

М.Л. Зайцев, В.Б. Аккерман

Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН

Нелинейное описание движения фронта реакции

Полная система гидродинамических уравнений, описывающих развитие гидродинамической неустойчивости фронта реакции, сведена к замкнутой системе поверхностных уравнений с использованием переменных Лагранжа, специальных интегралов движения и их аналогов. Показано, что завихренность играет ключевую роль в характере движения гидродинамических разрывов, придавая их уравнениям дифференциальный вид. В изоэнтропическом приближении демонстрируется, как учесть вызванные этим движением звуковые колебания плотности жидкости.

Ключевые слова: фронт реакции, дефлаграция, гидродинамический разрыв, гидродинамическая неустойчивость, интегро-дифференциальные уравнения, гидродинамическое течение.

I. Введение

Большой научный интерес представляет поиск уравнения, описывающего химическое равновесие и движение фронта химической реакции [1]. Особое внимание уделяется присущей фронту реакции (например, пламени) гидродинамической неустойчивости Дарье–Ландау (ДЛ-неустойчивости), вызванной тепловым расширением газа при экзотермическом процессе [1–8]. Действительно, газообразное топливо быстро натекает и сгорает в тонком слое газа, превращаясь вследствие сильного энерговыделения в газ с существенно большей температурой (и меньшей плотностью). Для типичных углеводородных пламен скачок плотности на фронте весьма велик: $\theta = \rho_u / \rho_b = 5 - 10$ [1]. В результате дополнительный объём газа, порожденный тепловым расширением, толкает топливо по нормали к каждой локальной точке поверхности фронта реакции, способствуя его распространению. Понимание динамики распространения реакций позволило бы глубже понять механизм их развития и обнаружить новые эффекты и явления. Уравнение фронта экзотермической реакции (горения) получено лишь в приближении слабо искривленного фронта и / или малого теплового расширения в процессе реакции [8–11]. Прямое численное моделирование подобных процессов сильно затруднено вследствие разнообразия характерных химических и гидродинамических размеров, ($10^{-2} - 10^{-3}$) мм и (0,1–1) м соответственно [6, 12].

В данной работе, вытекающей из нашей предыдущей работы [13], полная система гидродинамических уравнений, описывающих развитие гидродинамической неустойчивости фронта реакции в двумерном / трёхмерном потоке, сведена к замкнутой системе поверхностных уравнений. Данная процедура проведена с использованием переменных Лагранжа, специальных интегралов движения и их аналогов. При этом показано, что завихренность играет ключевую роль в динами-

ке гидродинамических разрывов, придавая уравнениям дифференциальный вид. В изоэнтропическом приближении демонстрируется, как учесть вызванные этим движением колебания плотности жидкости, позволяющие учесть влияние звука на развитие (или затухание) ДЛ-неустойчивости. Полученная система уравнений согласуется с ранее известными аналитическими решениями, полученными в частных случаях.

II. Неустойчивость Дарье–Ландау в 3D-потоке

II.1. Бесконечно тонкий фронт

Рассмотрим распространение бесконечно тонкого, слабо искривленного фронта реакции в трёхмерном (3D) потенциальном внешнем потоке (рис. 1). При этом $u = \nabla\varphi$ и $\Delta\varphi = 0$. Обозначим все величины впереди и позади фронта индексами «–» и «+» соответственно. Предположим, что газодинамика горения характеризуется пространственным масштабом R (это может быть радиус трубы, ширина двумерного канала, радиус сферической камеры сгорания и т.д.). Для удобства, аналогично работе [11], введём безразмерные величины: скорость $u = v/U_f$, координаты $r = x/R$ и давление $P = (\Pi - \Pi_f) / \rho_f U_f^2$, где ρ_f и Π_f — соответственно плотность и давление в топливе бесконечно далеко от фронта, а U_f — скорость пламени с плоским фронтом. Время t безразмерим величиной R/U_f . Течение газа предполагается несжимаемым и невязким. Тогда гидродинамические уравнения принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \times \omega + \nabla \left(\Theta P + \frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times [u \times \omega], \quad (2)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (3)$$

где $\Theta = 1$ в топливе и $\Theta = \theta = \rho_- / \rho_+$ в сгоревшем газе. Граничные условия на поверхности фронта,

следующие из законов сохранения, будут выглядеть следующим образом [11]:

$$u_+ - u_- = (\theta - 1)n, \quad (4)$$

$$P_+ - P_- = 1 - \theta, \quad (5)$$

$$V = 1 - u_{n-}, \quad (6)$$

где θ — скачок плотности, n — внутренняя нормаль и V — проекция скорости фронта на отрицательное направление вектора n . Скорости $u_{n-} = \partial\varphi/\partial n = 1 - V$ и $u_\tau = \partial\varphi/\partial\tau$ связаны между собой формулой Грина [14]:

$$2\pi\varphi(r) =$$

$$= \oint \left[\frac{1}{|r_s - r|} \frac{\partial\varphi(r_s)}{\partial n_s} + \varphi(r_s)n_s \cdot \frac{r_s - r}{|r_s - r|^3} \right] dS(r_s). \quad (7)$$

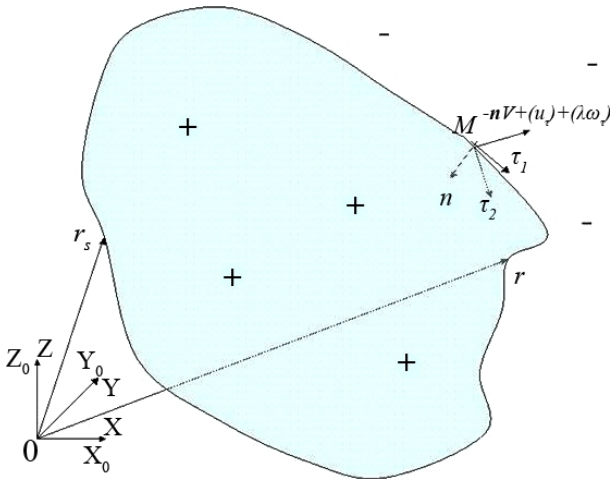


Рис. 1. Распространение фронта реакции в 3D-случае

Тогда из уравнений гидродинамики (1)–(3) и условий сшивки (4)–(6) следует, что для любой точки на фронте

$$\frac{d\varphi}{dt} + u_{n-} + \frac{1}{2}(u_\tau^2 - u_{n-}^2) + P = 0, \quad (8)$$

$$\omega = -\frac{\theta - 1}{\theta}[n \times \nabla P], \quad (9)$$

где ω — завихренность сразу за фронтом реакции, и для простоты в данном разделе полная производная определена по формуле [15–17]:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial n}.$$

