УДК 519.71

*В.А. Дыхта*[1], *С.П. Сорокин*[1], *Г.Н. Яковенко*[2]

[1] Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

[2] Московский физико-технический институт (государственный университет)

## Управляемые системы: условия экстремальности, оптимальности и идентификация алгебраической структуры

Для расширения сферы применимости методов теории управления, связанных с решениями неравенств и уравнения Гамильтона–Якоби, вводится новый класс функций типа Ляпунова, зависящих от канонических переменных дифференциальной системы условий экстремальности и обладающих свойствами сильной и слабой монотонности относительно решений этой системы. Предлагаются способы использования этого класса функций для решения позиционных и оптимизационных задач управления. Обсуждаются также математические модели управляемых систем, в основе которых лежат группы и алгебры Ли. Рассматривается процедура, позволяющая при помощи «пробных» воздействий на систему выявить структурные свойства.

**Ключевые слова:** принцип максимума, условия экстремальности, экстремали, неравенства Гамильтона–Якоби, достаточные условия оптимальности, идентификация системы, группы и алгебры Ли, алгебраическая структура.

## I. Условия экстремальности в управляемых системах и задачах оптимального управления

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u(t) \in U \tag{1}$$

на произвольном отрезке времени $T = [t_0,t_1]$ и всевозможные процессы этой системы — пары функций $(x,u) \in AC(T,R^n) \cdot L_\infty(T,U)$, удовлетворяющие (1) почти всюду на $T$.

Предполагая функцию $f$ непрерывной и достаточно гладкой, определим функцию Понтрягина:

$$H(t,x,p,u) = p \cdot f(t,x,u)$$

и сопряженную систему

$$\dot{p} = -H_x(t,x,p,u), \quad \dot{q} = -H_t(t,x,p,u). \tag{2}$$

Экстремалью системы (1) назовем любой процесс $(x,u)$, для которого существует решение $(p(t),q(t)) \neq 0$ системы (2), обеспечивающее условия максимума функции $H$ по $u \in U$:

$$\begin{gathered} H(t,\, x(t),\, p(t),\, u(t)) + q(t) = 0, \qquad t \in T, \\ H(t,\, x(t),\, p(t),\, v) + q(t) \leqslant 0 \qquad \text{при} \qquad (t,\, v) \in T \cdot U. \end{gathered} \tag{3}$$

В этом случае набор функций $\gamma = (x(t),\, u(t),\, p(t),\, q(t))$ назовем биэкстремалью системы (1), а пару $(p,\, q)$ — коэкстремалью. (По поводу этих понятий см. [1–4].)

Ясно, что оптимальное решение любой задачи динамической оптимизации в системе (1) (без поточечных фазовых и смешанных ограничений) следует искать среди биэкстремалей системы, удовлетворяющих дополнительно соответствующим краевым условиям. Но это уже будут биэкстремали задачи (соответственно экстремали и коэкстремали задачи). Отметим, что в подобной ситуации биэкстремали иногда называют каноническими экстремалями [5] и даже просто экстремалями [1, 2]. Компоненту $q(t)$ сопряженной системы (2) при этом часто опускают, хотя в задачах с нефиксированными моментами времени её введение эффективно и почти неизбежно (хотя бы в неявной форме). Из (3) следует стандартное условие максимума функции $H$ по $u \in U$, которым можно ограничиться в задачах управления на фиксированном отрезке $T$, что и делается далее. В этой ситуации условия экстремальности в системе (1) принимают вид канонической системы:

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x \tag{4}$$

и условия максимума:

$$u \in U^*(t,x,p). \tag{5}$$

Здесь

$$U^*(t,x,p) = \{u \in U | u \in Arg \max_{u \in U} H(t,x,p,u)\}$$

— множество предэкстремальных управления (предстратегий). Обозначим через $E$ множество троек функций $(x,u,p)$, удовлетворяющих условиям (4), (5) на отрезке времени $T$.

