УДК 517.51

Б.И. Голубов[1], *С.С. Волосивец*[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Саратовский государственный университет

Обобщенная весовая интегрируемость мультипликативных преобразований Фурье*

Мультипликативное преобразование Фурье, введенное Н.Я. Виленкиным, задается последовательностью натуральных чисел $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, $p_n \geqslant 2$. В случае $p_n \equiv 2$ оно совпадает с широко известным преобразованием Уолша, имеющим многочисленные приложения в вычислительной математике и теории кодирования. Для ограниченной последовательности $\mathbf{P}$ получены достаточные условия на функции, обеспечивающие весовую интегрируемость их мультипликативных преобразований Фурье на $\mathbb{R}_+$. Некоторые из них неулучшаемы. Доказаны мультипликативные аналоги теорем Харди–Литтлвуда, Зигмунда, Морица, Онневира, М. и Ш. Изуми, а также Алянчича и Томича.

Ключевые слова: мультипликативное преобразование Фурье, мультипликативная свертка, весовая интегрируемость, функция ограниченной s-флуктуации, классы Липшица, монотонная функция.

I. Введение

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая, что $2 \leqslant p_j \leqslant N$, $p_{-j} = p_j$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Положим $m_j = p_1 \ldots p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$ и $m_{-l} = m_l$ при $l \in \mathbb{N}$. Тогда каждому $x \in \mathbb{R}_+$ можно сопоставить разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad 0 \leqslant x_n < p_n, \quad x_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j), \quad |j| \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Здесь в первой сумме из (1) присутствует конечное число слагаемых и разложение определяется однозначно, если для чисел вида $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, брать разложение с конечным числом $x_j \neq 0$. Если $x, y \in \mathbb{R}_+$ записаны в виде (1), то по определению

$$x \ominus y = z = \sum_{j=1}^{\infty} z_{-j} m_{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j}{m_j}, \quad z_j \in \mathbb{Z} \cap [0, p_j), \quad |j| \in \mathbb{N},$$

где $z_j = x_j - y_j (\mod p_j)$. Аналогично определяется операция $x \oplus y$.

Для $x, y \in \mathbb{R}_+$, записанных в виде (1), определим ядро $\chi(x, y)$ равенством

$$\chi(x, y) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j y_{-j} + x_{-j} y_j}{p_j}\right).$$

Для почти всех пар $(x, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ при фиксированном $y \in \mathbb{R}_+$ имеем равенство $\chi(x \oplus z, y) = \chi(x, y)\chi(z, y)$ и $\chi(x \ominus z, y) = \chi(x, y)\overline{\chi(z, y)}$. Отсюда следует, что $\chi(x, y) = \chi(\{x\}, [y])\chi([x], \{y\})$, где $\{x\}$ — дробная часть x, $[x]$ — целая часть x, и что $\chi(x, y)$ постоянна по x на всех промежутках $I_j^k = [j/m_k, (j+1)/m_k)$ при $0 \leqslant y < m_k$ (см. [2, § 1.5]).

Пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant p < \infty$, состоят из измеримых на $\mathbb{R}_+$ функций, для которых $\left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} < \infty$.

Для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ мультипликативное $\mathbf{P}$-преобразование Фурье (см. [1]) задается формулой $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y)\overline{\chi(x, y)} \, dy$, где правая часть является интегралом Лебега. Для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leqslant 2$, $\mathbf{P}$-преобразование Фурье вводится, как предел $\int_0^a f(y)\overline{\chi(x, y)} \, dy$ в $L^q(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, при $a \to +\infty$. Согласно [2, гл. 6, теорема 6.1.7], имеет место аналог неравенства Хаусдорфа–Юнга $\|\hat{f}\|_q \leqslant \|f\|_p$. Наконец, для убывающей на $\mathbb{R}_+$ к нулю функции f мы определим $\hat{f}(x)$ как несобственный интеграл $\int_0^{\infty} f(y)\overline{\chi(x, y)} \, dy$ (см. [3]).

Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant p < \infty$, тогда $\omega^*(f, \delta)_p := \sup_{0<h<\delta} \|f(\cdot \ominus h) - f(\cdot)\|_p$ и $\omega_n(f)_p := \omega^*(f, 1/m_n)_p$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Аналогично определяется $\omega_n(f)_\infty = \sup_{0<h<1/m_n} \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x \ominus h) - f(x)|$ и $\omega^*(f, \delta)_\infty$. Если $\alpha > 0$ и $\omega_n(f)_p \leqslant C m_n^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то по определению $f \in \mathrm{Lip}^*(\alpha, p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. При $p = \infty$ пишем $f \in \mathrm{Lip}^*(\alpha)$. Для $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$, и $f \in C(\mathbb{R})$ положим

*Работа первого автора поддержана РФФИ, проект 11-01-00321 и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/12136, работа второго автора поддержана программой «Ведущие научные школы РФ» (проект НШ-4383.2010.1).

$\omega(f,\delta)_{L^p} := \sup\limits_{0<h\leqslant\delta} \|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_p$ и $\omega(f,\delta) := := \sup\limits_{0<h<\delta}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x+h)-f(x)|$ соответственно.

Пусть $\xi = \{x_i\}_0^n$ — разбиение $[a,b]$, $|\xi|$ — диаметр разбиения и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда для ограниченной на $\mathbb{R}$ функции f можно определить величину

$$\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup\left\{ \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p} : -\infty < a < b < +\infty, |\xi| \leqslant \delta \right\}.$$

Если $V_p(f) := \sup\limits_{\delta>0} \omega_{1-1/p}(f,\delta) < \infty$, то f называется функцией ограниченной p-вариации на $\mathbb{R}$. Аналогично вводится $\omega_{1-1/p}(f,\delta)_{[a,b]}$ для функций, определенных на $[a,b]$.

