $f_0 \in C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ [20].

IV. Открытость барицентрического отображения

Барицентрическое отображение

$$\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H})) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \tag{4.1}$$

является непрерывной сюрьекцией [19]. В силу спектральной теоремы сюрьективными являются сужения этого отображения на множества $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$ и $\mathcal{P}^a(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Важное свойство барицентрического отображения представлено в следующей теореме (см. раздел 3 в [13]).

Теорема 4.2.

A) Барицентрическое отображение (4.1) и его сужение на множество $\mathcal{P}^a(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ являются открытыми.

B) Сужения барицентрического отображения (4.1) на множества $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$ и $\mathcal{P}^a(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$ являются открытыми при каждом $k \in \mathbb{N}$. □

С физической точки зрения открытость отображения $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H})) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (соответственно отображения $\mathcal{P}^a(\mathfrak{S}(\mathcal{H})) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$) означает, что любое малое возмущение среднего состояния заданного непрерывного (соответственно дискретного) ансамбля квантовых состояний может быть осуществлено малыми возмущениями состояний этого ансамбля. В силу μ-компактной версии теоремы Вестерстрема–О'Брайена ([18, теорема 1]) это свойство равносильно выполнимости следующих утверждений:

- отображение $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \times \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \ni (\rho, \sigma) \mapsto \frac{1}{2}(\rho + \sigma) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ открыто;
- отображение $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ открыто;
- $\mathrm{co}\, f = \overline{\mathrm{co}}f \in C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ для произвольной вогнутой функции $f \in C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$;
- $\mathrm{co}\, f = \overline{\mathrm{co}}f \in C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ для произвольной функции $f \in C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$.

В соответствии с принятой в выпуклом анализе терминологией (см. [8, 11]) выполнимость первого из указанных выше утверждений называется свойством *устойчивости* множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Существенно, что первое утверждение теоремы 4.2 выводится из устойчивости множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ без использования μ-компактности этого множества.

Второе утверждение теоремы 4.2 показывает, что любое малое возмущение среднего состояния заданного (дискретного или непрерывного) ансамбля может быть осуществлено соответствующими малыми возмущениями состояний этого ансамбля, *не увеличивающими максимальный ранг этих состояний.* Это свойство названо в [13] свойством *сильной устойчивости* множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Используя лемму 2B из [13], из теоремы 4.2 получаем следующие утверждения.

Следствие 4.5. Пусть $\mathcal{A}$ — это либо $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, либо $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H})$ при $k \in \mathbb{N}$. Пусть f — полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на множестве $\mathcal{A}$. Тогда вогнутая функция

$$\hat{f}_{\mathcal{A}}(\rho) \doteq \sup_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})} \int\limits_{\mathcal{A}} f(\sigma)\mu(d\sigma)$$

полунепрерывна снизу на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Супремум в определении величины $\hat{f}_{\mathcal{A}}(\rho)$ можно брать по множеству $\mathcal{P}^f_{\{\rho\}}(\mathcal{A})$, если $\mathcal{A} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, и по множеству $\mathcal{P}^a_{\{\rho\}}(\mathcal{A})$, если $\mathcal{A} = \mathfrak{S}_k(\mathcal{H})$. □

Последнее утверждение следствия вытекает из полунепрерывности снизу функционала $\mu \mapsto \int_{\mathcal{A}} f(\sigma)\mu(d\sigma)$ с учетом леммы 1 из [19] в случае $\mathcal{A} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и следствия 3.2 в случае $\mathcal{A} = \mathfrak{S}_k(\mathcal{H})$. Это утверждение показывает, что

$$\hat{f}_{\mathcal{A}}(\rho) = \sup_{\{\pi_i,\rho_i\}\in\mathcal{P}^*_{\{\rho\}}(\mathcal{A})} \sum_i \pi_i f(\rho_i),$$

где $* = f$ в случае $\mathcal{A} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $* = a$ в случае $\mathcal{A} = \mathfrak{S}_k(\mathcal{H})$.

[1] Это следует из леммы Дини. Существенность условия компактности показывает последовательность функций $f_n(x) = \exp(-x^2/n)$ на $\mathbb{R}$, сходящаяся к функции $f_0(x) \equiv 1$, такая что $\overline{\mathrm{co}}f_n(x) \equiv 0$ для всех n.