Заметим, что при аналитическом исследовании конкретных задач оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина (ПМП) имеют дело именно с системой (4), (5). Для дальнейшего важно иметь в виду связь системы условий экстремальности с решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана методом характеристик [6, 7] и его версиями при использовании неравенств Гамильтона–Якоби [3, 6, 8–10]. А именно, если в системе (1) рассматривается задача терминального управления со свободным правым концом, то есть при условиях

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) \qquad \text{свободно}, \qquad J(u) = l(x(t_1)) \to \min\,, \tag{6}$$

то имеет место равенство (для простоты считаем, что оптимальное управление существует)

$$\min_{\mathcal{U}} J(u) = \min\{l(x(t_1)) | (x,u,p) \in \mathcal{E}, x(t_0) = x_0, p(t_1) = -l(x(t_1))\}, \quad \mathcal{U} = L_\infty(T,U). \tag{7}$$

Его естественный аналог имеет место и для функции Беллмана семейства задач типа (1), (6) с варьируемой начальной позицией $(t_0,x_0)$. Однако задач оптимального синтеза мы не касаемся.

## II. Монотонные потенциалы канонической системы и их приложения

Перейдем к предлагаемому обобщению методов, основанных на использовании неравенств (и уравнений) Гамильтона–Якоби. Пусть $F$ — множество функций $S(t,x,p) : T \times R^n \times R^n \to R$ непрерывных и гладких по $(x,p)$ при фиксированных $t \in T$ и липшицевых по $t$ при фиксированных $(x,p)$ (тогда функции $S$ суперпозиционно абсолютно непрерывны и даже липшицевы вдоль траекторий $(x,p)$ канонической системы (4)). На таких функциях, которые условимся называть потенциалами, определим оператор $\Gamma[S] = \dot{S}$ полной производной по $t$ в силу системы (4), то есть в краткой записи:

$$\Gamma[S] = S_t + S_x H_p - S_p H_x. \tag{8}$$

При фиксированной $S \in \mathrm{F}$ правая часть есть функция $(t,x,p,u)$ и можно определить функцию (или оператор)

$$\Gamma^*[S] = \max_{u \in U} \Gamma[S] = \max_{u \in U} \dot{S}, \tag{9}$$

если множество $U$ компактно.

По аналогии с [8, 9, 11, 12] введем следующие понятия:

$S$ сильно убывает (относительно системы (4) на множестве $\Omega := T \times R^n \times R^n$), если

$$\Gamma^*[S](t,x,p) \leqslant 0 \text{на} \Omega \tag{10}$$

или

$$\Gamma[S](t,x,p,u) \leqslant 0 \text{на} \Omega \times U; \tag{11}$$

$S$ слабо возрастает, если

$$\Gamma^*[S](t,x,p) \geqslant 0 \text{на} \Omega. \tag{12}$$

Заметим, что $S$ — первый интеграл канонической системы, если $\Gamma[S] \equiv 0$; он относится к сильно убывающим потенциалам. К ним относим и решения уравнения $\Gamma^*[S] = 0$.

Поясним, что если $S$ сильно убывает, то суперпозиция $S(t,\, x(t),\, p(t))$ монотонно не возрастает вдоль любого решения $(x,p)$ системы (4) с графиком в $\Omega$. Предположим, что в системе (1) при любом выборе управления решение существует на $T$, а в системе (4) множество скоростей компактно и выпукло. Тогда если $S$ слабо возрастает, то для любой точки $(t_*,\, x_*,\, p_*) \in \Omega$ существует хотя бы одно правостороннее решение системы (4), начинающееся в этой точке и имеющее график в $\Omega$, вдоль которого $S(t,\, x(t),\, p(t))$ не убывает. Введенное сочетание свойств монотонности потенциалов можно заменить на комбинацию «сильно возрастает — слабо убывает» путем замены оператора $\Gamma^*$ на $\Gamma_*[S] = \min_{u\in U}\Gamma[S]$ и смены знака неравенств на противоположный. Ясно, что эти формальные изменения соответствуют смене знака функции $S \in \mathrm{F}$.

В частном случае — для функций, не зависящих от $p$, — потенциалы переходят в функции типа Ляпунова управляемой системы (1), если их трактовать достаточно широко, как в канонической теории оптимальности Гамильтона–Якоби [3, 9–12]. При этом неравенства (10), (12) трансформируются в стандартные неравенства Гамильтона–Якоби:

$$S_t + \mathcal{H}(t,\, x,\, S_x) \begin{cases} \leqslant 0 & \text{на} \quad \Omega, \\ \geqslant 0 & \text{на} \quad \Omega, \end{cases}$$

где

$$\mathcal{H}(t,x,p) = \max_{u\in U} H(t,x,p,u)$$

— гамильтониан. (В этом контексте отметим, что мы называем систему (4) канонической, а не гамильтоновой, в которую она переходит при замене функции Понтрягина $H$ на $\mathrm{H}$, то есть при выборе управления из (5). Однако это требует нетипичной гладкости гамильтониана.)