Мультипликативной сверткой функций $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ называется $f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(x \ominus t) g(t)\, dt$, если последний интеграл существует. Пусть $osc(f,[a,b)) := \sup\limits_{x,y\in[a,b)} |f(x)-f(y)|$. Будем говорить, что f является функцией ограниченной s-флуктуации на $\mathbb{R}_+$, $1 \leqslant s < \infty$, если

$$\mathcal{F}l_s(f,\mathbb{R}_+) := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} osc^s(f, I_j^{(k)})\right)^{1/s} < \infty.$$

Можно также рассматривать следующий s-флуктуационный модуль непрерывности $V_s(f)_n = \sup\limits_{k\geqslant n} \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} osc^s(f, I_j^{(k)})\right)^{1/s}$. Понятие функций ограниченной s-флуктуации принадлежит К. Оневиру и Д. Ватерману [4], величина $V_s(f)_n$ рассматривалась одним из авторов ([5]).

Будем писать, что неотрицательная функция $\lambda(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ принадлежит классу A_γ, $\gamma \geqslant 1$, если найдется $\kappa_\gamma \geqslant 1$, такое, что

$$\left(\int_{m_n}^{m_{n+1}} \lambda^\gamma(t)\, dt\right)^{1/\gamma} \leqslant \kappa_\gamma m_n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \int_{m_{n-1}}^{m_n} \lambda(t)\, dt,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Из неравенства Гёльдера легко следует, что $A_{\gamma_2} \subset \subset A_{\gamma_1}$ при $1 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \infty$. Ясно, что функция $\lambda(t) = t^\beta$ при $\beta \in \mathbb{R}$ принадлежит всем A_γ, $\gamma > 1$. Более того, любая функция $\lambda(t)$ со свойством

$$\sup\{\lambda(t) : m_n \leqslant t < m_{n+1}\} \leqslant C \inf\{\lambda(t) : m_n \leqslant t < m_{n+1}\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

также принадлежит всем A_γ, $\gamma > 1$. Аналог условия (3) для последовательностей рассматривался П.Л. Ульяновым [6], тогда как аналог условия (2) для последовательностей введен Л. Гоголадзе и Р. Месхия [7] (при $m_n = 2^n$). Само условие (2) при $m_n = 2^n$ применялось Ф. Морицем [8] для изучения весовой интегрируемости обычных преобразований Фурье.

Пусть $F(f)(t)$ — преобразование Фурье для функций f, определенных на прямой. Ф. Мориц [8] установил следующие результаты.

Теорема A. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leqslant 2$, $0 < < r < q$, $1/p + 1/q = 1$, $\lambda \in A_{p/(p-rp+r)}$ (при $m_n = = 2^n$)и $\lambda(-t) = \lambda(t)$. Тогда

$$\int\limits_{|t|\geqslant 2} \lambda(t)|F(f)(t)|^r\, dt \leqslant C \int\limits_1^\infty \lambda(t) t^{-r/q} \omega^r\left(f, \frac{\pi}{t}\right)_{L_p} dt. \quad \square$$

Теорема B. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ такова, что $V_s(f) < \infty$, где $1 < p \leqslant 2$, $0 < s < p$. Если r, q и $\lambda(t)$ такие же, как в теореме A, то

$$\int\limits_{|t|\geqslant 2} \lambda(t)|F(f)(t)|^r\, dt \leqslant C \int\limits_1^\infty \lambda(t) t^{-r} \omega^{r(1-s/p)}\left(\frac{\pi}{t}\right) dt. \quad \square$$

С помощью леммы 4′ (см. ниже) легко установить, что теорема B является следствием теоремы A.

В данной работе мы устанавливаем аналог теоремы A и его неулучшаемость в определенном смысле. Кроме того, мы приводим условия типа Зигмунда, достаточные для весовой интегрируемости преобразований Фурье (мультипликативного и обычного), в которых, помимо ограниченности s-флуктуации или s-вариации, используются условия на интегральный модуль непрерывности. Аналогичный результат для тригонометрических рядов был получен М. и Ш. Изуми [9].

Далее мы изучаем условия интегрируемости преобразования Фурье от сверток. При этом большое внимание уделяется доказательству неулучшаемости этих условий. В случае тригонометрических рядов подобные вопросы изучались М. и Ш. Изуми [10] и К. Оневиром [11], а для мультипликативных систем — К. Оневиром [12] и одним из авторов [13]. Отметим следующий результат из [11].

Теорема C.

1) Если $g, h \in L^p_{2\pi}$, $1 < p \leqslant 2$, $1/p + 1/q = 1$, то ряд из модулей коэффициентов Фурье в степени $q/2$ их 2π-периодической свертки $(g * h)_{2\pi}$ сходится.
2) Для любого $1 < p \leqslant 2$ найдутся $g, h \in \in L^p_{2\pi}$, такие, что ряд из модулей коэффициентов Фурье в любой степени $\beta < q/2$ их 2π-периодической свертки $(g * h)_{2\pi}$ расходится. $\square$

Ниже доказывается аналог теоремы C для мультипликативного **P**-преобразования Фурье (см. теорему 4).

С. Алянчич и М. Томич [14] получили следующий результат.

Теорема D. Пусть коэффициенты Фурье μ_n четной (или нечетной) функции $f \in L^p_{2\pi}$ монотонно убывают. Тогда $n^{1-1/p}\mu_n \leqslant C\omega(f, \pi/2n)_{L^p}$, где $\omega(f,\delta)_{L^p}$ — модуль непрерывности в $L^p_{2\pi}$, $1 < p < \infty$. □

В теореме 6 и следствии 6 мы даем аналогичные оценки для мультипликативного **P**-преобразования Фурье.

Данная работа по тематике примыкает к нашей работе [15], в которой также исследовалась весовая интегрируемость мультипликативных преобразований Фурье.

II. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Пусть $D_y(x) = \int\limits_0^y \chi(x,t)\,dt$. Тогда

1) $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}(x)$, где $n \in \mathbb{Z}$ и X_E — индикатор множества E;
2) $|D_y(x)| \leqslant (N+1)/x$ для всех $x, y > 0$. □

Утверждение 1) хорошо известно (см. [2, § 1.5 и § 1.11]), а утверждение 2) доказано в [3, формула (10)].