V. Некоторые приложения

V.1. Об аппроксимации вогнутых и выпуклых полунепрерывных снизу функций

Хорошо известно, что любую полунепрерывную снизу ограниченную снизу функцию на метрическом пространстве $\mathcal{A}$ можно представить в виде поточечного предела возрастающей последовательности непрерывных ограниченных функций [2]. Теоремы 3.1 и 4.2 позволяют усилить это утверждение для случая $\mathcal{A} = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ следующим образом.

Предложение 5.1. Любая вогнутая (соответственно выпуклая) полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ является поточечным пределом неубывающей последовательности вогнутых (соответственно выпуклых) функций из $C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. □

Доказательство. Пусть f — вогнутая полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция и $\{g_n\}$ — неубывающая последовательность функций из $C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, такая, что $f = \sup_n g_n$. Пусть f_n — вогнутая оболочка функции g_n (т. е. $f_n = -\operatorname{co}(-g_n)$). В силу теорем 3.1 и 4.2 из обобщенной теоремы Вестерстрема–О'Брайена [18, теорема 1] следует, что последовательность $\{f_n\}$ лежит в $C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. Поскольку $g_n \leqslant f_n$, имеем $f = \sup_n f_n$.

Пусть f — выпуклая полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция и $\{g_n\}$ — неубывающая последовательность функций из $C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, такая, что $f = \sup_n g_n$. Пусть f_n — выпуклая оболочка функции g_n. В силу теорем 3.1 и 4.2 из обобщенной теоремы Вестерстрема–О'Брайена из [18, теорема 1] следует, что последовательность $\{f_n\}$ лежит в $C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. В силу следствия 3.4 имеем $f = \sup_n f_n$. ■

V.2. О некоторых результатах, связанных с порядком Шоке

На множестве $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ рассмотрим частичный порядок Шоке, при котором $\mu \succ \nu$ означает, что

$$\int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\sigma)\mu(d\sigma) \geqslant \int\limits_{\mathfrak{S}(\mathcal{H})} f(\sigma)\nu(d\sigma) \qquad (5.2)$$

для любой выпуклой функции f из $C(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. Это отношение совпадает с некоторыми другими частичными порядками на множестве $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, в частности, с т. н. дилатационным порядком (the dilation ordering) [5, 9].

Прежде всего отметим очевидное следствие предложения 5.1 и теоремы о монотонной сходимости.

Лемма 5.1. Пусть μ и ν — такие меры из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, что $\mu \succ \nu$. Тогда неравенство (5.2) имеет место для любой выпуклой функция f на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, которая либо полунепрерывна снизу[2], либо полунепрерывна сверху и ограничена сверху. □

Легко видеть (рассматривая аффинные непрерывные функции на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$), что из $\mu \succ \nu$ следует $\mathbf{b}(\mu) = \mathbf{b}(\nu)$.

Образно говоря, отношение $\mu \succ \nu$ означает, что «основной вес меры μ удален дальше от общего барицентра мер μ и ν, ближе подходя к множеству крайних точек» [1]. Заметим, что крайними точками множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ являются чистые состояния (состояния ранга 1) и что для произвольного подпространства $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ подмножество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)$ является *гранью* множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ [16, 17]. Поэтому приведенная выше характеристика частичного порядка «$\succ$» подтверждается следующими утверждениями.

Предложение 5.2. Пусть μ и ν — меры из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, такие, что $\mu \succ \nu$. Тогда

- $\mu(\mathcal{A}) \geqslant \nu(\mathcal{A})$ для любого борелевского подмножества $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}_1(\mathcal{H}) = \operatorname{extr}\mathfrak{S}(\mathcal{H})$;
- $\mu(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)) \geqslant \nu(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0))$ для любого подпространства $\mathcal{H}_0$ пространства $\mathcal{H}$;
- $\mu(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H})) \geqslant \nu(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}))$ при каждом натуральном k.

□

Доказательство. Первое утверждение предложения для замкнутого подмножества $\mathcal{A}$ следует из леммы 5.1, поскольку индикаторная функция этого подмножества выпукла и полунепрерывна сверху. Для завершения доказательства этого утверждения достаточно заметить, что любая мера из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ является мерой Радона [15].

Второе и третье утверждения также следуют из леммы 5.1, поскольку индикаторные функции подмножеств $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)$ и $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H})$ выпуклы и полунепрерывны сверху. ■

Мера μ из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ называется *максимальной*, если из $\nu \succ \mu$ следует $\nu = \mu$ для любой меры ν из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$.