Как и в случае стандартных потенциалов (не зависящих от $p$) сильно монотонные функции позволяют получать внешние оценки множества соединимых точек (множества достижимости) канонической системы и оценки снизу целевого функционала задачи оптимизации, следовательно, с их помощью можно получать достаточные условия оптимальности. Напротив, слабо монотонные потенциалы дают внутренние аппроксимации множества соединимых точек системы (4) и оценки сверху целевого функционала. Таким образом, они приспособлены для получения необходимых условий оптимальности, а также методов улучшения неоптимального управления по схеме работ [9, 11, 13], см. также ниже п. 4.

Ограничимся здесь одним из результатов.

Обозначим через $\mathrm{R}_{[a,b]}$ множество точек, соединимых решениями системы (4) на отрезке $[a,b] \subseteq T$, то есть

$$\mathcal{R}_{[a,b]} = \{q := (x(a),\, p(a);\; x(b),\, p(b)) | (x(\cdot),\, p(\cdot)) - \text{решение (4)} \qquad \text{на} \qquad [a,b]\}.$$

**Теорема 1.** Пусть $\Sigma \subset \mathrm{F}$ — произвольное множество сильно убывающих потенциалов. Тогда имеет место включение

$$\mathrm{R}_{[a,b]} \subset E_{[a,b]}(\Sigma),$$

где множество $E_{[a,b]}(\Sigma)$ состоит из векторов $q = (x_a,p_a;x_b,p_b)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$S(b,x_b,p_b) - S(a,x_a,p_a) \leqslant 0 \quad \forall\ S \in \Sigma. \tag{13}$$

Вспоминая равенство (7), сформируем следующую конечномерную задачу оптимизации, вспомогательную (терминальную) по отношению к задаче управления (1), (6):

$$l(x) \to \min; \quad q \in E_T(\Sigma), \tag{14}$$

где множество $E_T(\Sigma)$ соответствует $[a,b] = T$ и учету условия $x(t_0) = x_0$.

**Следствие 1.** а) $\min_{u\in\mathcal{U}} J(u) \geqslant \min_{q\in E_T(\Sigma)} l(x) =: \mu(\Sigma)$;

б) если для управления $\bar{u} \in \mathrm{U}$ и соответствующей траектории $\bar{x}$ найдется такое множество $\Sigma \subset \mathrm{F}$ сильно убывающих потенциалов, что $l(\bar{x}(t_1)) = \mu(\Sigma)$, то $\bar{u}$ — оптимальное управление.

С учетом предваряющих пояснений эти утверждения почти очевидны. Отметим лишь, что при формировании множества $E_T(\Sigma)$ условия трансверсальности для котраекторий не обязательно считать выполненными (соответствующие примеры имеются в [3]).

Следствие 1 распространяет достаточные условия оптимальности с множеством сильно монотонных функций типа Ляпунова на случай потенциалов и формально охватывает их. Хотя к настоящему моменту времени не накоплен достаточный опыт работы по изложенной схеме, представляется, что альтернативные варианты могут не уступать ей в эффективности. Опишем их кратко.

1) Переход к стандартным потенциалам. Если множество $\Sigma$ достаточно богато, то по его функционально независимым наборам из $n$ потенциалов можно построить некоторое множество стандартных сильно монотонных потенциалов (путем ввостановления функции по заданному градиенту) и далее действовать по традиционной схеме. В этом случае оценочное множество (13) и ограничения терминальной задачи (14) будут подмножествами фазового пространства, что более естественно. Например, для управляемых $L$-систем, обладающих набором из $n$ первых интегралов канонической системы (4), линейных относительно импульса $p$, этот путь может оказаться особенно эффектным, и не только для анализа ПМП, приведенного в [14].

2) Множество стандратных потенциалов, построенных по варианту 1), можно использовать в модифицированных условиях оптимальности Каратеодори и Кротова [9, 10], рассматривая соответствующий обобщенный лагранжиан задачи (см. [15] и конструкцию $K$-функций в [16]).