Пусть для определённости выполняются общие уравнения гидродинамики и химической кинетики. Пламя будет тонкой областью, где физические величины претерпевают значительные изменения. Перейдём взаимно однозначно к лагранжевым переменным (r_0, t) (то есть к разметке):

$$\frac{dr}{dt} = u(r, t), \quad r = r(r_0, t), \quad r_0 = r_0(r, t), \quad r_0|_{t=0} = r. \quad (10)$$

Тогда согласно формуле (6) на границе области сгоревшего газа «+»:

$$\begin{aligned} \frac{dr_0}{dt} &= \frac{\partial r_0}{\partial t} - V \frac{\partial r_0}{\partial n} = - \left(u_\tau \cdot \frac{\partial r_0}{\partial \tau} \right) - (u_n + V) \frac{\partial r_0}{\partial n} = \\ &= - \left(u_\tau \cdot \frac{\partial r_0}{\partial \tau} \right) - \theta \frac{\partial r_0}{\partial n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим также общее уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \text{div} u = 0. \quad (12)$$

Переходя в нём к переменным Лагранжа, находим [18]:

$$\frac{d\rho}{dt_L} + \rho \cdot \left(\frac{\partial(u_x, y, z)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, u_y, z)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, y, u_z)}{\partial(x, y, z)} \right) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d\rho}{dt_L} + \frac{\rho}{\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{dt_L} = 0, \quad (14)$$

то есть

$$\rho \cdot \Delta = \rho \cdot \frac{\partial r}{\partial r_0} = \rho_0(r_0). \quad (15)$$

Якобиан преобразования переменных (10) $\Delta \sim \theta$ внутри фронта ограничен. Следовательно, в пределе $\delta \rightarrow 0$, где δ — толщина фронта, область пламени становится бесконечно тонкой и превращается в поверхность разрыва как в пространстве (r, t) , так и в пространстве переменных Лагранжа (r_0, t) .

Завихренность (9), образующаяся за фронтом, зависит от кривизны фронта пламени и происходящих в нём внутренних процессов [2, 19]. Поэтому найти ее, не решая общих уравнений теории горения, крайне затруднительно. Однако можно в некотором смысле обойти эту проблему, направив время в обратную сторону. Мы знаем, что в 3D-случае уравнения Эйлера (1)–(3) допускают интегралы движения $\omega \cdot \nabla r_0 = \omega_0(r_0)$, см. приложение А. Тогда в системе координат (n, τ_1, τ_2) , на границе области сгоревшего газа «+» должно выполняться соотношение

$$\omega_1 \frac{\partial r_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial r_0}{\partial \tau_2} = \omega_0(r_0), \quad (16)$$

так как из формулы (9) следует, что на фронте $\omega_{n+} = 0$, см. [13]. Исключая $\partial x_0/\partial n$, $\partial y_0/\partial n$ и $\partial z_0/\partial n$ из уравнений (11) и (15), получаем

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{dx_0}{dt} & \frac{dy_0}{dt} & \frac{dz_0}{dt} \\ \frac{\partial x_0}{\partial \tau_1} & \frac{\partial y_0}{\partial \tau_1} & \frac{\partial z_0}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial \tau_2} & \frac{\partial y_0}{\partial \tau_2} & \frac{\partial z_0}{\partial \tau_2} \end{array} \right| + \theta = 0. \quad (17)$$

Выразив из уравнения (16) r_0 через ω_1, ω_2 , которые в свою очередь зависят от давления на фронте согласно формуле (9), и подставив результат в (17), чтобы найти P , получим в итоге замкнутую систему уравнений на поверхности фронта для определения потенциала φ и скорости пламени V (уравнения (8), (9), (16) и (17)).

Физический смысл этой системы состоит в следующем. Пусть реакция (пламя) распространяется из некоторой точки зажигания. В некий момент времени «фотографируется» распределение завихренности за фронтом. Тогда с помощью уравнений (8), (9), (16), (17) можно описать всю эволюцию фронта реакции: от момента зажигания до момента фотографирования. В противном случае неизвестна была бы функция $\omega_0(r_0)$ на поверхности фронта, поскольку он, захватывая все новые и новые частицы, удалялся бы от области, где она определена. Если в некоторый момент времени мы имеем $\omega_0(r_0) \equiv 0$ во всей области сгоревшего газа, то из уравнения (16) следует, что $\omega(r,t) \equiv 0$ во все предыдущие моменты времени. Тогда скорость пламени V должна была бы определяться одновременно двумя разными условиями: с одной стороны, формулой Франкеля [10]:

$$V = 1 - \frac{(\theta - 1)}{2\pi} (n \cdot \nabla) \oint \frac{1}{|r_\xi - r|} dS_\xi, \quad (18)$$

а с другой стороны, системой уравнений (8), (9). Это невыполнимо, и, следовательно, завихренность всегда должна образовываться за фронтом, за исключением тривиального случая $\theta = 1$, что подтверждается прямыми численными экспериментами [6, 7, 20]. Этот простой пример показывает, что не все решения гидродинамических уравнений спереди и сзади фронта можно согласовать с условиями на границе, то есть не всякую задачу Коши можно здесь поставить.

Вместо перехода к переменным Лагранжа (r_0, t) (10), можно использовать более общее преобразование (А.5). Если же $\omega_n = 0$, то принципиально ничего не изменится. Изменяется только формулы (11), где добавится слагаемое $\lambda \cdot \omega_\tau$.

II.2. Фронт конечной толщины

Происходящие внутри пламени процессы можно учесть, вводя малые поправки в граничные условия на поверхности фронта [19]:

$$u_+ - u_- = (\theta - 1)n + \delta A, \quad (19)$$

$$P_+ - P_- = 1 - \theta + \delta B, \quad (20)$$

$$V = \theta - u_{n+} + \delta C, \quad (21)$$

где A, B, C зависят от θ, u_-, P_- , кривизны фронта и внутренних параметров газа. В отличие от предыдущего случая здесь $\omega_{n+} = \delta[\nabla \times A]_n \neq 0$ и порядка δ .

