УДК 517.987.5

Л. С. Ефремова, А. С. Фильченков

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Топологическая транзитивность косых произведений в плоскости с отрицательным шварцианом семейства отображений в слоях

Выделен класс косых произведений отображений интервала с отрицательным шварцианом семейства отображений в слоях. Доказан критерий различения топологически транзитивных отображений из выделенного класса, основанный на использовании свойства равномерной аппроксимируемости фазового пространства периодическими орбитами. Построен новый пример косого произведения-эндоморфизма в замкнутом прямоугольнике, имеющего аттрактор с непустой внутренностью.

Ключевые слова: косое произведение, топологическая транзитивность, аттрактор.

1. Введение

Свойство топологической транзитивности является основополагающим при исследовании динамических систем (см., например, [1] – [3]). В последнее время активно изучается свойство робастной (т.е. сохраняющейся при малых возмущениях в пространстве рассматриваемых систем) транзитивности на компактных многообразиях без края (см., например, [4]). Изучению некоторых робастных свойств на инвариантных частично гиперболических множествах C^2-диффеоморфизмов, заданных на многообразиях размерности ≥ 3, посвящена статья [5].

Существует обширная библиография, посвященная различным аспектам топологической транзитивности динамических систем класса косых произведений (см., например, [2], [3], [7], [8]).

Настоящая работа является продолжением статей [9] и [10], в которых выделен класс топологически транзитивных косых произведений, заданных на прямоугольнике, и установлена взаимосвязь свойства топологической транзитивности отображения из выделенного класса с наличием всюду плотного (в фазовом пространстве) множества периодических точек. В отличие от традиционно рассматриваемых обратимых динамических систем (см. также [1] – [7]) все отображения из класса, выделенного в данной работе, являются эндоморфизмами (т.е. необратимыми отображениями).

Определение 1.1 [6]. Пусть X — топологическое пространство. Отображение $\varphi : X \to X$ называется топологически транзитивным, если существует такая точка $x_0 \in X$, что её траектория $O_{\varphi}(x) = \varphi^n(x)_{n \in N}$ плотна в X. При этом точка с плотной траекторией называется транзитивной точкой отображения φ.

Напомним, что отображение $\varphi : X \to X$ топологически транзитивно тогда и только тогда, когда для любых двух непустых открытых подмножеств $U, V \subset X$ существует такое натуральное число $n = n(U, V)$, что $V \cap \varphi^n(U) \neq \oslash$ [6].

В данной статье определено понятие шварциана семейства отображений в слоях косого произведения отображений интервала, выделен класс косых произведений в плоскости с отрицательным шварцианом семейства отображений в слоях, доказан критерий различения топологически транзитивных косых произведений из выделенного класса, основанный на использовании свойства равномерной аппроксимируемости фазового пространства (прямоугольника) периодическими орбитами. Полученные результаты позволили также построить новый пример косого произведения-эндоморфизма в замкнутом прямоугольнике, имеющего аттрактор с непустой внутренностью (ср., например, с [11]).

Косым произведением $F: I \to I$, где $I = I_1 \times I_2$, $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, называется отображение вида

$$F(x,\,y) = (f(x),\,g_x(y)), \;\text{ где }\; g_x(y) = g(x,\,y), \tag{1}$$

при этом $f: I_1 \to I_1$ называется фактор-отображением косого произведения F, а отображение $g_x: I_2 \to I_2$ при любом $x \in I_1$ называется отображением, действующим в слое над точкой x.

В силу (1) при любом натуральном n справедливо

$$F^n(x,\,y) = (f^n(x),\,g_{x,\,n}(y)), \;\text{ где }\; g_{x,\,n}(y) = g_{f^{n-1}(x)} \circ \ldots \circ g_{f(x)} \circ g_x\,(y)\,. \tag{2}$$

Символом $\widetilde{g}_x$ будем обозначать отображение $g_{x,n}$, если x – периодическая точка f ($x \in Per(f)$) с (наименьшим) периодом n.

Обозначим через $T^3(I)$ ($T^0(I)$) пространство C^3-гладких (непрерывных) отображений вида (1) с фазовым пространством I, наделённым C^3-нормой (C^0– нормой). В $T^3(I)$ выделим подмножество отображений, удовлетворяющих следующим условиям:
(C.1) *шварциан семейства отображений в слоях, определенный в силу следующего равенства*

$$S\left(g_x(y)\right) = \frac{\frac{\partial^3}{\partial y^3} g_x(y)}{\frac{\partial}{\partial y} g_x(y)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial y^2} g_x(y)}{\frac{\partial}{\partial y} g_x(y)}\right)^2,$$

отрицателен при всех $(x, y) \in I$ *таких, что* $\frac{\partial}{\partial y} g_x(y) \neq 0$;
(C.2) *отображение* $g_x: I_2 \to I_2$ *при любом* $x \in I_1$ *имеет не более одной критической точки в интервале* (a_2, b_2), *причём эта точка неплоская*[1];
(C.3) $g_x\left(\partial(I_2)\right) \subseteq \partial(I_2)$ *при любом* $x \in I_1$, *где* $\partial(I_2)$ *— граница отрезка* I_2.
Обозначим через $T^3_u(I)$ класс отображений из $T^3(I)$, удовлетворяющих условиям (C.1) – (C.3).

В настоящей работе построен пример косого произведения из класса $T^3_u(I)$.

Определим понятие равномерной аппроксимируемости фазового пространства I периодическими орбитами.

Пусть P — произвольное разбиение замкнутого прямоугольника I координатными прямыми на m замкнутых подпрямоугольников J_j, любые два из которых либо не пересекаются, либо имеют общую вершину или общую сторону (при этом $I = \bigcup\limits_{j=1}^{m} J_j$).