Для иллюстрации рассмотрим элементарный

**Пример 1.** задачи оптимального управления в одномерной $L$-системе:

$$\dot{x} = (x-1)u, \quad u \in [0{,}1], \quad x(0) = 0, \quad J = x^3(1).$$

Условие ПМП таковы: $H = p(x-1)u$,

$$\dot{p} = -pu,\ p(1) = -3x^2(1), \quad p(x-1)u \to \max;\ u \in [0{,}1] \tag{15}$$

(то есть $H_u(x{,}p)u \to \max;\ u \in [0{,}1]$).

Во-первых, заметим, что $\dot{H}_u \equiv 0$, то есть $S^1(x{,}p) = p(x-1)$ — первый потенциал, диктуемый теорией $L$-систем. Он является частным решением неравенства сильной монотонности (11):

$$[(x-1)S_x - pS_p]u \leqslant 0.$$

Но оно имеет, как легко убедиться, с учетом краевых условий еще два решения: $S^2(x) = x$ и $S^3(p) = -p$.

Далее, естественное использование $S^1$ для упрощения ПМП, описанное в [14], предписывает заменить условие максимума из (15) на следующее: $cu \to \max; u \in [0{,}1]$, то есть $u \in \operatorname{sign} c$, где константа $c$ зависит от искомой траектории $(x{,}p)$ через равенство $S^1 = c$. Возникает необходимость перебора вариантов значений $c$ при выполнении условий

$$-3x^2(1)(x(1)-1) = c,\ x(1) \leqslant 0\ (\qquad \text{это дает} \qquad S^2).$$

Отсюда $c \geqslant 0$ и возможны два случая:

(а) $c = 0$, тогда $x(1) = 0$, откуда $p^* \equiv 0$, $x^* \equiv 0$, $u^* \equiv 0$ — особая биэкстремаль задачи;

(б) $c > 0$, тогда $\bar{u} \equiv 1$, $\bar{x}(t) = 1 - e^t$ — неособая экстремаль.

Поскольку задача невыпуклая, то это все, что дает ПМП. Так как оптимальное управление в задаче существует, то очевидно, что $\bar{u}$ — решение задачи. Однако интересно, что дают формальные методы без привлечения теоремы существования.

Покажем, что особое управление $u^* \equiv 0$ не оптимально (заметим, что все локальные условия оптимальности оказываются не эффективными в силу глубокого вырождения этой экстремали). Воспользуемся конструкцией улучшения управления из [9, 11]: так как $S^2$ слабо (и сильно) убывает, то для любой траектории $x(\cdot)$

$x(1) - J(u^*) = x(1) \leqslant 0$ и, следовательно, $x^3(1) - J(u^*) \leqslant 0$, что и требовалось.

Установим теперь оптимальность $\bar{u} \equiv 1$, пользуясь достаточными условиями следствия 1 с учетом замечания 1). Потенциал $S^1$ порождает (из равенства $S_x = p = c/(x-1)$) функцию

$$S(t{,}x) = \ln(1-x)\xi(t),$$

где $\xi(t) > 0$ — произвольная гладкая функция. Для нее (см. (9))

$$\Gamma^*[S] = \max_{u\in U} \dot{S} = \frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)} + 1 = 0,$$

если выбрать $\xi(t) = \xi(0)e^{-t}$, $\xi(0) > 0$. При этой $\xi$ $S(t,x)$ удволетворяет уравнению Гамильтона–Якоби и, следовательно, сильно убывает. Положив теперь в следствии 1 $\Sigma = \{S\}$ — одноэлементное множество, убеждаемся, что $\bar{x}q1$) является решением терминальной задачи (14). Это и означает оптимальность управления $\bar{u}$.

## III. Системы с алгебраической структурой

**Определение 1 [14, 17].** Система с управлением $u^l$ (в (1) $f(t,x,u) = \varphi(x)u$)

$$\dot{x}^k = \sum_{l=1}^{n} \varphi_l^k(x)u^l(t), \qquad k = \overline{1,n}, \tag{16}$$

называется $L$-системой, если для функций $\varphi_l^k(x)$ выполнены условия

$$\det \left\| \varphi_l^k(x) \right\| \neq 0, \tag{17}$$

$$[X_i,X_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k X_k, \quad C_{ij}^k = \text{const}\,, \quad i,\, j,\, k = \overline{1,n}, \tag{18}$$

где обозначено

$$X_l = \sum_{k=1}^{n} \varphi_l^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad l = \overline{1,n}, \tag{19}$$