Рассмотрим точку $M(r, t)$ на поверхности пламени, движущуюся со скоростью $-nV + u_\tau + \lambda\omega_\tau$ (рис. 1). Перейдём взаимно однозначно в области сгоревшего газа к переменным начального положения частиц газа и времени (r_0, t) по формуле

$$\frac{dr}{dt} = u(r, t) + \lambda(r, t) \cdot \omega(r, t), \quad (22)$$

где $r = r(r_0, t)$ и $r_0 = r_0(r, t)$, $r_0|_{t=0} = r$, а $\lambda(r, t)$ выбрано следующим образом:

$$\omega(r, t) \cdot \nabla \lambda(r, t) = 0 \quad (23)$$

в области сгоревшего газа и

$$\lambda(r, t) \cdot \omega_{n+} = -\theta - \delta C \quad (24)$$

на границе сгоревшего газа. Из теории дифференциальных уравнений известно, что система (23), (24) имеет единственное решение. Из уравнения (24) всегда можно выразить $\lambda(r, t)$ на поверхности фронта реакции. В системе координат (r_0, t) граница прореагировавшего газа не движется. Действительно, пусть $g_0(r_0, t) = 0$ — уравнение движения фронта реакции. Тогда скорость фронта равна

$$\begin{aligned} V_{0+} &= -\frac{g_{0t}}{|\nabla_0 g_0|} = -\frac{g_t + ((u + \lambda\omega) \cdot \nabla g)}{|\nabla_0 g_0|} = \\ &= -\frac{|\nabla g|}{|\nabla_0 g_0|} (V + u_{n+} + \lambda\omega_{n+}) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогично уравнению (11), для точки $M(r, t)$ на границе прореагировавшего газа имеем

$$\frac{dr_0}{dt} = \frac{\partial r_0}{\partial t} - V \frac{\partial r_0}{\partial n} + (u_\tau + \lambda\omega_\tau) \cdot \frac{\partial r_0}{\partial \tau} = 0, \quad (26)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial n} + (u_\tau + \lambda\omega_\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (27)$$

— полная производная по времени для движущейся точки $M(r, t)$ [15–17]. В приложении А показано, что и в этих переменных интегралы $\omega \cdot \nabla i_0$ и Δ , где $i = x, y, z$, не зависят явно от времени, то есть $\Delta = 1$, $\omega \cdot \nabla i_0 = \omega_{0i}(r_0)$, где $\omega_0(r_0)$ — распределение завихренности в начальный момент времени. Исключая $\partial x_0 / \partial n$, $\partial y_0 / \partial n$, $\partial z_0 / \partial n$ из формул

$$\frac{\partial r_0}{\partial \tau} = \frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)} = 1, \quad (28)$$

$$\omega_n \frac{\partial r_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial r_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial r_0}{\partial \tau_2} = \omega_0(r_0), \quad (29)$$

получаем выражение

$$\omega_n = \left| \frac{\partial r_0}{\partial \tau_1} \quad \frac{\partial r_0}{\partial \tau_2} \quad \omega_0(r_0) \right|. \quad (30)$$

К уравнениям (8), (9) в этом случае добавляются поправки порядка δ/R :

$$\frac{d\varphi}{dt} + (1 + \delta C - \delta A_n) u_{n-} - \frac{1}{2}(u_\tau^2 + u_{n-}^2) + P_- = 0, \quad (31)$$

$$\omega_+ = -\frac{\theta - 1}{\theta} [n \times \nabla P_-] + \delta \Psi(A, B, C), \quad (32)$$

где $\omega_{n+} = \delta[\nabla \times A]_n$.

Таким образом, система уравнений (26), (30)–(32) должна определять эволюцию фронта реакции. Ее преимущество состоит в том, что она реально описывает движение поверхности в терминах самой поверхности, а недостаток — что $\lambda \sim 1/\delta$, то есть сильно зависит от конкретных свойств газовой смеси.

Предположим, что перед фронтом и за ним выполняется условие изоэнтропичности течения, а характерная скорость потока много меньше скорости звука. Тогда можно учесть сжимаемость газа, перейдя к новым переменным, при этом заменив уравнение (23) на

$$\lambda\omega \cdot \nabla\rho + \rho\omega \cdot \nabla\lambda = 0. \quad (33)$$

В этом случае вместо интегралов движения $\omega \cdot \nabla i_0$ и Δ следует использовать интегралы $\omega \cdot \nabla i_0/\rho$ и $\rho\Delta$ (см. приложение А) и однозначную связь на поверхности фронта между давлением и плотностью $P = P_S(\rho)$, определяемую уравнением состояния. Если перед фронтом $s = \text{const}$, то эта зависимость сразу следует из уравнения состояния топлива. За искривленным фронтом происходит неравномерное нагревание продуктов горения, но выполняется соотношение $s = P(1 - 1/\theta) + \text{const}$ (это следует из второго начала термодинамики и закона Гесса). Если данное выражение для энтропии подставить в уравнение состояния прореагировавшего газа $P = P_+(\rho, s)$, то мы также получим однозначную связь между давлением и плотностью на границе пламени: $P = P_+(\rho)$, что и позволяет учесть образующиеся звуковые колебания. Выпишем уравнения для этого случая. С учётом изменения плотности формулы (28) и (29) примут вид

$$\omega_n \frac{\partial r_0}{\partial n} + \omega_1 \frac{\partial r_0}{\partial \tau_1} + \omega_2 \frac{\partial r_0}{\partial \tau_2} = \frac{\rho}{\rho_0(r_0)} \omega_0(r_0), \quad (34)$$

$$\frac{\partial(x_0, y_0, z_0)}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)} = \frac{\rho}{\rho_0(r_0)}. \quad (35)$$

Интересно отметить, что, исключая $\partial x_0/\partial n$, $\partial y_0/\partial n$ и $\partial z_0/\partial n$ из формул (34) и (35), также получим уравнение (30). При этом отношение плотностей $\rho/\rho_0(r_0)$ исчезнет. С условиями сшивки на фронте (19)–(21) надо теперь учитывать зависимость от температуры и плотности. Уравнения же движения фронта пламени остаются прежними: (26), (30)–(32). При этом незначительные звуковые изменения плотностей газа перед и за фронтом определяются по формулам $P = P_S(\rho)$ и $P = P_+(\rho)$.