Лемма 2. Пусть f не возрастает на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Тогда интеграл $\hat f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(y)\overline{\chi(x,y)}\,dy$ сходится как несобственный интеграл при всех $x > 0$. Если, кроме того, $f(x)x^{1-2/p} \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leqslant 2$, то $\hat f(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$. □

Утверждение леммы 2 доказано в [3, теорема 3].

Лемма 3. Пусть интеграл $\int\limits_0^\infty a(y)\overline{\chi(x,y)}\,dy$, где $a(y) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, сходится всюду на $\mathbb{R}_+$ за исключением не более чем счетного множества точек к функции $f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Тогда

$$a(x) = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{m_n} f(y)\chi(x,y)\,dy$$

п. в. на $\mathbb{R}_+$. □

Лемма 3 установлена В.А. Скворцовым [16].

Лемма 4. Пусть $Fl_s(f,\mathbb{R}_+) < \infty$ и $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, где $1 \leqslant s \leqslant p < \infty$. Тогда $\omega_n(f)_p \leqslant m_n^{-1/p}\omega_n^{1-s/p}(f)_\infty V_n^{s/p}(f)_s$, $n \in \mathbb{Z}_+$. □

Доказательство. Учитывая, что при $x \in I^n_j$, $h \in I^n_0$, имеем $x \ominus h \in I^n_j$, получаем

$$\omega_n(f)_p = \sup_{0<h<\frac{1}{m_n}} \left(\sum_{j=0}^\infty \int\limits_{I^n_j} |f(x\ominus h) - f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<h<\frac{1}{m_n}} \left(\sum_{j=0}^\infty \omega_n^{p-s}(f)_\infty \int\limits_{I^n_j} |f(x\ominus h) - f(x)|^s\,dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<h<1/m_n} (\omega_n(f)_\infty)^{1-s/p} \left(m_n^{-1} \sum_{j=0}^\infty osc^s(f, I^n_j) \right)^{1/p} = m_n^{-1/p}(\omega_n(f)_\infty)^{1-s/p} V_n^{s/p}(f)_s$$

при всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Здесь важно, что для функций ограниченной s-флуктуации модуль непрерывности $\omega_n(f)_\infty$ конечен, хотя и может не стремиться к 0. Лемма доказана.

Лемма 4′. Пусть $1 \leqslant s \leqslant p < \infty$ и $V_s(f) < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$. Тогда

$$\omega(f,\delta)_{L_p} \leqslant \delta^{1/p}\omega^{s/p}_{1-1/s}(f,\delta)(\omega(f,\delta)_\infty)^{1-s/p}.$$

Доказательство. Пусть $w(x,y) = \omega^s_{1-1/s}(f,h)_{[x,y]}$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} w(x,x+h)\omega^{p-s}(f,h)\,dx = \omega^{p-s}(f,h) \lim_{M,N\to+\infty} \int\limits_{-M}^N w(x,x+h)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \omega^{p-s}(f,h) \lim_{M,N\to+\infty} \int\limits_{-M}^N (w(-M,x+h) - w(-M,x))\,dx =$$

$$= \omega^{p-s}(f,h) \lim_{M,N\to+\infty} \left(\int\limits_N^{N+h} w(-M,x)\,dx - \int\limits_{-M}^{-M+h} w(-M,x)\,dx \right) \leqslant$$

$$\leqslant \omega^{p-s}(f,h) h \lim_{M,N\to+\infty} w(-M,N+h) = h\omega^{p-s}(f,h)\omega^s_{1-1/s}(f,h).$$

Здесь использован легко проверяемый факт: $w(x,y) \geqslant w(x,z) + w(z,y)$ при $x \leqslant z \leqslant y$. Переходя к sup по $h \leqslant \delta$ и возводя в степень $1/p$, получаем нужное неравенство. Лемма доказана.

Замечание 1. Неравенство $\omega(f,\delta)_{L^p} \leqslant \delta^{1/p}V_p(f)$ для периодических функций было доказано Л. Юнгом [17].

Лемма 5. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $g \in L^q(\mathbb{R}_+)$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ и $1/r = 1/p + 1/q - 1 > 0$. Тогда мультипликативная свертка $f * g$ существует как элемент $L^r(\mathbb{R}_+)$ и $\|f*g\|_r \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$. □

Эта лемма является мультипликативным аналогом теоремы Юнга и ее доказательство проводится аналогично [18, с. 176] с помощью неравенств Минковского и Гёльдера, а также теоремы Рисса–Торина.

III. Основные результаты

Теорема 1. Пусть $g(x)$ не возрастает на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. Тогда существует $f\in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1<p\leqslant 2$, такая, что $\hat f = g$ п. в. на $\mathbb{R}_+$, в том и только том случае, когда $g(x)x^{1-2/p}\in L^p(\mathbb{R}_+)$. □

Доказательство. Пусть $g(x)x^{1-2/p}\in L^p(\mathbb{R}_+)$. По лемме 2 $g_1(x):=\hat g(x)\in L^p(\mathbb{R}_+)$ существует как несобственный интеграл при $x>0$ и при этом $g_1\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. По лемме 3 имеем $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^{m_n} g_1(y)\chi(x,y)\,dy$ п. в. на $\mathbb{R}_+$. Но $\|\hat g_1 - \int\limits_0^{m_n} g_1(t)\overline{\chi(\cdot,t)}\,dt\|_{L^q[0,m_k)}\to 0$ при $n\to\infty$ для любого $k\in\mathbb{Z}$. По теореме Ф. Рисса о сходящейся почти всюду подпоследовательности [19, § 13] найдется $\{m_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, такая, что $\int\limits_0^{m_{n_i}} g_1(t)\overline{\chi(\cdot,t)}\,dt\to\hat g_1$ п. в. при $i\to\infty$ на $[0,m_k)$. Значит, для любого $k\in\mathbb{Z}$ $g(x)=\hat g_1(x)$ п. в. на $[0,m_k)$ и, стало быть, это равенство верно п. в. на $\mathbb{R}_+$. Обратное утверждение вытекает из теоремы 2 из [3]. Теорема доказана.