$[X_i,X_j]$ — коммутатор операторов (19):

$$[X_i,X_j] = \sum_{k=1}^{n} \{X_i\varphi_j^k(x) - X_j\varphi_i^k(x)\} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{20}$$

**Пример 2.** Уравнение Ньютона $m\ddot{s} = u(t) - \beta\dot{s}^2$, определяющее одномерное движение управляемой точки при наличии сопротивления пропорционального квадрату скорости, погружается в $L$-систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x & x^2 \\ 0 & 2 & 2x \\ 0 & 0 & e^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \tag{21}$$

при следующей специализации переменных:

$$x = m\dot{s}, \quad y = -2s\beta/m, \quad u^1 = u(t), \quad u^2 = 0, \quad u^3 = -\beta/(m)^2.$$

Для соответствующих системе (21) операторов (19)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y} + e^y\frac{\partial}{\partial z} \tag{22}$$

выполняется условие (18) с постоянными $C_{12}^1 = 2$, $C_{13}^2 = 1$, $C_{23}^3 = 2$ (здесь и далее приводятся только ненулевые структурные постоянные $C_{ij}^k$, удовлетворяющие условию $i < j$). Третье уравнение в (21) добавлено, чтобы матрица в (21) стала квадратной и для нее были бы справедливы условия (17), (18).

Условия (17), (18) удостоверяют, что операторы (19) могут быть приняты за базис алгебры Ли, которой соответствует просто транзитивная $n$-параметрическая группа:

$$x^k = g^k(x_0^1,\, ...,\, x_0^n,\, v^1,\, ...,\, v^n), \quad k = \overline{1,n}, \tag{23}$$

определенным образом построенная по базисным операторам (19) [14, 20]. Любая пара $\{u(t), T\}$, где $u(t)$ — конкретное подставленное в (15) управление, определяет преобразование пространства $R^n(x)$: сдвиг вдоль решений $x(t)$ начальных точек $x_0 = x(0)$ в конечные $x(T)$. Показывается [19], что для каждой пары $\{u(t), T\}$ найдется набор параметров $v^1$, ..., $v^n$, определяющий при помощи (23) соответствующее паре $\{u(t), T\}$ преобразование сдвига вдоль решений системы. Показывается также [17, 19], что по функциям $\varphi_l^k(x)$, задающим $L$-систему (15), строится система уравнений для нахождения генераторов $n$-параметрической группы симметрий системы (15). Опуская вычисления, приведем уравнения группы симметрий для системы (21):

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \tfrac{x+\tau_1(e^y - xz)}{1-\tau_1 z}, \\ \hat{y} &= y + \tau_2 - 2\ln(1-\tau_1 z), \\ \hat{z} &= \tfrac{z(e^{\tau_2} - \tau_1\tau_2 + \tau_3)}{1-\tau_1 z}. \end{aligned}$$

Каждому набору параметров $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ соответствует замена переменных в (21), не меняющая вид правых частей, и любое решение $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ системы (21) группа переводит в решение $u(t)$, $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$, $\hat{z}(t)$ (функции $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ подставляются в правую часть уравнений группы).

## IV. Классы эквивалентности для $L$-систем

Для $L$-систем справедлив следующий результат, который приведем без доказательства.

**Теорема 2 [14, 20].** Две $L$ -системы: (15) и

$$\dot{z}^k = \sum_{l=1}^{n} \tilde{\varphi}_l^k(z) u^l(t), \qquad k = \overline{1{,}n}, \tag{24}$$

удовлетворяют условиям (17)–(19) с одними и теми же постоянными $C_{ij}^k$ в (18) тогда и только тогда, когда они связаны диффеоморфизмом $z = z(x)$.

Если системы (15), (24), связанные диффеоморфизмом $x \leftrightarrow z$, считать эквивалентными, то каждому классу эквивалентности соответствуют постоянные $C_{ij}^k$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x}^k = \sum_{l=1}^n \varphi_l^k(x) u^l \\ \updownarrow x \leftrightarrow z \\ \dot{z}^k = \sum_{l=1}^n \tilde{\varphi}_l^k(z) u^l \end{array} \right\} \Leftrightarrow \{C_{il}^k\}. \tag{25}$$

Соответствие — взаимно однозначно: по структурным постоянным $C_{ij}^k$ вычисляется некоторый базис $X_1$, ..., $X_n$ алгебры Ли [14, 20], по операторам $X_j$ определяется представитель (15) класса эквивалентности (25) с возможностью диффеоморфизмом перейти к другому представителю. Набор $C_{ij}^k$ являет собой пример инвариантной математической модели динамической системы. По этому набору можно исследовать те свойства системы, которые сохраняются при заменах переменных: управляемость, структура оптимального управления и т.д. Алгебраическая структура, определяемая $C_{ij}^k$, позволяет строить в соответствующем классе эквивалентности (25) представители специального вида: линейного, билинейного, двухуровневого, блочного и т.д.