II.3. Влияние внешнего потока

Рассмотрим распространение бесконечно тонкого, слабо искривленного фронта реакции во внешнем вихревом течении газа (рис. 1). При этом рассмотрим точку $M(x, y, z)$ на поверхности пламени, движущуюся со скоростью $-nV + u_\tau$. Из уравнений Эйлера (1)–(3) в областях «-» и «+» и условий сшивки (4)–(6) для этой точки следует

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{d(u \cdot \tau_1)}{dt} \cong \\ &\cong \frac{\theta}{\theta - 1}(\omega_{2+} - \omega_{2-}) - (1 - V) \frac{\partial V}{\partial \tau_1}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dt} &= \frac{d(u \cdot \tau_2)}{dt} \cong \\ &\cong \frac{\theta}{\theta - 1}(\omega_{1-} - \omega_{1+}) - (1 - V) \frac{\partial V}{\partial \tau_2}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \omega_{1-}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \omega_{2-}}{\partial \tau_2} = \theta \left(\frac{\partial \omega_{1+}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \omega_{2+}}{\partial \tau_2} \right), \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_n}{dt} &= \frac{d(\omega \cdot n)}{dt} \cong \\ &\cong -\omega_n \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2} \right) - \theta \left(\frac{\partial \omega_{1+}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \omega_{2+}}{\partial \tau_2} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Формула (9) для давления на фронте при этом обобщается следующим образом:

$$\theta\omega_+ - \omega_- = -(\theta - 1)[n \times \nabla P]. \quad (40)$$

Предположим, что течение газа таково, что $\omega_n \neq 0$. Чтобы замкнуть данную систему, необходимо ещё как минимум четыре независимых уравнения. Для этого перейдем взаимно однозначно в областях «-» и «+» соответственно к переменным начального положения частиц газа и времени (r_0, t) по формулам

$$\frac{dr}{dt} = u(r, t) + \lambda_\pm(r, t) \cdot \omega(r, t), \quad (41)$$

где $r = r(r_0, t)$ и $r_0 = r_0(r, t)$, $r_0|_{t=0} = r$, а $\lambda_\pm(r, t)$ выбрано следующим образом:

$$\omega(r, t) \cdot \nabla \lambda_\pm(r, t) = 0 \quad (42)$$

в областях «-» и «+» соответственно,

$$\lambda_-(r, t) \cdot \omega_n = -1 \quad (43)$$

на границе топлива и

$$\lambda_+(r, t) \cdot \omega_n = -\theta \quad (44)$$

на границе сгоревшего газа. Из теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка известно, что система уравнений (41)–(44) имеет единственное решение. Из уравнений (42)–(44) можно определить $\lambda_\pm(r, t)$ и $\partial \lambda_\pm(r, t)/\partial n$ на поверхности фронта реакции. Аналогично уравнению (25), в системе координат (41) границы исходного и прореагировавшего веществ неподвижны. Точке $M(r, t)$ будут соответствовать две различные точки $M_-(r_{0-}, t)$ и $M_+(r_{0+}, t)$, движущиеся по внешней и внутренней стороне поверхности и совпадающие в начальный момент. Тогда из уравнений (41)–(44) их координаты описываются формулами

$$\begin{aligned} \frac{dr_{0\pm}}{dt} &= \frac{\partial r_{0\pm}}{\partial t} - V \frac{\partial r_{0\pm}}{\partial n} + u_\tau \cdot \frac{\partial r_{0\pm}}{\partial \tau} = \\ &= - \left(\lambda_\pm \omega_{\tau\pm} \cdot \frac{\partial r_{0\pm}}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Полную производную в уравнении (45) определим для простоты по формуле

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial n} + u_\tau \cdot \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (46)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_{0\pm}}{\partial n} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial r_{0\pm}}{\partial n} \right) - V \frac{\partial^2 r_{0\pm}}{\partial n^2} + \\ + u_\tau \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial r_{0\pm}}{\partial n} \right) &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \tau_2} + \frac{\partial \lambda_\pm}{\partial n} \omega_n - \right. \\ - \lambda_\pm \left(\frac{\partial \omega_{1\pm}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \omega_{2\pm}}{\partial \tau_2} \right) \frac{\partial r_{0\pm}}{\partial n} &- \left(\omega_{2\pm} + \frac{\partial u_{n\pm}}{\partial \tau_1} - \right. \\ - \frac{\partial \lambda_\pm}{\partial n} \omega_{1\pm} - \lambda_\pm \frac{\partial \omega_{1\pm}}{\partial n} \right) \frac{\partial r_{0\pm}}{\partial \tau_1} &+ \left(\omega_{1\pm} - \frac{\partial u_{n\pm}}{\partial \tau_2} + \right. \\ + \frac{\partial \lambda_\pm}{\partial n} \omega_{2\pm} + \lambda_\pm \frac{\partial \omega_{2\pm}}{\partial n} \right) \frac{\partial r_{0\pm}}{\partial \tau_2} &- \left(\lambda_\pm \omega_{\tau\pm} \cdot \frac{\partial^2 r_{0\pm}}{\partial \tau \partial n} \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Аналогично предыдущему пункту, в переменных (41) интегралы $\omega \cdot \nabla i_0$ и Δ не зависят явно от времени, то есть $\Delta = 1$ и $\omega \cdot \nabla i_0 = \omega_{0i}(r_0)$. В системе координат (n, τ_1, τ_2) на границе пламени имеем

$$\frac{\partial(x_{0\pm}, y_{0\pm}, z_{0\pm})}{\partial(\tau_1, \tau_2, n)} = 1, \quad (48)$$

$$\omega_n \frac{\partial r_{0\pm}}{\partial n} + \omega_{1\pm} \frac{\partial r_{0\pm}}{\partial \tau_1} + \omega_{2\pm} \frac{\partial r_{0\pm}}{\partial \tau_2} = \omega_{0\pm}(r_{0\pm}). \quad (49)$$

В результате получим замкнутую систему (36)–(39), (45), (47)–(49) для определения V . Требование $\omega_n \neq 0$ здесь существенно. Последнее замечание предыдущего пункта относительно учёта влияния температуры и плотности остаётся в силе и здесь.