Определение 1.2. Будем говорить, что фазовое пространство I отображения F *равномерно аппроксимируется периодическими орбитами*, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого разбиения P прямоугольника I с параметром $\lambda(P) < \varepsilon$ найдётся F-периодическая орбита $Orb_F(x; y)$, пересекающаяся с внутренней частью прямоугольника J_j при каждом $1 \leq j \leq m$.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема A. *Для отображения* $F \in T^3_u(I)$ *следующие утверждения эквивалентны:*
(A.1) F *топологически транзитивно;*
(A.2) *фазовое пространство* I *равномерно аппроксимируется периодическими орбитами косого произведения* F.

Определение 1.3. Правосторонним (левосторонним) неустойчивым многообразием периодической точки x_0 периода n отображения $f: I_1 \to I_1$ называется множество

$$W^u_+(x_0, f^n) = \left\{ x \in I_1 \,\middle|\; \forall\, U^+(x_0) \;\; \exists k \in \mathbf{N} : x \in f^{kn}(U^+(x_0)) \right\},$$

$$\left(W^u_-(x_0, f^n) = \left\{ x \in I_1 \,\middle|\; \forall\, U^-(x_0) \;\; \exists k \in \mathbf{N} : x \in f^{kn}(U^-(x_0)) \right\} \right),$$

[1]Критическая точка c отображения f называется *неплоской*, если существует натуральное число n такое, что производная $f^{(n)}(c) \neq 0$, а $f^{(k)}(c) = 0$ при всех $1 \leq k < n$ [15, гл. 2]

где $U^+(x_0)$ — произвольная правосторонняя окрестность точки x_0 ($U^-(x_0)$ — произвольная левосторонняя окрестность точки x_0).

Введём дополнительное условие:

($C.4$) *у отображения* $F \in T_u^3(I)$ *существует точка* $(x_0, y_0) \in Per(F)$ (*наименьшего*) *периода* n *такая, что*:

a) если $x_0 \in IntI_1$, *то* $W_+^u(x_0, f^k) = I_1$, $W_-^u(x_0, f^k) = I_1$, *где* k — *период точки* x_0 *относительно* f (k — *делитель* n), $Int(\cdot)$ — *внутренность множества*;

b) если $x_0 = a_1$ (*или* $x_0 = b_1$), *тогда* $W_+^u(x_0, f^k) = I_1$ ($W_-^u(x_0, f^k) = I_1$).

Теорема B. *Пусть* $F \in T_u^3(I)$ *удовлетворяет дополнительному условию* ($C.4$). *Тогда каждое из условий* ($A.1$) *и* ($A.2$) *эквивалентно условию:*

($B.1$) *множество* $Per(F)$ *периодических точек отображения* F *всюду плотно в* I.

Сформулированные теоремы проясняют природу топологической транзитивности отображений из $T_u^3(I)$: топологическая транзитивность здесь равносильна возможности равномерно аппроксимировать фазовое пространство рассматриваемой динамической системы её периодическими орбитами с любой наперёд заданной степенью точности.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе приведены вспомогательные сведения, использующиеся в работе. Третий раздел посвящён доказательству основных теорем A и B; здесь приведён пример, показывающий, что условие ($C.4$) в теореме B опустить нельзя. В четвёртой части работы построен пример косого произведения в замкнутом прямоугольнике, имеющего глобальный аттрактор с непустой внутренностью.

2. Предварительные сведения

Приведём ряд утверждений, устанавливающих взаимосвязь свойства топологической транзитивности отображения из класса $T_u^3(I)$ со свойствами его фактор-отображения и отображений в слоях.

Заметим, что фактор-отображение произвольного непрерывного топологически транзитивного косого произведения на отрезке I_1 сюръективно, топологически транзитивно и имеет плотное множество периодических точек.

Лемма 2.1. *Пусть* $F \in T_u^3(I)$ *удовлетворяет условию* ($A.1$). *Тогда при любом* $x \in I_1$ *отображение* $g_x(y)$ *унимодально по* y[2].

Доказательство. В силу условий ($C.2$) – ($C.3$) возможны следующие случаи:

(a) каково бы ни было $x \in I_1$, $g_x(y)$ не содержит критических точек как функция переменной y;

(b) существует $x \in I_1$ такое, что $g_x(y)$ содержит критическую точку как функция переменной y.

В случае (a) имеем: каково бы ни было $x \in I_1$, $g_x(y)$ не содержит критической точки как функция переменной y. Тогда при любом $x \in I_1$ $g_x(y)$ как функция переменной y, является строго монотонной, причем характер монотонности не зависит от x. Следовательно, для любой точки $(x;\, y) \in I$ при условии, что $y \notin \partial(I_2)$, выполнены неравенства $g_x(y) < g_{x,2}(y) < \ldots < g_{x,n}(y) < \ldots$ или $g_x(y) > g_{x,2}(y) > \ldots > g_{x,n}(y) > \ldots$ Поэтому найдется $y_0 \in I_2$ ($y_0 = y_0(x)$) такое, что $y_0 = \lim\limits_{n\to+\infty} g_{x,n}(y)$. Последнее противоречит топологической транзитивности F. Следовательно, реализуется случай (b).