**Пример 3.** Линейная стационарная (автономная) управляемая система ($A = \|a_l^i\|$, $B = \|b_k^i\|$ — числовые матрицы)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x \in R^n, \qquad u \in R^r, \tag{26}$$

погружается в класс $L$-систем:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^0 \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Ax & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Bu \end{pmatrix} \tag{27}$$

($E$ — единичная матрица) добавлением к (26) верхнего уравнения. Проверка для (27) условия (18) приводит к постоянным в (18): $C_{0k}^l = -a_k^l$, $l{,}k = \overline{1{,}n}$ (нумерация столбцов в (27) и соответствующих операторов в (19) начинается с номера 0). Постоянные $C_{0k}^l = -a_k^l$, $l{,}k = \overline{1{,}n}$, определяют инвариантную модель $\{\ C_{ij}^k\ \}$ соответствующую классу эквивалентности (25), которому принадлежит система (27), то есть в соответствии с теоремой 2 любая, в том числе и нелинейная, неособенная замена переменных в (27) приведет к $L$-системе (24) с таким же, как у (27), набором постоянных $C^l_{0k} = -a^l_k$, $l,k = \overline{1,n}$, в (18). Теорема 2 дает ответ и на вопрос: возможно ли конкретную нелинейную систему заменой переменных привести к линейному виду? Возможна тогда и только тогда, когда система является системой с постоянными $C^l_{0k} = -a^l_k$, $l,k = \overline{1,n}$.

У следующих трех механических систем соответствующие $L$-системы принадлежат одному и тому же классу эквивалентности (25), то есть постоянные $C^k_{ij}$ в (3) у систем совпадают.

**Пример 4.** Одномерному линейному осциллятору

$$\ddot{x} + x = 0 \tag{28}$$

соответствует $L$-система (1) ($x^2 = x$)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^3 & 1 & 0 \\ -x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \tag{29}$$

с постоянными $C^k_{ij}$ в (18):

$$C^3_{12} = 1, \qquad C^2_{13} = -1. \tag{30}$$

**Пример 5.** Тело с неподвижной точкой, с осью динамической симметрии — первой главной осью инерции ($B = C$), с управляющим моментом $M$, направленным по третьей главной оси. Динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{p} = 0, \\ &\dot{q} = \tfrac{B-A}{B} pr, \\ &\dot{r} = \tfrac{A-B}{B} pq + \tfrac{1}{B} M. \end{aligned}$$

Переход на поверхность $p = \text{const}$, выбор масштабов для времени $t \to \alpha t$ и управления $M \to u = \beta M$ приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} &\dot{q} = r, \\ &\dot{r} = -q + u, \end{aligned}$$

которым соответствуют такие же, как в примере 3: $L$-система (29) и постоянные $C^k_{ij}$ (30).

**Пример 6.** Точка движется в плоскости ($x_2$, $x_3$) под действием силы $F$, перпендикулярной скорости $V$. Анализ показывает, что при таком движении скорость $V$ не меняется по величине. Введение переменной $x_1$ — угла между осью $x_2$ и направлением скорости $V$ — и выбор масштабов для $x_2$, $x_3$, $F$ приводит к уравнениям

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \cos x_1 \\ \sin x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x_1 & -\sin x_1 \\ 0 & \sin x_1 & \cos x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Проверка условий (17), (18) показывает, что система (31) есть $L$-система с такими же, как в примерах 3, 4, постоянными (30).

Вследствие теоремы 2 заменой переменных можно добиться совпадения матриц $\left\|\varphi^k_l(x)\right\|$ в правых частях систем (29) и (31), но то, что у систем по-разному специализированы управления $u^i$, приводит к существенным различиям их свойств с точки зрения возможностей управления. Дополнительное требование — одинаковое расположение в пространстве $R^n$ у двух систем множеств $U$ допустимых управлений — приводит к понятию более сильной эквивалентности, чем было определено ранее. Этот аспект в данной работе не затрагивается.