III. Неустойчивость Дарье–Ландау в 2D-потоке. Адиабатическое приближение

В этом разделе, не ограничивая общности, мы рассмотрим распространение двумерного (2D) бесконечно тонкого, слабо искривленного фронта экзотермической реакции (пламени) в потенциальном внешнем потоке (рис. 2). При этом течение газа вне фронта снова предполагается несжимаемым и невязким, но допускается неравномерное адиабатическое нагревание прореагировавшего вещества. Тогда гидродинамические уравнения принимают вид [2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \times \omega + \nabla \left(\Theta P + \frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad (50)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times [u \times \omega], \quad (51)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (52)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \cdot \nabla s = 0, \quad (53)$$

где u — поле скоростей, ω — завихренность, Θ — безразмерная температура, причём $\theta = 1$ в топливе и $\Theta = \theta = \rho_-/\rho_+$ в сгоревшем газе, а s — энтропия газа.

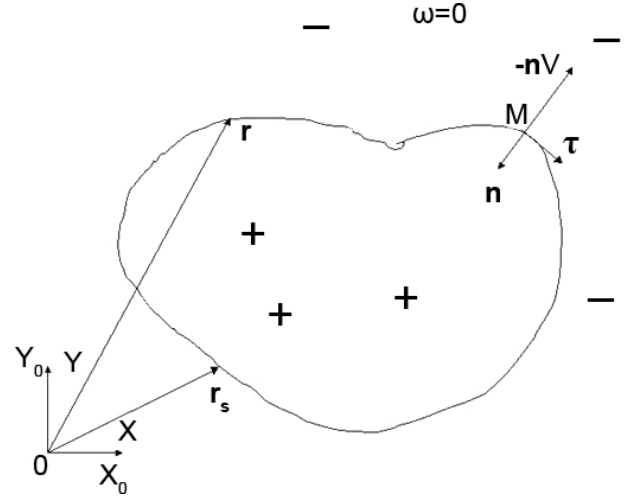


Рис. 2. Фронт реакции в 2D-случае

Граничные условия на поверхности фронта, следующие из законов сохранения, имеют вид (4)–(6) [11]. Скорости $u_{n-} = \partial\varphi/\partial n = 1 - V$ и $u_\tau = \partial\varphi/\partial\tau$ связаны между собой 2D-формулой Грина [14]:

$$\begin{aligned} \pi\varphi(r, t) &= \\ &= \oint \left[\frac{\partial\varphi(r_s, t)}{\partial n_s} \ln|r_s - r| - \varphi(r_s, t) n_s \cdot \frac{r_s - r}{|r_s - r|^2} \right] dl(r_s). \end{aligned} \quad (54)$$

Тогда из уравнений гидродинамики (50)–(53) и условий на фронте (4)–(6) следует, что для любой точки на поверхности фронта реакции

$$\frac{d\varphi}{dt} + u_{n-} + \frac{1}{2}(u_\tau^2 - u_{n-}^2) + P = 0, \quad (55)$$

$$\omega = -\frac{\theta - 1}{\theta} [n \times \nabla P] = \frac{\theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\partial P}{\partial \tau}. \quad (56)$$

Для простоты здесь, как и в разделе I.1, полная производная определена по формуле [15–17]

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial n}.$$

Предположим, что перед фронтом энтропия $s_- = \text{const}$. Из второго начала термодинамики и закона Гесса для любой точки на фронте также находим [2]

$$s_+ = \frac{1 - \theta}{\theta} \cdot P + \text{const}. \quad (57)$$

Перейдём взаимно однозначно к лагранжевым переменным начального положения частиц газа и времени (r_0, t) (то есть к разметке) (10). Аналогично разделу I.1, в пределе бесконечно тонкого фронта область реакции является поверхностью разрыва как в пространстве (r, t) , так и пространстве переменных Лагранжа (r_0, t) .

Рассмотрим уравнения Эйлера (50)–(53) в области сгоревшего газа. Из уравнений (51) и (53) имеем в области за фронтом в пределе бесконечно тонкого фронта

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{d\omega}{dt_L} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0(x_0, y_0), \quad (58)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u_x \frac{\partial s}{\partial x} + u_y \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{ds}{dt_L} = 0 \Rightarrow s = s_0(x_0, y_0), \quad (59)$$

где $\omega_0(x_0, y_0)$ и $s_0(x_0, y_0)$ — начальное распределение завихренности и энтропии в области сгоревшего газа, а d/dt_L — производная по времени в переменных Лагранжа (10).

Из уравнений (10), (15), (58) и (59) для любой точки $M(x_0(x, y, t), y_0(x, y, t))$ на задней поверхности фронта, движущейся со скоростью $-nV$ (рис. 2), имеем

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega_0}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial \omega_0}{\partial y_0} \frac{dy_0}{dt}, \quad (60)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s_0}{\partial x_0} \frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial s_0}{\partial y_0} \frac{dy_0}{dt}, \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= \frac{\partial x_0}{\partial t} - V \frac{\partial x_0}{\partial n} = -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} - (u_n + V) \frac{\partial x_0}{\partial n} = \\ &= -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} - \theta \frac{\partial x_0}{\partial n}, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= \frac{\partial y_0}{\partial t} - V \frac{\partial y_0}{\partial n} = -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} - (u_n + V) \frac{\partial y_0}{\partial n} = \\ &= -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} - \theta \frac{\partial y_0}{\partial n}, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(\tau, n)} = \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \frac{\partial y_0}{\partial n} - \frac{\partial x_0}{\partial n} \frac{\partial y_0}{\partial \tau} = 1. \quad (64)$$

Мы видим, что система (60)–(64) линейна относительно величин dx_0/dt , dy_0/dt , $\partial x_0/\partial n$ и $\partial y_0/\partial n$. Исключая их из (60)–(64), находим