Тогда найдется $x' \in I_1$ такое, что $g_{x'}(y)$ как функция переменной y содержит критическую точку $c_{x'} \in (a_2, b_2)$. В этом случае при $y < c_{x'}$ верно неравенство $\frac{\partial}{\partial y} g_{x'}(y) > 0$, а при $y > c_{x'}$ – неравенство $\frac{\partial}{\partial y} g_{x'}(y) < 0$. Следовательно, $g_{x'}(y)$ унимодально по y, и в силу

[2]Непрерывное отображение $\varphi : [a,\, b] \to [a,\, b]$ называется унимодальным (мультимодальным), если отрезок $[a,\, b]$ представим в виде объединения двух промежутков $[a,\, c_1]$ и $(c_1,\, b]$ (($k+1$)-го промежутка $[a,\, c_1]$, $(c_1,\, c_2), \ldots, (c_k,\, b]$ ($k \geq 2$)), на каждом из которых φ является гомеоморфизмом. При этом характер монотонности φ меняется при переходе от одного из любых двух соседних промежутков к другому. Точки $c_1, c_2, \ldots, c_k$ называются точками возврата отображения (теория унимодальных (мультимодальных) отображений изложена, например, в [12], [14]).

условия ($C.3$)

$$g_{x'}(a_2) = g_{x'}(b_2) = a_2. \tag{3}$$

Так как функции $g_x(a_2)$ и $g_x(b_2)$ непрерывны по $x \in I_1$, то из равенств (3) и условия ($C.3$) следует, что $g_x(a_2) = g_x(b_2) = a_2$ при всех $x \in I_1$. Тогда, используя классическую теорему Ролля и условие ($C.2$) теоремы, получаем, что при каждом $x \in I_1$ существует единственная критическая точка c_x по переменной y отображения $g_x(y)$, причем c_x – точка возврата $g_x(y)$, и $g_x(I_2) = [a_2,\, g_x(c_x)]$. Лемма 2.1 доказана.

Отметим, что операция композиции (использующаяся при переходе к итерациям отображения F) выводит из класса унимодальных отображений в слоях, приводя к мультимодальным отображениям. При этом знак шварциана отображений в слоях при переходе к их композициям сохраняется (см. [12, гл. 4, § 1]).

Лемма 2.2. *Пусть $F \in T^0(I)$ топологически транзитивно. Тогда отображение F — сюръекция слоя $\{x\} \times I_2$ на слой $\{f(x)\} \times I_2$, при любом $x \in I_1$.*

Напомним определение топологической эквивалентности отображений, которое нам потребуется в дальнейшем.

Определение 2.3 [6, ч. 1, гл. 2, § 2.1, п. 2.1a]. Говорят, что отображения $g_1 : M \to M$ и $g_2 : N \to N$ (M и N — произвольные отрезки числовой прямой) топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h : M \to N$, что $g_1 = h^{-1} \circ g_2 \circ h$.

Важную роль в теории унимодальных (мультимодальных) отображений отрезка играет понятие комбинаторной эквивалентности, выделяющее унимодальные (мультимодальные) отображения, всевозможные (соответствующие) итерации которых имеют «одинаковую схему складок».

Определение 2.4 [14, гл. 6, п. 6.1.3]. Говорят, что мультимодальные (унимодальные) отображения $g_1, g_2 : I_2 \to I_2$ с множествами точек возврата $C(g_1)$ и $C(g_2)$ соответственно[3] *комбинаторно-эквивалентны*, если существует сохраняющая ориентацию биекция $h : \bigcup\limits_{n \in Z} g_1^n(C(g_1)) \to \bigcup\limits_{n \in Z} g_2^n(C(g_2))$ такая, что $h \circ g_1(z) = g_2 \circ h(z)$ при всех $z \in \bigcup\limits_{n \in Z} g_1^n(C(g_1))$ и $h(C(g_1)) = C(g_2)$, здесь $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел.

Предложение 2.5 [9]. Пусть $F \in T_u^3(I)$ удовлетворяет условию ($A.1$). Тогда при всех $x \in I_1$ и $n \geq 1$ отображение $g_{x,\,n}(y) : I_2 \to I_2$ комбинаторно-эквивалентно отображению $g_\lambda^n : I_2 \to I_2$, где $g_\lambda(y) = \lambda(y - a_2)(b_2 - y)$[4] при $\lambda = \frac{4b_2}{(b_2 - a_2)^2}$.

Предложение 2.5 показывает, что в рассматриваемом классе косых произведений существует единственное отображение ($g_\lambda(y)$), произвольные итерации которого определяют «схему складок» всех отображений в слоях произвольных соответствующих итераций косого произведения F.

Необходимо отметить, что комбинаторная эквивалентность унимодальных (мультимодальных) отображений отрезка является более слабым свойством, чем топологическая эквивалентность. Из комбинаторной эквивалентности совсем не следует топологическая эквивалентность. Таким образом, комбинаторно-эквивалентными могут быть два унимодальных (мультимодальных) не являющиеся топологически эквивалентными отображения, одно из которых содержит периодические аттракторы, а другое – нет.

Далее будет приведено утверждение (предложений 2.8), указывающее на взаимосвязь комбинаторной эквивалентности с топологической. В начале приведем два вспомогательных определения.

Определение 2.6 [14, гл. 6, п. 6.1.3]. Пусть отображение отрезка I в себя $g : I \to I$ имеет периодическую точку y^* (наименьшего) периода n. Периодическая орбита $Orb_g(y^*) = \left\{y^*, g(y^*), ..., g^{n-1}(y^*)\right\}$ называется *периодическим аттрактором* периода n, если множество

$$B(y^*) = \left\{x : g^k(x) \to Orb_g(y^*), k \to +\infty\right\}$$

[3] В случае унимодальных отображений каждое из множеств $C(g_1)$ и $C(g_2)$ является одноточечным.