Замечание 2. Для косинус-преобразования Фурье подобный результат принадлежит Харди и Литтлвуду (см. [20, глава 4, теорема 82]).

Следующая теорема 2 является аналогом теоремы А.

Теорема 2.

1) Пусть $f\in L^p(\mathbb{R})$, $1<p\leqslant 2$, $1/p+1/q=1$, $\lambda\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $\beta_n=\int\limits_{m_{n-1}}^{m_n}\lambda(t)\,dt$. Если $\lambda\in A_{p/(p-rp+r)}$ для некоторого $r\in(0,q)$, $\lambda\in L^{q/(q-r)}[0,1)$ и сходится интеграл
$$\int\limits_1^\infty \lambda(t)t^{-r/q}(\omega^*(f,1/t)_p)^r\,dt \tag{4}$$
или ряд
$$\sum_{n=0}^\infty \omega_n^r(f)_p\beta_n m_n^{-r/q}, \tag{5}$$
то $\lambda(t)|\hat f(t)|^r\in L^1(\mathbb{R}_+)$.

2) Пусть $1<p\leqslant 2$, $1/p+1/q=1$, $0<r<q$. Если убывающая к нулю последовательность $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ такова, что ряд (5) расходится и выполнено условие Бари:
$$\sum_{k=n}^\infty \omega_k = O(\omega_n), \tag{6}$$
то найдется $f_0\in L^p(\mathbb{R}_+)$, такая, что $\omega_n(f_0)_p\leqslant C\omega_n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, но интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}_+}\lambda(t)|\hat f_0(t)|^r\,dt$ расходится. □

Доказательство. 1) Ясно, что
$$\int\limits_1^\infty \lambda(t)t^{-r/q}(\omega^*(f,1/t)_p)^r\,dt = \sum_{n=1}^\infty\int\limits_{m_{n-1}}^{m_n}\lambda(t)t^{-r/q}(\omega^*(f,1/t)_p)^r\,dt \geqslant \sum_{n=1}^\infty \beta_n m_n^{-r/q}\omega_n^r(f)_p.$$
С другой стороны, как указано во введении, $A_\gamma\subset A_1$ при $\gamma\geqslant 1$. Следовательно, учитывая, что $\gamma_0:=p/(p-pr+r)=q/(q-r)>1$ и $\lambda\in A_{\gamma_0}$, имеем $\int\limits_{m_n}^{m_{n+1}}\lambda(t)\,dt\leqslant C_1\int\limits_{m_{n-1}}^{m_n}\lambda(t)\,dt$, $n\in\mathbb{Z}$. Поэтому
$$\int\limits_1^\infty \lambda(t)t^{-r/q}(\omega^*(f,1/t)_p)^r\,dt = \sum_{n=0}^\infty\int\limits_{m_n}^{m_{n+1}}\lambda(t)t^{-r/q}(\omega^*(f,1/t)_p)^r\,dt \leqslant C_2\sum_{n=0}^\infty m_n^{-r/q}\omega_n^r(f)_p\int\limits_{m_n}^{m_{n+1}}\lambda(t)\,dt \leqslant C_3\sum_{n=0}^\infty m_n^{-r/q}\omega_n^r(f)_p\beta_n.$$
Таким образом, интеграл (4) и ряд (5) сходятся одновременно. Как отмечалось ранее, $\chi(x,h)$ постоянна на $[0,m_n)$, как функция x при $h=1/m_{n+1}\in[0,1/m_n)$. Кроме того, мультипликативное преобразование Фурье функции $f(\cdot\ominus h)$ имеет вид $\widehat{f(\cdot\ominus h))}(x)=\hat f(x)\overline{\chi(x,h)}$. Поэтому согласно аналогу неравенства Хаусдорфа–Юнга (см. [2, гл. 6, теорема 6.1.7]) имеем
$$\int\limits_{m_n}^{m_{n+1}}|\hat f(x)|^q|1-\overline{\chi(x,1/m_{n+1})}|^q\,dx \leqslant \|f(x\ominus 1/m_{n+1})-f(x)\|_p^q\leqslant\omega_n^q(f)_p. \tag{6'}$$
Если $x\in[lm_n,(l+1)m_n)$, где $l=1,2,\ldots,p_{n+1}-1$, то $|1-\overline{\chi(x,1/m_{n+1})}|=|1-\exp(2\pi il/p_{n+1})|\geqslant 2\sin(\pi/N)$, поскольку $p_n\leqslant N$ при $n\in\mathbb{N}$. Таким образом, $\int\limits_{m_n}^{m_{n+1}}|\hat f(x)|^q\,dx\leqslant C_4\omega_n^q(f)_p$ и
$$\int\limits_{m_n}^{m_{n+1}}|\hat f(x)|^r\lambda(x)\,dx\leqslant \left(\int\limits_{m_n}^{m_{n+1}}|\hat f(x)|^q\,dx\right)^{r/q}\left(\int\limits_{m_n}^{m_{n+1}}\lambda(x)^{q/(q-r)}\,dx\right)^{1-r/q}\leqslant C_5\omega_n^r(f)_p m_n^{-1+(q-r)/q}\int\limits_{m_{n-1}}^{m_n}\lambda(x)\,dx=$$

$$= C_5\omega_n^r(f)_p m_n^{-r/q}\beta_n. \quad (7)$$

Здесь использовано равенство $q/(q-r) = p/(p-rp+r)$ и условие $\lambda \in A_{p/(p-rp+r)}$. Суммируя неравенства (7) по $n \geqslant 0$, заключаем, что интеграл $\int\limits_1^\infty |\hat f(x)|^r\lambda(x)\,dx$ сходится. Сходимость $\int\limits_0^1 |\hat f(x)|^r\lambda(x)\,dx$ следует из неравенства Гёльдера и условия $\lambda \in L^{q/(q-r)}[0,1)$.