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_0}{\partial x_0} & \frac{\partial \omega_0}{\partial y_0} & 0 & 0 & \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{\partial s_0}{\partial x_0} & \frac{\partial s_0}{\partial y_0} & 0 & 0 & \frac{ds}{dt} \\ 1 & 0 & \theta & 0 & -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \\ 0 & 1 & 0 & \theta & -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial y_0}{\partial \tau} & \frac{\partial x_0}{\partial \tau} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (65)$$

Фактически условие (65) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка для определения dP/dt вдоль фронта, которое может быть решено аналитически. Приведём вид и решение этого уравнения. После подстановки (56) и (57) в выражение (65) находим уравнение для dP/dt :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_0}{\partial x_0} & \frac{\partial \omega_0}{\partial y_0} & 0 & 0 & \frac{(\theta-1)}{\theta} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{dP}{dt} \right) \\ \frac{\partial s_0}{\partial x_0} & \frac{\partial s_0}{\partial y_0} & 0 & 0 & -\frac{(\theta-1)}{\theta} \frac{dP}{dt} \\ 1 & 0 & \theta & 0 & -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \\ 0 & 1 & 0 & \theta & -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial y_0}{\partial \tau} & \frac{\partial x_0}{\partial \tau} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (66)$$

которое может быть представлено в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{dP}{dt} \right) + A(\tau) \frac{dP}{dt} + B(\tau) = 0, \quad (67)$$

где A и B определяются из (66). Аналитическое решение уравнения (67) имеет вид

$$\frac{dP}{dt}(\tau) = \exp \left(- \int_0^\tau A(\tau') d\tau' \right) \times$$

$$\times \left(C - \int_0^\tau B(\tau') \exp \left(\int_0^{\tau'} A(\tau'') d\tau'' \right) d\tau' \right), \quad (68)$$

где постоянная C определяется из условия

$$\frac{dP}{dt}(0) = \frac{dP}{dt}(L), \quad (69)$$

где L — длина фронта реакции в некоторый момент времени. Производные dx_0/dt и dy_0/dt тогда уже могут определяться, например, по формулам

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad \frac{dy_0}{dt} = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad (70)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_0}{\partial x_0} & \frac{\partial \omega_0}{\partial y_0} & 0 & 0 \\ \frac{\partial s_0}{\partial x_0} & \frac{\partial s_0}{\partial y_0} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \theta \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{d\omega}{dt} & \frac{\partial \omega_0}{\partial y_0} & 0 & 0 \\ \frac{ds}{dt} & \frac{\partial s_0}{\partial y_0} & 0 & 0 \\ -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} & 0 & \theta & 0 \\ -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} & 1 & 0 & \theta \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial \omega_0}{\partial x_0} & \frac{d\omega}{dt} & 0 & 0 \\ \frac{\partial s_0}{\partial x_0} & \frac{ds}{dt} & 0 & 0 \\ 1 & -u_\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} & \theta & 0 \\ 0 & -u_\tau \frac{\partial y_0}{\partial \tau} & 0 & \theta \end{vmatrix}. \quad (71)$$

Таким образом, зная $\omega_0(x_0, y_0)$ и $s_0(x_0, y_0)$, из уравнения (65) можно определить давление P , а значит, пользуясь потенциальностью потока газа перед пламенем, из уравнений (54)–(56) можно также вычислить скорость фронта V во все предыдущие моменты времени.

Однако заметим, что с помощью данной системы уравнений возможно моделирование движения фронта пламени и в прямом направлении времени. Действительно, пусть в лагранжевых координатах на двух последовательных, близко расположенных слоях нам известны величины $\omega_0(x_0, y_0)$ и $s_0(x_0, y_0)$ (рис. 3). Тогда по формулам (66), (70) и (71) мы находим положение фронта реакции в следующий момент времени и распределение давления P на нем. Зная давление, мы получим завихренность и энтропию по формулам (56) и (57) в этот момент на новом слое. На предыдущих слоях эти величины в переменных Лагранжа остаются неизменными, то есть мы тогда будем знать $\omega_0(x_0, y_0)$ и $s_0(x_0, y_0)$ на двух последовательных слоях и в следующий момент времени, и т.д.

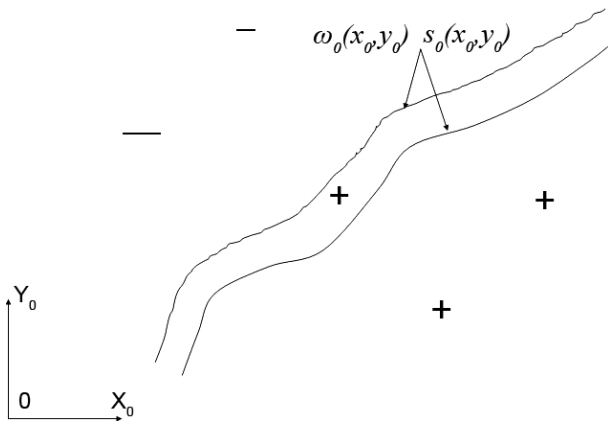


Рис. 3. Распространение пламени в переменных Лагранжа

В пункте I.1 показывается, что не все решения гидродинамических уравнений спереди и сзади фронта пламени можно согласовать с условиями на границе, то есть не всякую задачу Коши можно здесь поставить. Это означает, что функции $\omega_0(x_0, y_0)$ и $s_0(x_0, y_0)$ не могут быть произвольными, в частности, нулевыми для сильно искривленного фронта. Предположительно, в них зашифрована информация о процессах, происшедших внутри и вне пламени до момента их фиксации. Если в этом смысле функции $\omega_0(x_0, y_0)$ и $s_0(x_0, y_0)$ заданы корректно, то мы можем однозначно обратить во времени пламя вплоть до момента их зажигания.