## V. Идентификация алгебраической структуры

Инвариантная модель $\{\ C_{ij}^k\ \}$ есть результат завершения следующего процесса: имеется реальная система с входными переменными — управлениями $u = (u^1, ..., u^n)$ и выходными переменными $x = (x^1, ..., x^n)$, системе сопоставляется математическая модель (15), специальные свойства (17)–(19) которой приводят к взаимно однозначному соответствию (25). $L$-система (15) в приведенном процессе играет промежуточную вспомогательную роль «производителя» структурных постоянных $C_{ij}^k$, и естественно поставить вопрос о нахождении чисел $C_{ij}^k$, экспериментируя с исходной реальной системой. К ответу на вопрос приводит следующая последовательность воздействий на систему. Для нахождения постоянных $C_{\alpha\beta}^k$ с фиксированными нижними индексами $\alpha$ и $\beta$ в $\alpha$-й канал подается единичное воздействие: $u^l = \delta_\alpha^l$. За малое время $\tau$ система из начального состояния $x_0$ переходит в состояние $x_1$. Затем единичное воздействие подается только в $\beta$-й канал: $u^l = \delta_\beta^l$, за то же время $\tau$ происходит переход $x_1 \to x_2$. В течение того же времени $\tau$ подается вход $u^l = -\delta_\alpha^l$, и затем то же время $\tau$ — вход $u^l = -\delta_\beta^l$. Состояние системы возвращается в окрестность начального:

$$x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \approx x_0,$$

но с рассогласованием. На последнем шаге подбирается такой постоянный вход $\tilde{u}$, чтобы система за время $\tilde{\tau} = \tau^2$ осуществила переход $x_0 \to x_4$ за один шаг. Структурные постоянные равны

$$C_{\alpha\beta}^i = \tilde{u}^i. \tag{32}$$

Описанная процедура повторяется для всех пар индексов $\alpha$, $\beta$. К результату (32) приводят прямые вычисления, основанные на системе (15). Представим начальный и конечный этапы:

$$\begin{aligned} x_1^k &= x_0^k + \tau\varphi_\alpha^k(x_0) + \tfrac{1}{2}\tau^2 \textstyle\sum_{l=1}^n \varphi_\alpha^l(x_0)\frac{\partial\varphi_\alpha^k(x_0)}{\partial x^l} + o(\tau^2),\\ &\vdots\\ x_4^k &= x_0^k + \tau^2 \textstyle\sum_{l=1}^n \left(\varphi_\alpha^l \frac{\partial\varphi_\beta^k}{\partial x^l} - \varphi_\beta^l \frac{\partial\varphi_\alpha^k}{\partial x^l}\right)\Big|_{x=x_0} + o(\tau^2) =\\ &= x_0^k + \tau^2 \textstyle\sum_{l=1}^n C_{\alpha\beta}^l \varphi_l^k(x_0) + o(\tau^2), \end{aligned} \tag{33}$$

использовано свойство (18) $L$-системы. С другой стороны:

$$x_4^k = x_0^k + \tilde{\tau}\sum_{l=1}^n \varphi_l^k(x_0)\tilde{u}^l + o(\tilde{\tau}),$$

что с учетом формулы (33), условия (17) и $\tilde{\tau} = \tau^2$ с точностью до $o(\tau^2)$ определяет результат (32).

**Замечание 1.** Формула (32) асимптотически — при $\tau \to 0$ — точна.

**Замечание 2.** Приведенная процедура носит инвариантный характер: в каких бы переменных $x$ не измерялся выход, результат (32) один и тот же.

**Замечание 3.** Результат (32) не зависит от начального состояния $x_0$, в окрестности которого проводится процедура.

**Замечание 4.** Пусть система имеет вид (15), выполняется условие (17): $\det\left\|\varphi_l^k(x)\right\| \neq 0$, но не выполняется условие (18), то есть (15) не $L$-система. Определим постоянные $C_{\alpha\beta}^i$ так, чтобы в равенстве (33) совпали коэффициенты при $\tau^2$, а именно:

$$C_{\alpha\beta}^i = \left\{\sum_{k,l=1}^n \left(\varphi_\alpha^l \frac{\partial\varphi_\beta^k}{\partial x^l} - \varphi_\beta^l \frac{\partial\varphi_\alpha^k}{\partial x^l}\right)\psi_k^i\right\}\Bigg|_{x=x_0}, \tag{34}$$