Следствие 5.6. Множество максимальных мер в $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ совпадает с $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$.

Для любой меры μ из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ существует мера $\hat{\mu}$ из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$, такая, что $\hat{\mu} \succ \mu$. □

Доказательство. Утверждения этого следствия можно вывести из общих результатов теории меры на выпуклых множествах [5, 9]. Однако мы покажем, что рассмотренные выше свойства множества $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ дают простой и *конструктивный* способ доказательства этих утверждений.

Пусть μ — произвольная мера из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$. В силу предложения 5.2 из отношения $\nu \succ \mu$ для некоторой меры ν из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ следует неравенство

[2]Любая выпуклая полунепрерывная снизу функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ либо ограничена снизу, либо не принимает конечных значений (см. лемму 2 в [20]).

$\nu(\mathcal{A}) \geqslant \mu(\mathcal{A})$ для произвольного борелевского множества $\mathcal{A}$ чистых состояний. Поскольку μ и ν — *вероятностные* меры и носитель μ принадлежит множеству всех чистых состояний, в приведенном выше неравенстве имеет место равенство, которое показывает, что $\mu = \nu$. Поэтому μ — максимальная мера в $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$.

Если μ — максимальная мера в $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, то, в силу приведенной ниже конструкции, существует мера $\hat{\mu}$ из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$, такая, что $\hat{\mu} \succ \mu$ и, следовательно, $\mu = \hat{\mu}$.

Пусть μ — произвольная мера из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. В силу леммы 1 из [19] существует последовательность $\{\mu_n\}$ мер из $\mathcal{P}^f_{\{\mathbf{b}(\mu)\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$, сходящаяся к мере μ. Раскладывая каждый атом меры μ_n в выпуклую комбинацию чистых состояний (это можно сделать в силу спектральной теоремы), получим меру $\hat{\mu}_n$ с тем же самым барицентром и носителем, лежащем во множестве чистых состояний. Ясно, что $\hat{\mu}_n \succ \mu_n$. В силу теоремы 3.1 последовательность $\{\hat{\mu}_n\}_{n>0}$ относительно компактна и, следовательно, содержит подпоследовательность $\{\hat{\mu}_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой мере $\hat{\mu}$ из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$. Поскольку $\hat{\mu}_{n_k} \succ \mu_{n_k}$ для всех k, из определения слабой сходимости следует, что $\hat{\mu} \succ \mu$. ■

V.3. О выпуклом замыкании и вогнутой оболочке полунепрерывной снизу функции

В этом разделе рассмотрены следствия теорем 3.1 и 4.2, связанные с понятиями выпуклой (вогнутой) оболочки и выпуклого замыкания функции, определенной на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Предложение 5.3. Пусть f — полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

A) Функции

$$\check{f}(\rho) \doteq \inf_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} \int f(\sigma)\mu(d\sigma)$$

$$\text{и}\quad \hat{f}(\rho) \doteq \sup_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} \int f(\sigma)\mu(d\sigma)$$

полунепрерывны снизу на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

B) Для произвольного состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ инфимум в определении величины $\check{f}(\rho)$ достигается на некоторой мере μ^f_ρ из $\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. Если f — вогнутая функция, то мера μ^f_ρ может быть выбрана в $\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$.

C) Функция $\check{f}$ совпадает с выпуклым замыканием $\overline{\mathrm{co}}f$ функции f, а функция $\hat{f}$ — с вогнутой оболочкой[3] функции f, т.е.

$$\hat{f}(\rho) = \sup_{\{\pi_i\rho_i\}\in\mathcal{P}^f_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} \sum_i \pi_i f(\rho_i),\ \forall\,\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}).\quad \square$$

Доказательство. Утверждение A, первая часть утверждения B и вторая часть утверждения C непосредственно вытекают из следствий 3.3 и 4.5.

Если f — вогнутая функция, то из оптимальности меры μ^f_ρ следует, в силу леммы 5.1, оптимальность любой меры $\nu \in \mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}_1(\mathcal{H}))$ такой, что $\nu \succ \mu^f_\rho$ (существование такой меры ν гарантируется следствием 5.6).