2) Пусть $f_0 = \sum\limits_{k=0}^\infty \omega_k m_k^{-1/q}(D_{m_k+1} - D_{m_k})$. Тогда в силу леммы 1 имеем $\|D_{m_{k+1}} - D_{m_k}\|_p = O(m_k^{1-1/p})$ и $\omega_n(D_{m_{k+1}} - D_{m_k})_p = 0$ при $k<n$. Поэтому в силу условия (6) имеем

$$\omega_n(f_0)_p \leqslant \sum_{k=n}^\infty \omega_k m_k^{-1/q}\omega_n(D_{m_{k+1}} - D_{m_k})_p \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n}^\infty \omega_k m_k^{-1/q} 2\|D_{m_{k+1}} - D_{m_k}\|_p \leqslant$$
$$\leqslant C_6\sum_{k=n}^\infty \omega_k \leqslant C_7\omega_n.$$

С другой стороны, поскольку $\hat D_{m_n}(x) = X_{[0,m_n)}(x)$, то $\hat f_0(x) = \sum\limits_{n=0}^\infty \omega_n m_n^{-1/q}X_{[m_n,m_{n+1})}$ и поскольку $\{\omega_n^r m_n^{-r/q}\}_{n=0}^\infty$ убывает,

$$\int\limits_1^\infty |\hat f_0(x)|^r\lambda(x)\,dx = \sum_{n=0}^\infty \omega_n^r m_n^{-r/q}\int\limits_{m_n}^{m_{n+1}}\lambda(t)\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{n=1}^\infty \omega_n^r m_n^{-r/q}\int\limits_{m_{n-1}}^{m_n}\lambda(t)\,dt = \sum_{n=1}^\infty \omega_n^r m_n^{-r/q}\beta_n = \infty.$$

Теорема доказана.

Следствие 1 является аналогом теоремы B для **P**-преобразования Фурье.

Следствие 1. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leqslant 2$, и $\mathcal{F}l_s(f,\mathbb{R}_+) < \infty$, где $0 < s \leqslant p$. Если $\lambda \in A_{p/(p-rp+r)}$ и $\lambda \in L^{q/(q-r)}[0,1)$, где $0 < r < q$, $1/p+1/q = 1$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^\infty (\omega_n(f)_\infty)^{r(1-s/p)}\beta_n m_n^{-r}(V_n(f)_s)^{rs/p}$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty |\hat f(x)|^r\lambda(t)\,dt$. □

Утверждение следствия вытекает из теоремы 2 и леммы 4.

Следствие 2. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leqslant 2$, $\mathcal{F}l_p(f,\mathbb{R}_+) < \infty$ и λ такое же, как в следствии 1. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^\infty \beta_n m_n^{-r}$ вытекает конечность интеграла $\int\limits_0^\infty |\hat f(x)|^r\lambda(t)\,dt$. □

Следствие 3. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leqslant 2$, и $\mathcal{F}l_s(f,\mathbb{R}_+) < \infty$, где $0 < s \leqslant p$ и $f \in \mathrm{Lip}^*(\alpha)$. Тогда $\hat f \in L^r(\mathbb{R}_+)$ при $p/(p+\alpha(p-s)) < r < q$, $1/p+1/q = 1$. □

Следствие 4. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)\cap \mathrm{Lip}^*(\alpha)$, $1 < p \leqslant 2$, причем $\mathcal{F}l_1(f,\mathbb{R}_+) < \infty$, то $\hat f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ при всех $\alpha > 0$. □

Следствие 4 является аналогом классической теоремы Зигмунда об абсолютной сходимости тригонометрического ряда Фурье (см. [21, глава 6, теорема 3.13] при $\beta = 1$).

Утверждение 1. Теорема B является следствием теоремы A. □

Доказательство утверждения 1 аналогично доказательству следствия 1 с использованием леммы $4'$.

Теорема 3 при $\lambda(t) \equiv 1$ является аналогом теоремы М. и Ш. Изуми [9] об абсолютной сходимости рядов Фурье.

Теорема 3. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leqslant s < 2p$, $1/p + 1/q = 1$, $0 < r < 2$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{F}l_s(f,\mathbb{R}_+) < \infty$ и $\lambda(t) \in A_{2/(2-r)} \cap L^{2/(2-r)}[0,1)$. Если

$$\sum_{k=0}^\infty \beta_k m_k^{-r/2-r/p}(\omega_k(f)_{s+(2-s)q})^{r-sr/2p}V_k^{rs/2p}(f)_s < \\ < \infty,$$

то $\int\limits_0^\infty |\hat f(x)|^r\lambda(t)\,dt < \infty$. □

Доказательство. Аналогично доказательству неравенства $(6')$ имеем

$$\left(\int\limits_{m_k}^{m_{k+1}} |\hat f(t)|^2\,dt\right)^p \leqslant$$
$$\leqslant C_1\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} |f(t\oplus 1/m_{k+1}) - f(t)|^2\,dt\right)^p =$$
$$= C_1 m_k^{-1}\sum_{i=0}^{m_k-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+}\left|f\left(t\oplus\frac{i}{m_k}\oplus\frac{1}{m_{k+1}}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -f\left(t\oplus\frac{i}{m_k}\right)\right|^2 dt\right)^p.$$