где $\left\|\psi_l^k(x)\right\| = \left\|\varphi_l^k(x)\right\|^{-1}$. Описанная процедура, примененная не к $L$-системе (15), приводит к постоянным, совпадающим с (34). Проверка показывает, что постоянные $C_{\alpha\beta}^i$, определенные формулой (34), удовлетворяют условиям, которым должны удовлетворять структурные постоянные алгебры Ли [20]: антисимметрия по нижним индексам и тождество Якоби. Эта алгебра инвариантно аппроксимирует исходную систему в окрестности выбранного начального положения $x_0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (интеграционный проект СО РАН–УрО РАН № 85), РФФИ (гранты 11-01-00672-a, 10-01-00228) и АВЦП Развитие научного потенциала высшей школы 2009–2010 гг. (проект 2.1. 1/3604).

## VI. Заключение

С целью расширения сферы применимости методов теории управления, связанных с решениями неравенств и уравнения Гамильтона–Якоби, введен новый класс функций типа Ляпунова, зависящих от канонических переменных дифференциальной системы условий экстремальности, и обладающих свойствами сильной и слабой монотонности относительно решений этой системы. Предлагаются способы использования этого класса функций для решения позиционных и оптимизационных задач управления. Обсуждена также возможность выявления структурных постоянных алгебры Ли, моделирующей управляемый процесс.

### Литература

**1.** *Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А.* Необходимое условие в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1990. — 319 с.

**2.** *Milyutin A.A., Osmolovskii N.P.* Calculus of variations and optimal control // American Math. Society, Providence. Rhode, Island. 1998. — 372 p.

**3.** *Дыхта В.А.* Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Итоги науки и техники. Совр. математика и ее приложения. — 2006. — Т. 110. — С. 76–108.

**4.** *Антипина Н.В., Дыхта В.А.* Линейные функции Ляпунова–Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума // Изв. вузов. Математика. — 2002. — № 12. — С. 11–21.

**5.** *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 429 с.

**6.** *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 336 с.

**7.** *Bardi M., Capuzzo–Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. — Boston: Birkhäuser, 1997. — 570 p.

**8.** *Clarke F.H., Ledyaev Yu. S., Stern R.J., Wolenski P.R.* Nonsmooth Analysis and Control Theory. — New York: Springer–Verlag, 1998. — (Grad. Texts in Math.; V. 178).

**9.** *Дыхта В.А.* Неравенства Гамильтона–Якоби в оптимальном управлении: гладкая двойственность и улучшение // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. — 2010. — Т. 15, вып. 1. — С. 405–426.

**10.** *Dykhta V., Samsonyuk O.* Some applications of Hamilton–Jacobi inequalities for classical and impulsive optimal control problems // European Journal of Control. — 2011. — V. 17, N 1. — P. 55–69.

**11.** *Дыхта В.А.* Некоторые приложения неравенств Гамильтона–Якоби в оптимальном управлении // Изв. ИГУ. Математика. — 2009. — Т. 2. — С. 15–28.

**12.** *Дыхта В.А., Сорокин С.П.* Позиционные решения неравенств Гамильтона–Якоби в задачах управления дискретно-непрерывными системами // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 6. — С. 48–63.

**13.** *Аргучинцев А.В., Дыхта В.А., Срочко В.А.* Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // Изв. вузов. Математика. — 2009. — № 1. — С. 3–43.

**14.** *Яковенко Г.Н.* Теория управления регулярными системами. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 264 с.

**15.** *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973. — 448 с.

**16.** *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 479 с.

**17.** *Яковенко Г.Н.* Симметрии по состоянию в системах с управлением // Прикладная механика и математика: межвед. сб. науч. трудов. — М.: МФТИ, 1992. — С. 155–178.

**18.** *Яковенко Г.Н.* Математическое моделирование эволюционных процессов алгебрами Ли // Труды Международной конференции «Математика. Экономика. Образование. Ряды Фурье и их приложения». Т. 10, вып. 1/ под ред. Б.И. Голубова, И.С. Гудович, И.Я. Новикова. — Воронеж: Воронежский государственный университет, 2002. — С. 101–107.

**19.** *Яковенко Г.Н.* Дифференциальные уравнения с фундаментальными решениями: Софус Ли и другие. — М.: Физматкнига, 2006. — 112 с.

**20.** *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

*Поступила в редакцию 24.05.2011.*