[4] Отображение $g_\lambda(y) : I_2 \to I_2$ при $\lambda = \frac{4b_2}{(b_2-a_2)^2}$ топологически сопряжено с отображением $g(z) = 4z(1-z)$ при $z \in [0,\, 1]$.

содержит окрестность (возможно, одностороннюю) орбиты $Orb_g(y^*)$. Множество $B(y^*)$ называют *областью притяжения* орбиты $Orb_g(y^*)$.

Определение 2.7 [14, гл. 6, п. 6.1.3]. Рассмотрим отображение отрезка I в себя $g : I \to I$. Тогда интервал $J \subset I$ называется *блуждающим интервалом*, если все его итерации $J, g(J), g^2(J), \ldots$ попарно не пересекаются и последовательность $\{g^n(J)\}_{n \geq 0}$ не стремится к периодической орбите.

Предложение 2.8 [14, гл. 6, п. 6.1.3]. Пусть $g_1, g_2 : I_2 \leftarrow I_2$ — унимодальные (мультимодальные) отображения. Если g_1 и g_2 комбинаторно-эквивалентны и не имеют блуждающих интервалов и периодических аттракторов, то g_1 и g_2 топологически эквивалентны.

Лемма 2.9 [15, гл. 4]. *Пусть отображение $g \in C^2(I_2)$ имеет неплоскую критическую точку. Тогда g не имеет блуждающих интервалов.*

3. Доказательство основных теорем A и B

Доказательство теоремы A разобьем на ряд шагов, проделанных в леммах 3.1 и 3.5. Для доказательства теоремы B, кроме того, необходимы леммы 3.2, 3.3, 3.4 и 3.6.

Используя критерий топологической транзитивности (см. введение), докажем, что свойство равномерной аппроксимируемости фазового пространства косого произведения его периодическими орбитами влечет за собой топологическую транзитивность косого произведения.

Лемма 3.1. *Пусть $F \in T^3_u(I)$ удовлетворяет $(A.2)$. Тогда косое произведение F топологически транзитивно.*

Действительно, возьмём в I два произвольных открытых непустых подмножества U и V. Воспользуемся свойством равномерной аппроксимируемости прямоугольника I периодическими орбитами отображения $F \in T^3_u(I)$. Найдётся некоторое разбиение P' прямоугольника I на k замкнутых подпрямоугольников ($I = \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$) и натуральные числа $0 \leq q, p \leq k$ такие, что $U \supset I_q$, $V \supset I_p$. При этом существует F — периодическая точка (x^*, y^*) такая, что $F^r(x^*, y^*) \in U$, а $F^l(x^*, y^*) \in V$. Для определённости будем считать, что $r < l$. Тогда $F^{l-r}(U) \cap V \neq \oslash$. Таким образом, лемма 3.1 справедлива.

Из определения 1.2 непосредственно следует

Лемма 3.2. *Пусть $F \in T^3_u(I)$ удовлетворяет $(A.2)$. Тогда косое произведение F имеет плотное множество периодических точек.*

Далее покажем, что свойство топологической транзитивности влечёт за собой равномерную аппроксимируемость фазового пространства периодическими орбитами динамической системы рассматриваемого класса. Для этого сначала убедимся в том, что топологическая транзитивность косого произведения из класса $T^3_u(I)$ влечёт плотность множества его периодических точек.

Лемма 3.3. *Пусть $F \in T^3_u(I)$ удовлетворяет условию $(A.1)$. Тогда для любого $x \in I_1$ отображение $g_x(y)$ не имеет блуждающих интервалов.*

Доказательство. В силу условия $(C.2)$ и леммы 2.9 отображение $g_x(y)$ не имеет блуждающих интервалов при всех $x \in I_1$.

Лемма 3.4. *Пусть $F \in T^3_u(I)$ удовлетворяет условию $(A.1)$. Тогда для любого $x \in I_1$ отображение $g_x(y)$ не имеет аттракторов.*

Доказательство. Допустим, существует точка $x^* \in I_1$ такая, что отображение $g_{x^*}(y)$ имеет периодический аттрактор y^* (наименьшего) периода n. В силу свойства $(C.2)$, леммы 2.1 и леммы 2.2 $g_{x^*,2}(c_{x^*}) = a_2$. Таким образом, ни точка c_{x^*}, ни один из её прообразов не принадлежат области притяжения периодического аттрактора y^*.

Заметим, что точка y^* имеет максимальную окрестность U, не содержащую саму точку c_{x^*} и всевозможные её прообразы (U не пусто, так как содержит область непосредственного притяжения точки y^*). Тогда ∂U состоит из некоторых прообразов критической точки c_{x^*} — c_l и c_r порядков l и r соответственно.

1) Пусть $l = r = 1$. Тогда точка c_{x^*} принадлежит множеству U. Последнее противоречит выбору интервала U.
2) Положим $l = r \geq 2$. Тогда точка c_{x^*} принадлежит интервалу $\left(g_{x^*}^{l-1}(c_l), g_{x^*}^{l-1}(c_r)\right)$. Следовательно, на интервале (c_l, c_r) существует прообраз точки c_{x^*}. Последнее противоречит выбору интервала U.
3) Пусть теперь $l \neq r$. Для определённости будем считать, что $l < r$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$g_{x^*}^{l+1}(c_l) = b_2 \text{ и } g_{x^*}^{k}(c_l) = a_2 \text{ при всех } k \geq l+2,$$
$$g_{x^*}^{r+1}(c_r) = b_2 \text{ и } g_{x^*}^{s}(c_r) = a_2 \text{ при всех } s \geq r+2.$$

Получаем, что $g_{x^*}^{r+1}([c_l, c_r]) = [a_2, b_2]$, то есть множество $U = [c_l, c_r]$ содержит прообразы точки c_{x^*}. Последнее также противоречит выбору U. Таким образом, при всех $x \in I_1$ отображение $g_x(y)$ не имеет аттракторов. Лемма 3.4 доказана.