Пользуясь равенством $2 = s/p + ((2-s)q+s)/q$ и применяя интегральное неравенство Гёльдера с показателями p и q, получаем

$$\left(\int\limits_{m_k}^{m_{k+1}} |\hat f(t)|^2\,dt\right)^p \leqslant$$
$$\leqslant C_1 m_k^{-1}\sum_{j=0}^{m_k-1}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\left|f\left(t\oplus\frac{jp_{k+1}+1}{m_{k+1}}\right) - f\left(t\oplus\frac{j}{m_k}\right)\right|^s dt\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+} |f(t\oplus(jp_{k+1}+1)/m_{k+1}) - \right.$$
$$\left. -f(t\oplus j/m_k)|^{s+(2-s)q}\,dt\right)^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 m_k^{-1}\omega_k^{2p-s}(f)_{s_1}\times \times\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{m_k-1}\sum_{l=0}^{\infty}\left|f\left(t\oplus l\oplus\frac{jp_{k+1}+1}{m_{k+1}}\right)- -f\left(t\oplus l\oplus\frac{j}{m_k}\right)\right|^s dt\leqslant \leqslant C_1 m_k^{-1}\omega_k^{2p-s}(f)_{s_1}V_k^s(f)_s,$$

где $s_1 = s + (2-s)p$ и $p-1 = (2p-s)/(s+(2-s)q)$. Используя полученную оценку и условие $\lambda\in A_{2/(2-r)}$, находим что

$$\int\limits_{m_k}^{m_{k+1}}\lambda(t)|\hat f(t)|^r\,dt\leqslant \leqslant\left(\int\limits_{m_k}^{m_{k+1}}|\hat f(t)|^2\,dt\right)^{r/2}\left(\int\limits_{m_k}^{m_{k+1}}\lambda(t)^{2/(2-r)}\,dt\right)^{1-r/2}\leqslant \leqslant C_2\left(m_k^{-1/p}\omega_k^{2-s/p}(f)_{s_1}V_k^{s/p}(f)_s\right)^{r/2}m^{-r/2}\beta_k = = C_2 m_k^{-r/2p-r/2}\omega_k^{r-sr/2p}(f)_{s_1}V_k^{sr/2p}(f)_s\beta_k. \quad (8)$$

Складывая неравенства (8) по $k\geqslant 0$, получаем

$$\int\limits_1^{\infty}\lambda(t)|\hat f(t)|^r\,dt\leqslant \leqslant C_2\sum_{k=0}^{\infty}m_k^{-r/2p-r/2}\omega_k^{r-sr/2p}(f)_{s_1}V_k^{sr/2p}(f)_s\beta_k < <\infty. \quad (8')$$

По неравенству Гельдера в силу условия $\lambda(t)\in L^{2/(2-r}[0,1)$ имеем $\lambda(t)|\hat f(t)|^r\in L[0,1)$, откуда и из $(8')$ следует утверждение теоремы.

Теперь приведем два утверждения, относящихся к преобразованиям Фурье сверток. Теорема 4 является аналогом теорем 4 и 5 из [11] для тригонометрических рядов.

Теорема 4.

а) Пусть $g,h\in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1\leqslant p\leqslant 4/3$, $1/p+1/q=1$, $f=g*h$. Тогда $\hat f\in L^{q/2}(\mathbb{R}_+)$.

б) Если $1<p\leqslant 4/3$, $1/p+1/q=1$, то существуют $g,h\in L^p(\mathbb{R}_+)$, такие, что для $f=g*h$ имеем $\hat f\notin L^{\gamma}(\mathbb{R}_+)$ при всех $r\in(0,q/2)$. □

Доказательство. а) При $1\leqslant p\leqslant 4/3$ число r, определяемое равенством $1/r=2/p-1$ (т.е. $r=p/(2-p)$), принадлежит $[1,2]$. Согласно лемме 5 в этом случае $f=g*h\in L^r(\mathbb{R}_+)$ и можно говорить об $\hat f$ в обычном смысле. Известно, что для $\phi,\psi\in L^1(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенство $(\phi*\psi)\hat{}=\hat\phi\hat\psi$ всюду на $\mathbb{R}_+$ (см. [2, гл. 6, теорема 6.1.4]). При этом если $g_n,h_n\in L^1(\mathbb{R}_+)\cap L^p(\mathbb{R}_+)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|g-g_n\|_p = \lim\limits_{n\to\infty}\|h-h_n\|_p=0$, то по аналогу неравенства Хаусдорфа–Юнга $\lim\limits_{n\to\infty}\|\hat g-\hat g_n\|_q=\lim\limits_{n\to\infty}\|\hat h-\hat h_n\|_q = 0$. Поскольку $g_n*h_n\to g*h=f$ в L^r, то аналогично $\lim\limits_{n\to\infty}\|\hat h_n*\hat g_n-\hat f\|_{r'}=0$, $1/r+1/r'=1$. Находя по теореме Рисса [19, §13] подпоследовательности h_{n_k},g_{n_k}, такие, что $\hat h_{n_k}(x)\to\hat h(x)$ и $\hat g_{n_k}\to\hat g(x)$ п.в., выделяем из нее, в свою очередь подподследовательности h_{l_k},g_{l_k}, такие, что $\hat h_{l_k}(x)\hat g_{l_k}(x)\to\hat f(x)$ п.в. Отсюда следует, что $\hat h(x)\hat g(x)=\hat f(x)$ п.в. Теперь по неравенству Коши–Буняковского получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+}|\hat f(x)|^{q/2}\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}_+}|\hat h(x)\hat g(x)|^{q/2}\,dx\leqslant \leqslant\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+}|\hat h(x)|^q\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+}|\hat g(x)|^q\,dx\right)^{1/2}<\infty.$$

б) Пусть $g_1(x)=h_1(x)=x^{-1/q}(\log_2 x+1)^{-1}$ на $[1,+\infty)$ и $g_1(x)=h_1(x)=1$ на $[0,1]$. Тогда $g_1^p(x)x^{p-2}=x^{-1}(\log_2 x+1)^{-p}$ при $x\geqslant 1$ и $g_1^p(x)x^{p-2}=x^{p-2}$ на $(0,1]$, так что $g_1^p(x)x^{p-2}\in L^1(\mathbb{R}_+)$ и по теореме 1 найдутся $g(x)$, $h(x)\in L^p(\mathbb{R}_+)$, для которых $g=\hat g_1$, $h=\hat h_1$. При $r<q/2$ имеем $((g*h)\hat{}(x))^r=(g_1(x)h_1(x))^r = x^{-2r/q}(\log_2 x+1)^{-r}\notin L^1[1,\infty)$, так что g, h — искомые функции. Теорема доказана.