Пусть в некоторый момент времени фронт пламени, распространяющийся в потенциальном внешнем потоке, приобрел цилиндрическую форму. При этом на его поверхности скорости $u_{n-} = \text{const}$, $u_{\tau} = \partial\varphi/\partial\tau = 0$, а внутри фронта в момент фотографирования $\omega_0(x_0, y_0) \equiv 0$, но из-за особенности тепловыделения при химической реакции горения $s_0(x_0, y_0) \neq \text{const}$ (рис. 4). Раскладывая определитель (66) по первой строке, находим, что вдоль фронта $dP/dt = \text{const}$. Если в момент фотографирования на поверхности фронта было $P = P_0 = \text{const}$, то $P = \text{const}$ будет и во все предыдущие моменты времени. Тогда из уравнения (55) с учётом начальных данных у скорости u_{\pm} вытекает, что также вдоль фронта будет $d\varphi/dt = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ и в обратном направлении времени на поверхности пламени всегда будет $u_{n-} = 1 - V = \text{const}$, $u_{\tau} = \partial\varphi/\partial\tau = 0$, то есть он будет двигаться цилиндрически. В формулах (70) в этом случае возникает особенность, то есть проследить проникновение частиц газа через фронт горения от момента зажигания до момента фотографирования мы не сможем. Как мы видим, это и не требуется. Если учесть конечную толщину фронта реакции с помощью поправок в условия сшивки (4)–(6), то мы можем наблюдать неустойчивость и этого цилиндрического фронта, например, благодаря тангенциальной теплопроводности внутри пламени.

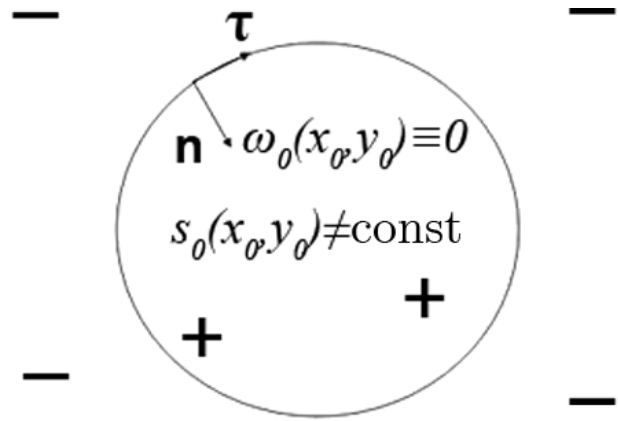


Рис. 4. Цилиндрическое пламя в 2D-потоке

Отметим, что формально полученная система уравнений не сводится к ранее полученным в предположении потенциальности потоков перед и за фронтом реакции уравнениям Сивашинского [9] и Франкеля [10]. В случае, если $\omega_0(x_0, y_0) \equiv 0$, из уравнений (65) и (66) следует, что вдоль фронта $dP/dt = \text{const}$ и $P = \text{const}$. Тогда движение фронта будет описываться системой (54), (55) с постоянным давлением, отличной от упомянутых выше уравнений. Это связано с тем, что за искривленной поверхностью фронта всегда образуется завихренность, но оба подхода в данном предельном случае её не учитывают.

IV. Заключение

В данной работе с помощью специального преобразования переменных в 3D-потоке мы свели полную систему гидродинамических уравнений по объёму к системе уравнений на поверхности. Эти уравнения могут значительно упростить численное моделирование фронта горения. Во-первых, они уменьшают размерность задачи на единицу. Во-вторых, самый малый масштаб, который можно разрешить при их моделировании, много больше толщины этого разрыва. Особенно это важно для неустойчивости Дарье–Ландау, где процессы, происходящие внутри пламени, крайне сложно моделировать на больших временных и пространственных масштабах [6, 8, 12]. В-третьих, они выведены в виде, независимом от выбора системы координат и могут быть применены в любых пространственных геометриях. В-четвертых, помимо скорости поверхности они позволяют определить, как меняются на разрыве все остальные параметры, характеризующие течение (такие, как u , P , ω , ρ , s и т.д.).

В данной работе мы выводим в гидродинамическом приближении соответствующие уравнения фронта реакции (пламени) и в 2D-потоке с минимальными ограничениями. Смысл исследования состоит в следующем: если в некоторый момент времени известно распределение завихренности в области за фронтом, то можно полностью проследить эволюцию этого фронта от момента зажига-

ния до произвольного момента времени. Это не означает, что мы определим законы образования этих величин в процессе эволюции, например, пламени. Однако отсюда можно получить важную информацию, касающуюся реальных процессов, происходящих внутри фронта реакции.

V. Приложение А. Интегралы движения

Рассмотрим уравнения идеальной несжимаемой жидкости в 3D-случае

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times [u \times \omega], \tag{A.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0. \tag{A.2}$$

Рассмотрим также лагранжевы переменные (то есть разметку) (10). Умножим обе части уравнения (A.1) на ∇x_0 . Тогда

$$\begin{aligned} \nabla x_0 \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \nabla x_0 \cdot \nabla \times [u \times \omega] = \\ &= -\operatorname{div}(\nabla x_0 \times [u \times \omega]) = -\operatorname{div}(u(\omega \cdot \nabla x_0)) + \\ &+ \operatorname{div}(\omega(u \cdot \nabla x_0)) = -u \cdot \nabla(\omega \cdot \nabla x_0) + \omega \cdot \nabla(u \cdot \nabla x_0) = \\ &= -u \cdot \nabla(\omega \cdot \nabla x_0) - \omega \cdot \nabla \left(\frac{\partial x_0}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

При этом использовано свойство переменных Лагранжа:

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} + u_x \frac{\partial x_0}{\partial x} + u_y \frac{\partial x_0}{\partial y} + u_z \frac{\partial x_0}{\partial z} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\omega \cdot \nabla x_0) + u \cdot \nabla(\omega \cdot \nabla x_0) &= \frac{d}{dt}(\omega \cdot \nabla x_0) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega \cdot \nabla x_0 &= \omega_{0x}(x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

где d/dt — производная по времени в лагранжевых переменных, $\omega_0(x_0, y_0, z_0)$ — начальное распределение завихренности ω . Аналогично,

$$\omega \cdot \nabla y_0 = \omega_{0y}(x_0, y_0, z_0), \quad \omega \cdot \nabla z_0 = \omega_{0z}(x_0, y_0, z_0).$$

Из уравнения неразрывности (A.2) следует [18]: $\operatorname{div} u = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial(u_x, y, z)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, u_y, z)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, y, u_z)}{\partial(x, y, z)} \right) = 0,$$