Тогда в силу предложения 2.8 всякое отображение $g_{x,n}$ при любом $x \in I_1$ и $n \geq 1$ топологически эквивалентно некоторой итерации логистического отображения вида $g_\lambda^n : I_2 \to I_2$ при $\lambda = \frac{4b_2}{(b_2-a_2)^2}$, а значит, топологически транзитивно и обладает плотным множеством периодических точек. Последнее вместе с равенством $\overline{Per(f)} = I_1$ влечет за собой существование плотного множества периодических точек у рассматриваемого топологически транзитивного косого произведения.

Таким образом, доказано, что в рассматриваемом классе косых произведений условие $(A.1)$ влечёт за собой выполнение условия $(B.1)$.

Лемма 3.5. *Пусть $F \in T_u^3(I)$ удовлетворяет условию $(A.1)$. Тогда косое произведение F удовлетворяет условию $(A.2)$.*

Доказательство. Как показано выше, множество периодических точек отображения F плотно в прямоугольнике I. Возьмём произвольно и зафиксируем действительное число $\varepsilon' > 0$ и построим по нему разбиение P прямоугольника I на m открытых подпрямоугольников J_i, $1 \leq i \leq m$, с параметром разбиения $\lambda(P) < \varepsilon'$. Рассмотрим произвольную транзитивную точку (x^*, y^*) отображения F. Введём следующие обозначения:

$$n_1 = \min\left\{k | F^k(x^*, y^*) \in J_1\right\},\ n_2 = \min\left\{k | F^k(x^*, y^*) \in J_2\right\},\ ...,$$
$$n_m = \min\left\{k | F^k(x^*, y^*) \in J_m\right\}.$$

Положим $n_0 = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \{n_i\}$. Обозначим через ρ метрику в I, например, согласованную с топологией произведения в I. Тогда $\rho(F^{n_i}(x^*, y^*), \partial J_i)$ — это расстояние между n_i-й итерацией точки (x^*, y^*) и границей прямоугольника J_i, пусть $d' = \min\{\rho(F^{n_i}(x^*, y^*), \partial J_i), 1 \leq i \leq m\}$ — минимальное из таких расстояний. Обозначим $\varepsilon = \min\{\varepsilon', d'\}$. В силу равномерной непрерывности косого произведения F по числу ε укажем число $\delta > 0$ такое, что

$$\max_{0 \leq n \leq n_0} \rho\left(F^n(x^*, y^*), F^n(x, y)\right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\ (x, y) \in U((x^*, y^*), \delta),$$

где $U((x^*, y^*), \delta)$ — окрестность точки (x^*, y^*) радиуса δ.

Тогда произвольная точка $(x_0, y_0) \in Per(F) \bigcap U((x^*, y^*), \delta)$ за первые n_0 итераций попадёт во внутренность каждого из открытых подпрямоугольников разбиения P, то есть орбита точки (x_0, y_0) аппроксимирует прямоугольник I с точностью до ε. Лемма 3.5 доказана.

Далее показано, что при добавлении условия $(C.4)$ плотность периодических точек косого произведения из выделенного класса влечёт как топологическую транзитивность, так и равномерную аппроксимируемость фазового пространства периодическими орбитами.

Лемма 3.6. *Пусть $F \in T_u^3(I)$ удовлетворяет условиям $(C.4)$ и $(B.1)$. Тогда косое произведение F удовлетворяет каждому из условий $(A.1)$ и $(A.2)$.*

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) — внутренняя периодическая точка отображения F, удовлетворяющая условию $(C.4)$. Тогда x_0 — внутренняя f-периодическая точка (обозначим через n её период), правостороннее и левостороннее неустойчивые многообразия которой равны всему отрезку I_1. Покажем, что какую бы периодическую точку $(x, y) \in Per\left(F \in T_u^3(I)\right)$ мы ни взяли, она удовлетворяет условию $(C.4)$.

Предположим противное. Пусть существует $(\bar{x}, \bar{y}) \in Per(F)$ такая, что $\bar{x} \in Per(f)$ и имеет период k. Пусть для определённости $W_u^+(\bar{x}, f^k) \neq I_1$. Тогда $W_u^+(\bar{x}, f^k) = J$, где J — вполне инвариантный относительно f^k интервал, отличный от I_1. Тогда J не содержит точку x^*. Пусть $Orb_f(J) = J \bigcup f(J) \bigcup \ldots \bigcup f^{k-1}(J)$ — вполне инвариантное относительно отображения f множество. Множество $Orb_f(J)$ не содержит точку x^*, следовательно, существует правосторонняя окрестность $U^+(x^*)$ такая, что $U^+(x^*) \bigcap Orb_f(J) = \emptyset$. Кроме того, в силу условия $(C.4)$ существует $l \in \mathbf{N}$ такое, что $f^{ln} U^+(x^*) = I_1$. Значит, в $U^+(x^*)$ существует некоторый прообраз отрезка J. Обозначим его через $J_- \subset U^+(x^*)$. Тогда существует $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что при любом $n \geq n_0$ $f^n(J_-) \in Orb_f(J)$, то есть J_- — блуждающий относительно f интервал (J_- состоит из блуждающих точек). Следовательно, в J_- не существует периодических точек, что противоречит условию $(B.1)$. Таким образом, в условиях теоремы B любая периодическая точка фактор-отображения f имеет правостороннее неустойчивое многообразие, совпадающее со всем отрезком I_1. Аналогичным образом это свойство доказывается и для левосторонних неустойчивых многообразий f-периодических точек.