Теорема 5.

а) Пусть $1\leqslant p\leqslant 2$, $1<q\leqslant 2$, $1/p+1/q\geqslant 3/2$, $\alpha>0$. Если $g\in \mathrm{Lip}^*(\alpha,p)$, $h\in L^q(\mathbb{R}_+)$ и $f=g*h$, то $\hat f\in L^{\beta}(\mathbb{R}_+)$, $pq/(\alpha pq+2pq-p-q)<\beta<pq/(2pq-p-q)$.

б) Пусть $1\leqslant p\leqslant 2$, $1<q\leqslant 2$, $\alpha>0$, $3/2\leqslant 1/p+1/q<\alpha+2-1/q$. Тогда существуют $g\in\mathrm{Lip}^*(\alpha,p)$ и $h\in L^q(\mathbb{R}_+)$, такие что $(g*h)\hat{}\notin L^{\beta_0}(\mathbb{R}_+)$, $\beta_0=pq/(\alpha pq+2pq-p-q)$).□

Доказательство.

а) Применяя лемму 5, находим что $g*h\in L^r$, где $1<r\leqslant 2$ и $1/r=1p+1/q-1$, т.е. $r=pq/(p-pq+q)$, причем аналогично доказательству теоремы 4 $\hat h(x)\hat g(x)=\hat f(x)$. Также по лемме 5 получаем $\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_r\leqslant\|g(\cdot+h)-g(\cdot)\|_p\|h\|_q\leqslant C_1 m_n^{-\alpha}$, если $0<h\leqslant 1/m_n$ и $g\in\mathrm{Lip}^*(\alpha,p)$. Применяя теорему 2 при $\lambda=1$, имеем $\hat f\in L^{\beta}(\mathbb{R}_+)$ при условии $1-\beta\alpha-\beta/r'<0$, которое обеспечивает сходимость ряда (5). Из неравенства $\beta>1/(\alpha+1/r')$ легко получаем $\beta>pq/(\alpha pq+2pq-p-q)$, и утверждение а) теоремы доказано.

б) Пусть $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}m_n^{-\alpha+1/p-1}(D_{m_n}(x)-D_{m_{n-1}}(x))$. Тогда при $0<h<1/m_k$ верно равенство $D_{m_n}(x\oplus h)=D_{m_n}(x)$ и, как следствие,

$$\omega_k(g)_p\leqslant\sum_{n=k}^{\infty}m_n^{-\alpha+1/p-1}\|D_{m_n}-D_{m_{n-1}}\|_p\leqslant \leqslant C_2\sum_{n=k}^{\infty}m_n^{-\alpha}=C_3 m_k^{-\alpha}.$$

Следовательно, $g \in \mathrm{Lip}^*(\alpha, p)$. При этом $\hat{D}_{m_n} = X_{[0,m_n)}$, поэтому

$$\hat{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-\alpha+1/p-1} X_{[m_{n-1},m_n)}.$$

Пусть $h_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{-1/q'} n^{-\gamma} X_{[m_{n-1},m_n)}$, $1/q + 1/q' = 1$ и $\gamma q > 1$ при $x \geqslant 1$ и $h_1(x) = 1$ при $x \in [0, 1)$. Тогда $h_1(x)$ убывает и

$$\int_0^\infty h_1^q(x) x^{q-2}\, dx = \int_0^1 x^{q-2}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{1-q} n^{-q} \int_{m_{n-1}}^{m_n} x^{q-2}\, dx \leqslant \leqslant C_3 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-q\gamma}\right) = C_4 < \infty.$$

По теореме 1 существует $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$, такая, что $\hat{h} = h_1$. Наконец,

$$\int_0^\infty |\hat{g}(x)|^{\beta_0} |\hat{h}(x)|_0^\beta\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{(-\alpha+1/p'-1-q-1)\beta_0} n^{-\gamma\beta_0} \int_{m_{n-1}}^{m_n} 1\, dx \geqslant \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-(\alpha+1/r'-1)\beta_0+1} n^{-\gamma\beta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma\beta_0}. \quad (9)$$

Правая часть (9) равна бесконечности, если $\gamma\beta_0 \leqslant 1$. Неравенство $1/\beta_0 > 1/q$ равносильно неравенству $\alpha + 2 - 1/q - 1/p > 1/q$. Таким образом, при выполнении условий пункта б) найдется $\gamma \in (1/q, 1/\beta_0)$ и тогда $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$, но левая часть (9) равна бесконечности. Теорема доказана.

Следствие 5.

а) Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$, $1 < q \leqslant 2$, и $\alpha > 1/p + 1/q - 1$. Если $g \in \mathrm{Lip}^*(\alpha, p)$, $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$, то для $f = g * h$ имеем $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

б) Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$, $1 < q \leqslant 2$, $0 < \alpha = 1/p + 1/q - 1$. Тогда существуют $g \in \mathrm{Lip}^*(\alpha, p)$ и $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$, такие, что $(g * h)\hat{} \notin L^1(\mathbb{R}_+)$. $\square$

Замечание 3. Утверждение пункта а) теоремы 5 и следствие 5 являются аналогами теоремы 6, следствия 5 и теоремы 7 из [12] для мультипликативных систем. Дальнейшие результаты в этом направлении см. в [13].

В заключение получим оценку убывания $\hat{f}(x)$ для $f(x)$ с монотонным преобразованием Фурье.