Поскольку выпуклая функция $\check{f}$ полунепрерывна снизу, из определения выпуклого замыкания следует, что $\check{f}(\rho) \leqslant \overline{\mathrm{co}}f(\rho)$ для всех ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Поскольку $\overline{\mathrm{co}}f$ — выпуклая полунепрерывная снизу функция, не превосходящая функцию f, из неравенства Йенсена следует, что

$$\overline{\mathrm{co}}f(\rho) \leqslant \inf_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} \int \overline{\mathrm{co}}f(\sigma)\mu(d\sigma) \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\mu\in\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))} \int f(\sigma)\mu(d\sigma) = \check{f}(\rho)$$

для всех ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Следовательно, $\check{f} = \overline{\mathrm{co}}f$. ■

Замечание 5.2. Аналоги утверждений B и второй части C предложения 5.3 не имеют места для функций $\hat{f}$ и $\check{f}$ соответственно. Пример, показывающий, что супремум в определении величины $\hat{f}(\rho)$ может не достигаться даже для ограниченной полунепрерывной снизу функции, представлен в [14, замечание 1]. В качестве примера полунепрерывной снизу неотрицательной функции f, для которой $\mathrm{co}\,f \neq \overline{\mathrm{co}}f$ можно рассмотреть энтропию фон Неймана $H(\rho) = -\operatorname{Tr}\rho\log\rho$, поскольку $\overline{\mathrm{co}}H = \check{H} \equiv 0$ в силу спектральной теоремы, в то время как $\mathrm{co}\,H(\rho) = +\infty$ для любого состояния ρ, такого, что $H(\rho) = +\infty$, в силу выпуклости множества состояний с конечной энтропией [10].

Другие применения представленных в данной статье свойств множества вероятностных мер на пространстве квантовых состояний рассмотрены во второй части [14].

Литература

1. *Alfsen E.* Compact convex sets and boundary integrals. – New York-Heidelberg-Berlin: Springer Verlag, 1971.

2. *Aliprantis C.D., Border K.C.* Infinite dimensional analysis. – New York-Heidelberg-Berlin: Springer Verlag, 2006.

3. *Bennett C.H., DiVincenzo D.P., Smolin J.A., Wootters W.K.* Mixed State Entanglement and Quantum Error Correction // Phys. Rev. A – 1996. – V. 54. – P. 3824–3851.

4. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. – New York-London-Sydney-Toronto: John Willey and Sons. Inc., 1968.

5. *Bourgin R.D.* Partial orderings for integral representations on convex sets with the Radon-Nikodiym property // Pacific J. Math. – 1979. – V. 81, N 1. – P. 29–44.

6. *Bratteli O., Robinson D.W.* Operators algebras and quantum statistical mechanics. – New York-Heidelberg-Berlin: Springer Verlag, 1979, V. 1.

[3] минимальной вогнутой функцией, мажорирующей функцию f.

7. *O'Brien R.* On the openness of the barycentre map // Math. Ann. – 1976. – V. 223, N 3. – P. 207–212.

8. *Grzaslewicz R.* Extreme continuous function property // Acta. Math. Hungar. – 1997. – V. 74. – P. 93–99.

9. *Edgar G.A.* On the Radon-Nikodim property and martingale convergence // Lecture Notes in Mathematics. – 1978. – V. 645. – P. 62–76.

10. *Holevo A.S.* Statistical structure of quantum theory. – New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 2001.

11. *Papadopoulou S.* On the geometry of stable compact convex sets // Math. Ann. – 1977. – V. 229. – P. 193–200.

12. *Parthasarathy K.* Probability measures on metric spaces. – New York-London: Academic Press, 1967.

13. *Shirokov M.E.* Continuity of the von Neumann entropy // Commun. Math. Phys. – 2010. – V. 296, N 3. – P. 625–654.

14. *Shirokov M.E.* Properties of probability measures on the set of quantum states and their applications // arXiv:math-ph/0607019. – V. 3. – 2011.

15. *Богачев В.И.* Основы теории меры. – Москва-Ижевск: РХД, 2003.

16. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.

17. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2004.

18. *Протасов В.Ю., Широков М.Е.* Обобщенная компактность в линейных пространствах и ее приложения // Матем. сб. – 2009. – Т. 200, № 5. – С. 71–98.

19. *Холево А.С., Широков М.Е.* Непрерывные ансамбли и классическая пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности // Теория вероятностей и ее применения. – 2005. – Т. 50, № 1. – С. 98–114.

20. *Широков М.Е.* Свойства пространства квантовых состояний и монотонные характеристики сцепленности // Известия РАН. Серия математическая. – 2010. – Т. 74, № 4. – С. 189–224.

Поступила в редакцию 19.01.2011