Рассмотрим два произвольных открытых множества $U, V \subset I_1$. Тогда в U существует некая периодическая точка x_0, обозначим её период через n. Возьмём произвольную правостороннюю окрестность $U^+(x_0) \subset U$. Тогда в силу условия $(C.4)$ существует натуральное число s такое, что $f^{sn}\left(U^+(x_0)\right) = I_1 \supset V$. Последнее означает, что отображение f топологически транзитивно (см. критерий топологической транзитивности).

В силу условий $(C.2)$, $(C.3)$ и плотности множества периодических точек косого произведения отображение $\tilde{g}_x(y)$ при каждом $x \in I_1$ является сюръективным унимодальным отображением, не обладающим ни аттракторами, ни блуждающими интервалами. Следовательно, $\tilde{g}_x(y)$ при каждом $x \in I_1$ топологически эквивалентно некоторой итерации логистического отображения вида $y = 4x(1-x)$, т.е. $\tilde{g}_x(y)$ топологически транзитивно. Таким образом, периодические орбиты отображения $\tilde{g}_x(y)$ равномерно аппроксимируют отрезок I_2 [16]. Последнее вместе с равномерной аппроксимируемостью отрезка I_1 периодическими орбитами f влечёт за собой равномерную аппроксимируемость прямоугольника I периодическими орбитами F. Тогда в силу леммы 3.1 отображение F топологически транзитивно. Лемма 3.6 доказана.

Теоремы A и B доказаны.

Отметим, что дополнительное условие $(C.4)$ опустить нельзя. Одно лишь свойство плотности множества периодических точек отображения F рассматриваемого класса не влечет за собой топологическую транзитивность.

Примером обладающего плотным множеством периодических точек, но не топологически транзитивного косого произведения из $T_u^3(I)$ может служить отображение $F_1(x, y) : [0, 1]^2 \to [0, 1]^2$ с фактором

$$f(x) = -\frac{32}{3}x^3 + 16x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{1}{2}$$

(см. рис. 1) и отображениями в слоях $g_x(y)$ при любых $(x, y) \in I$, определённые так, как это сделано для отображения F (см. раздел 4). Тогда $Per(F_1) = [0, 1]^2$, но F_1 не является топологически транзитивным, поскольку фактор-отображение f имеет два инвариантных промежутка $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

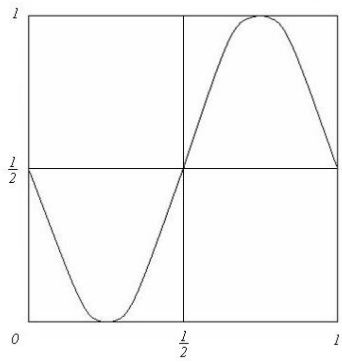

Рис. 1

4. Пример косого произведения, имеющего аттрактор с непустой внутренностью

Докажем теорему существования косого произведения из класса $T_u^3(I)$.

Теорема 4.1. *Существует топологически транзитивное косое произведение* $F \in T_u^3(I)$.

Доказательство. Определим косое произведение $F : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ в силу следующих равенств:

$$F(x,\, y) = (4x(1-x),\;\; g_x(y)), \tag{4}$$

где

$$g_x(y) = \int\limits_0^y a(x)\,(z-b(x))\,(z-c(x))\,(z-d(x))\,dz, \tag{5}$$

$a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и $d(x)$ — C^3-гладкие на отрезке $[0,1]$ функции действительного переменного. Равенство (5) может быть записано следующим образом:

$$g_x(y) = a_0(x)y^4 + a_1(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_3(x)y, \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} a_0(x) = \tfrac{a(x)}{4}; \\ a_1(x) = -\tfrac{a(x)(b(x)+c(x)+d(x))}{3}; \\ a_2(x) = \tfrac{a(x)((b(x)d(x)+b(x)c(x)+c(x)d(x))}{2}; \\ a_3(x) = -a(x)b(x)c(x)d(x). \end{gathered}$$

Найдём функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и $d(x)$, исходя из следующих условий:

$$\begin{cases} g_x(1) = 0; \\ g_x(t_x) = 1; \\ \frac{\partial g_x(y)}{\partial y}|_{y=0} = 1; \\ \frac{\partial g_x(y)}{\partial y}|_{y=t_x} = 0, \end{cases}$$

где при каждом $x \in [0,1]$ $t_x = \frac{x}{10} + \frac{1}{2} : [0,1] \to [0.5, 0.6]$ — абсцисса критической точки отображения $g_x(y)$ по переменной y.

Имеем

$$a(t_x) = -\frac{4(t_x^3 - 2t_x^2 + 4t_x - 2)}{t_x^3(t_x-1)^2};$$

$$c(t_x) = \frac{2t_x^4 - t_x^3 - 4t_x^2 + 11t_x - 6}{8t_x^3 - 16t_x^2 + 32t_x - 16} + \frac{\sqrt{4t_x^8 - 20t_x^7 + 49t_x^6 - 92t_x^5 + 162t_x^4 - 204t_x^3 + 201t_x^2 - 132t_x + 36}}{8t_x^3 - 16t_x^2 + 32t_x - 16};$$

$$b(t_x) = -c(t_x) + \frac{2t_x^4 - t_x^3 - 4t_x^2 + 11t_x - 6}{4(t_x^3 - 2t_x^2 + 4t_x - 2)}; \tag{7}$$

$$d(t_x) = t_x.$$

Отметим, что функции $a(t_x)$, $b(t_x)$, $c(t_x)$ и $d(t_x)$ корректно определены при всех $x \in [0,1]$.