Теорема 6. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leqslant 2$, такова, что $\hat{f}(x) \geqslant 0$ и $\hat{f}(x) \downarrow$ на $(0, \infty)$. Тогда при $x \in [m_n, m_{n+1})$, $n \geqslant 1$ имеем

$$\hat{f}(x) \leqslant C m_n^{1/p-1} \omega_{n-1}(f)_p, \quad n \in \mathbb{N}. \quad \square \ (10)$$

Доказательство. Снова отметим, что $(f(\cdot \oplus 1/m_{n+1}) - f(\cdot))\hat{}(x) = \hat{f}(x)(\chi(x, 1/m_{n+1}) - 1)$. Если $x \in [m_n, 2m_n)$, то $\chi(x, 1/m_{n+1}) = \exp(2\pi i/p_{n+1}) = \cos(2\pi/p_{n+1}) + i \sin(2\pi/p_{n+1})$. Известно, что для $f, g \in L_p(\mathbb{R}_+)$ верно равенство $\mathrm{int}_{\mathbb{R}_+} \hat{f}(x) g(x)\, dx = \mathrm{int}_{\mathbb{R}_+} f(x) \hat{g}(x)\, dx$ (см. [22]). Поэтому

$$\left|\int_{m_n}^{m_{n+1}} \hat{f}(x)(\chi(x, 1/m_{n+1}) - 1)\, dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}_+} (f(x \oplus 1/m_{n+1}) - f(x)) \times (D_{m_{n+1}}(x) - D_{m_n}(x))\, dx\right|$$

и

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{p_{n+1}} \int_{m_n}^{m_{n+1}} \hat{f}(x)\, dx \leqslant \left|\int_{m_n}^{m_{n+1}} \hat{f}(x)(\chi(x, 1/m_{n+1}) - 1)\, dx\right| \leqslant \leqslant \|f(\cdot \oplus 1/m_{n+1}) - f(\cdot)\|_p \|D_{m_{n+1}} - D_{m_n}\|_q,$$

где $1/p + 1/q = 1$. В результате находим, что $m_n \hat{f}(m_{n+1}) \leqslant C m_n^{1-1/q} \omega_n(f)_p$, откуда в силу монотонности $\hat{f}(x)$ и ограниченности $\{p_i\}_{i=1}^\infty$ получаем неравенство теоремы.

Следствие 6. Пусть f удовлетворяет условиям теоремы 6 и $\omega^*(f, \delta) \leqslant \omega(\delta)$, где $\omega(\delta)$ удовлетворяет Δ_2-условию $\omega(2\delta) \leqslant C_1 \omega(\delta)$, $\delta \geqslant 0$. Тогда $\hat{f}(x) \leqslant C_2 x^{1/p-1} \omega(1/x)$. $\square$

Доказательство использует результат теоремы 6 и оценку

$$\omega^*(f, 1/m_n) \leqslant \omega(1/m_n) = \omega(p_n/m_{n+1}) \leqslant \leqslant C_1^{[log_2 p_{n+1}]+1} \omega(1/m_{n+1}).$$

Теорема 6 и следствие 6 являются аналогами теоремы D.

Литература

1. *Виленкин Н.Я.* К теории интегралов Фурье на топологических группах // Мат. сб. – 1952. – Т. 30, № 2. – С. 233–244.

2. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. – М.: Наука, 1987.

3. *Golubov B.I., Volosivets S.S.* On the integrability and uniform convergence of multiplicative Fourier transform // Georgian Math. J. – 2009. – V. 16, N 3. – P. 533–546.

4. *Onneweer C., Waterman D.* Uniform convergence of Fourier series on groups // Mich. J. Math. – 1971. – V. 18, N 3. – P. 265–273.

5. *Волосивец С.С.* Приближение функций ограниченной p-флуктуации полиномами по мультипликативным системам // Anal. Math. – 1995. – V. 21, N 1. – P. 61–77.

6. *Ульянов П.Л.* О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – Т. 28, № 4. – С. 925–950.

7. *Gogoladze L., Meskhia R.* On the absolute convergence of trigonometric Fourier series // Proc. Razmazde Math. Inst. – 2006. – V. 141. – P. 29–40.

8. *Moricz F.* Sufficient conditions for the Lebesgue integrability of Fourier transforms // Anal. Math. – 2010. – V. 36, N 2. – P. 121–129.

9. *Izumi M., Izumi S.* On absolute convergence of Fourier series // Arkiv. Mat. – 1967. – V. 7, N 12. – P. 177–184.

10. *Izumi M., Izumi S.* Absolute convergence of Fourier series of convolution function // J. Approx. Theory. – 1968. – V. 1, N 1. – P. 103–109.

11. *Onneweer C.W.* On absolutely convergent Fourier series // Arkiv. Mat. – 1974. – V. 12, N 1. – P. 51–58.

12. *Onneweer C.W.* Absolute convergence of Fourier series on certain groups // Duke Math. J. – 1974. – V. 41, N 3. – P. 599–610.

13. *Волосивец С.С.* О сходимости рядов из коэффициентов Фурье мультипликативных сверток // Изв. вузов. Матем. – 2008. – № 11. – С. 27–39.

14. *Aljancic S., Tomic M.* Über Stetigkeitsmodul von Fourier-Reihen mit monotonen Koeffizienten // Math. Zeitschrift. – 1965. – V. 88, N 3. – S. 274–284.

15. *Волосивец С.С., Голубов Б.И.* Весовая интегрируемость мультипликативных преобразований Фурье // Тр. МИАН. – 2010. – Т. 269. – С. 71–81.

16. *Скворцов В.А.* Теорема единственности представления функций мультипликативными преобразованиями // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. – 1992. – № 6. – С. 14–18.

17. *Young L.C.* An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration // Acta Math. – 1936. – V. 67. – P. 251–282.

18. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. – М.: Мир, 1985.

19. *Дьяченко М.И., Ульянов П.Л.* Мера и интеграл. – М.: Факториал, 1998.

20. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.: Гостехиздат, 1948.

21. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. – М.: Мир, 1965.

22. *Беспалов М.С.* Операторы мультипликативного преобразования Фурье // Изв. вузов. Матем. – 2006. – № 3. – С. 9–23.

Поступила в редакцию 16.01.2011