$\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{dt} = 0$, то есть

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = 1. \tag{A.3}$$

Выражая ω с помощью уравнения (A.3), получим также $\omega_x(x_0, y_0, z_0, t) = \omega_0 \cdot \nabla_0 x$, $\omega_y(x_0, y_0, z_0, t) = \omega_0 \cdot \nabla_0 y$, $\omega_z(x_0, y_0, z_0, t) = \omega_0 \cdot \nabla_0 z$ [2]. Рассмотрим ещё общее уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \cdot \operatorname{div} u = 0. \tag{A.4}$$

Переходя в нём к переменным Лагранжа, найдём [18]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \left(\frac{\partial(u_x, y, z)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, u_y, z)}{\partial(x, y, z)} + \frac{\partial(x, y, u_z)}{\partial(x, y, z)} \right) = 0,$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{dt} = 0,$$

то есть

$$\rho \cdot \Delta = \rho \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = \rho_0(x_0, y_0, z_0)$$

— интеграл движения. В случае, если $\rho \neq \text{const}$, но $s = \text{const}$ (то есть существует однозначная связь между давлением и плотностью $P = P_S(\rho)$), соответствующими интегралами будут

$$\frac{\omega \cdot \nabla x_0}{\rho}, \quad \frac{\omega \cdot \nabla y_0}{\rho}, \quad \frac{\omega \cdot \nabla z_0}{\rho}.$$

Такие же результаты можно получить, если вместо лагранжевых переменных использовать более общее преобразование переменных

$$\frac{dr}{dt} = u(r, t) + \lambda(t) \cdot \omega(r, t), \quad r = r(r_0, t),$$

$$r_0 = r_0(r, t), \quad r_0|_{t=0} = r, \tag{A.5}$$

где $\lambda(t)$ — некоторая функция от t . Аналогичными рассуждениями можно установить, что в идеальной жидкости в этих переменных величины $\omega \cdot \nabla x_0$, $\omega \cdot \nabla y_0$, $\omega \cdot \nabla z_0$ и якобиан этого преобразования Δ не зависят явно от времени. Вместо $\lambda(t)$ можно взять $\lambda(x, y, z, t)$, так что $\omega(x, y, z, t) \cdot \nabla \lambda(x, y, z, t) = 0$, дабы выполнялось условие $\operatorname{div}(u + \lambda \omega) = 0$. Выражая также ω , получим: $\omega_x(x_0, y_0, z_0, t) = \omega_0 \cdot \nabla_0 x$, $\omega_y(x_0, y_0, z_0, t) = \omega_0 \cdot \nabla_0 y$, $\omega_z(x_0, y_0, z_0, t) = \omega_0 \cdot \nabla_0 z$. Аналогично, если $\rho \neq \text{const}$, но $s = \text{const}$ (то есть опять же существует однозначная связь между давлением и плотностью $P = P_S(\rho)$), можно в формулах (A.5) взять $\lambda(x, y, z, t)$ так, что $\lambda \omega \cdot \nabla \rho + \rho \omega \cdot \nabla \lambda = 0$. Тогда для данной замены переменных соответствующими интегралами будут

$$\frac{\omega \cdot \nabla x_0}{\rho}, \quad \frac{\omega \cdot \nabla y_0}{\rho}, \quad \frac{\omega \cdot \nabla z_0}{\rho}, \quad \rho \Delta.$$

Фактически здесь требуется пренебречь в формуле (A.1) только слагаемым $\nabla \rho \times \nabla P / \rho^2$, которое учитывает сжимаемость жидкости. При сильно дозвуковом движении фронта реакции, типичном для дефлаграции, сжимаемость вещества обычно можно пренебречь, что делает вышеизложенный анализ строгим.

Литература

1. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., др. Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Гидродинамика. Т. VI. — М.: Наука, 1986.

3. *Williams F.A.* Combustion Theory. — Benjamin, CA, 1985.
4. *Law C.K.* Combustion Physics. — Cambridge University press, NY, 2006.
5. *Pelce P., Clavin P.* Influence of hydrodynamics and diffusion upon the stability limits of laminar premixed flames // J. Fluid Mech. — 1982. — V. 124. — P. 219–242.
6. *Bychkov V.V., Golberg S.M., Liberman M.A. [et al.]*. Propagation of curved stationary flames in tubes // Phys. Rev. E. — 1996. — V. 54. — P. 3713–3726.
7. *Kadowaki S.* The influence of hydrodynamic instability on the structure of cellular flames // Phys. Fluids. — 1999. — V. 11. — P. 3426–3441.
8. *Bychkov V.V.* Nonlinear equation for a curved stationary flame and the flame velocity // Phys. Fluids. — 1998. — V. 10. — P. 2091–2114.
9. *Sivashinsky G.I.* Nonlinear analysis of hydrodynamics instability in laminar flames. Derivation of basic equations // Acta Astronaut. — 1977. — V. 4. — P. 1177–1215.
10. *Frankel M.* An equation of surface dynamics modeling flame fronts as density discontinuities in potential flows // Phys. Fluids. A. — 1990. — V. 2. — P. 1879–1886.
11. *Bychkov V., Zaytsev M. and Akkerman V.* Coordinate-Free Description of Corrugated Flames with Realistic Gas Expansion // Phys. Rev. E. — 2003. — V. 68. — P. 026312–026324.
12. *Zaytsev M., Bychkov V.* Effect of the Darrieus–Landau instability on turbulent flame velocity // Phys. Rev. E. — 2002. — V. 66. — P. 026310–026321.
13. *Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.* К нелинейной теории движения поверхностей гидродинамических разрывов // ЖЭТФ. — 2009. — Т. 135, №4. — С. 800–819.
14. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
15. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
16. *Кореньев Г.В.* Тензорное исчисление. — М.: МФТИ, 1996.
17. *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. — М.: Наука, 1965.
18. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1980.
19. *Matalon M., Matkowsky B.J.* Flames in fluids: their interaction and stability // Combust. Sci. Technol. — 1983. — V. 34, N. 2. — P. 295–316.
20. *Travnikov O. Yu., Bychkov V.V., Liberman M.A.* Influence of compressibility on propagation of curved flames // Phys. Fluids. — 1999. — V. 11, N. 9. — P. 2657–2666.

Поступила в редакцию 17.01.2010.