На рис. 2 приведён график функции $g_x(y) : [0,1]^2 \to [0,1]$. На рис. 3 приведён график функции $\bar{y} = g_x(y)$ при $x = 0.5$.

В силу (4) фактор-отображение построенного косого произведения есть унимодальная C^3-гладкая сюръекция отрезка $[0,\,1]$; функция $g(x,\,y)$ есть C^3-гладкая по совокупности переменных x и y сюръекция квадрата $[0,\,1]^2$ на отрезок $[0,\,1]$, причем при каждом $x \in [0,1]$ отображение в слое $g_x(y)$ является унимодальной сюръекцией отрезка $[0,\,1]$ такой, что на $[0,\,\frac{x}{10} + \frac{1}{2}]$ $g_x(y)$ строго возрастает по y, а на $(\frac{x}{10} + \frac{1}{2},\,1]$ $g_x(y)$ строго убывает по y, причём

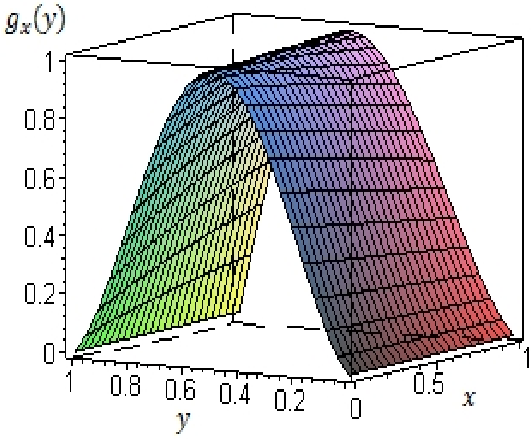

Рис. 2

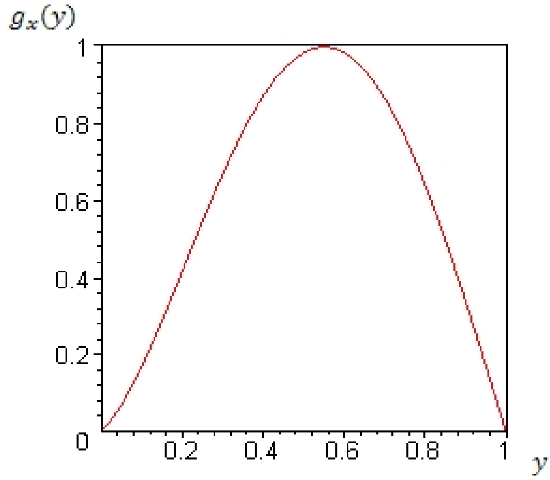

Рис. 3

при любом $x \in [0,\, 1]$ справедливо $g_x(0) = g_x(1) = 0$ и $g_x(y)$ имеет неплоскую критическую точку $t_x = \frac{x}{10} + \frac{1}{2}$.

Покажем, что шварциан построенного косого произведения отрицателен. Для этого нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 4.2. [12, гл. 4, §2] Если $f(x)$ — полином степени ≥ 2 и все корни $f'(x) = 0$ действительны, то $Sf(x) < 0$ всюду, где $f'(x) \neq 0$.

Производная $\frac{\partial g_x(y)}{\partial y} = a(x)(y - b(x))(y - c(x))(y - d(x))$ имеет три действительных корня при каждом $x \in [0, 1]$. Таким образом, в силу предложения 4.2 $S\,(g_x(y)) < 0$.

Покажем, что построенное косое произведение топологически транзитивно.

Действительно, в силу своего задания $g_{x,\,n}(y)$ не имеет блуждающих интервалов (см. лемму 2.9) при всех $x \in [0,\, 1]$ и $n \geq 2$. Кроме того, $g_{x,\,n}(y)$ не имеет периодических аттракторов, так как в этом случае в область притяжения периодического аттрактора попала бы критическая точка или один из её прообразов, что невозможно, так как $g_{x,n}(1) = 0$ при всех $x \in [0,\, 1]$ и $n \geq 2$. Тогда в силу предложения 2.8 $g_{x,\,n}(y)$ топологически сопряжено с n-й итерацией фактор-отображения $f(x) = 4x(1-x)$ (см. предложение 2.8), и вместе с $f(x)$ отображение $g_{x,\,n}$ топологически транзитивно (см., например, [14, гл. 6, п. 6.1.1]).

Топологическая транзитивность $f(x)$ означает, что существует точка $x^* \in [0, 1]$ такая, что

$$\omega(x^*,\, f) = [0,\, 1], \tag{8}$$

где $\omega(x^*,\, f)$ — ω-предельное множество f-траектории точки x^*. Отображение $f(x)$ обладает также следующими свойствами:

1) $f(x)$ имеет периодические точки любого периода;

2) $[0,\, 1] = \overline{Per(f)}$ [14, гл. 6, п. 6.1.1]).

Из равенства (8) и свойства 2) следует возможность аппроксимации отрезка $[0,\, 1]$ f-периодической орбитой с произвольной наперед заданной степенью точности [20], [16]. Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и произвольного разбиения P_x отрезка $[0,\, 1]$ с параметром разбиения $\lambda(P_x) < \varepsilon$ найдется f-периодическая орбита O_f такая, что внутренность каждого отрезка разбиения P_x содержит хотя бы одну точку орбиты O_f.

Возьмем произвольно и зафиксируем $\varepsilon \in (0,\, 1)$. Построим разбиение P_x отрезка $[0,\, 1]$ оси абсцисс на $([\frac{1}{\varepsilon}] + 1)$ равных отрезков. Тогда $\lambda(P_x) < \varepsilon$. Укажем f-периодическую орбиту $O_f(x^0)$ так, что внутри каждого отрезка разбиения P_x содержится хотя бы одна точка орбиты $O_f(x^0)$ (при этом точка x^0 принадлежит внутренности первого по порядку отрезка разбиения P_x). Обозначим через $m(x^0)$ (наименьший) период периодической орбиты

$O_f(x^0) = \{x^0,\, f(x^0), \ldots, f^{m(x^0)-1}(x^0)\}$, где $m(x^0) \geq [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ (существование орбиты с таким периодом вытекает из свойства 1)).

Пусть $\varepsilon' = \frac{1}{2}\lambda(P_x)$. Построим разбиение P_y отрезка $[0,\,1]$ оси ординат на $([\frac{1}{\varepsilon'}]+1)$ равных отрезков $J_0 \prec J_1 \prec \ldots \prec J_{k-1}$, где $k = [\frac{1}{\varepsilon'}] + 1$, и $J_r \prec J_{r+1}$ в том и только том случае, если для любых различных $x' \in J_r$, $x'' \in J_{r+1}$ выполнено $x' < x''$. Имеем $\lambda(P_y) < \varepsilon' < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Так как при всех $0 \leq i \leq m(x^0) - 1$ отображение $\widetilde{g}_{f^i(x^0)}(y)$ топологически транзитивно, то непрерывность F вместе с равенством (2) влекут за собой топологическую транзитивность сужения $F_{|O_f(x^0)\times[0,\,1]}$. Пусть для определенности y^0 – некоторая транзитивная точка отображения $\widetilde{g}_{x^0}(y)$, лежащая во внутренности отрезка J_0 разбиения P_y. Тогда траектория $\{F^i(x^0,\, y^0)\}_{i\geq 0}$ всюду плотна во множестве $O_f(x^0) \times [0,\,1]$. Обозначим через $i_{j,\,r}$, где $0 \leq j \leq m(x^0) - 1$, $0 \leq r \leq k - 1$, наименьшие неотрицательные значения дискретного времени i такие, что

$$F^{i_{j,\,r}}(x^0,\, y^0) \in \{f^j(x^0)\} \times intJ_r,$$

здесь $intJ_r$ – внутренность отрезка J_r. Так как множество указанных неотрицательных целых чисел конечно, то корректно определено натуральное число

$$i_* = \max_{\substack{0\leq j\leq m(x^0)-1 \\ 0\leq r\leq k-1}} \{i_{j,\,r}\}.$$

Отметим, что $i_* \geq km(x^0)$. Используя равномерную непрерывность отображения $g_{x,\,i_*}(y)$ в квадрате $[0,\,1]^2$, по числу ε' укажем $\delta > 0$ так, чтобы при всех $y \in [0,\,1]$ таких, что $|y - y^0| < \delta$, выполнялось неравенство

$$\max_{0\leq i\leq i_*} |g_{x^0,\,i}(y) - g_{x^0,\,i}(y^0)| < \varepsilon', \tag{9}$$

каково бы ни было $x^0 \in Per(f)$.

Топологическая сопряженность отображений $\widetilde{g}_{x^0}(y)$ и $f^{m(x^0)}(x)$ позволяет указать точку $y_0 \in Per(\widetilde{g}_{x^0})$ так, что (наименьший) период $m(y_0)$ точки y_0 относительно $\widetilde{g}_{x^0}$ удовлетворяет неравенству $m(y_0) \geq k$ (то есть период F-периодической точки $(x^0;\, y_0)$, равный $m(x^0)m(y_0)$, не меньше, чем $km(x^0)$); $|y_0 - y^0| < \delta$, и в силу (9) верно

$$\max_{0\leq i\leq i_*} |g_{x^0,\,i}(y_0) - g_{x^0,\,i}(y^0)| < \varepsilon'.$$

Последнее вместе с выбором чисел ε' и $i_{j,\,r}$ означает, что внутренность каждого из $([\frac{1}{\varepsilon}]+1)^2$ квадратов, сторонами которых служат отрезки разбиений P_x и P'_y, где разбиение P'_y получено делением отрезка $[0,\,1]$ оси ординат на $([\frac{1}{\varepsilon}]+1)$ равных частей, содержит хотя бы одну точку периодической орбиты $O_F((x^0;\, y_0))$. Таким образом, квадрат $[0,\,1]^2$ с произвольной, наперед заданной степенью точности можно аппроксимировать периодическими орбитами отображения F. Отсюда в силу леммы 3.1 следует, что построенное косое произведение F топологически транзитивно. Теорема 4.1. доказана.

Следствие 4.3. *Косое произведение* $F : [0,1]^2 \to [0,1]^2$, *построенное в теореме* 4.1 *допускает свое естественное расширение* $F_* : [0,1] \times [-0.25, 1.05] \to [0,1] \times [-0.25, 1.05]$.

На рис. 4 приведён график функции $g_x(y) : [0,1] \times [-0.25, 1.05] \to [-0.25, 1.05]$, на рис. 5 — график функции $\bar{y} = g_x(y)$ при $x = 0.5$.

Введём понятие аттрактора динамической системы.

Определение 4.4 [6, ч. 1, гл. 3, § 3.3]. Компактное множество $A \subset I$ называется *аттрактором* косого произведения $F : I \to I$, если существует такая окрестность U множества A и такое натуральное число n, что $F^n(U) \subset U$ и $A = \bigcap\limits_{k\geq 0} F^k(U)$.

Теорема 4.5. *Косое произведение* $F_* : [0,1] \times [-0.25, 1.05] \to [0,1] \times [-0.25, 1.05]$, *определённое равенствами* (4), (5), *имеет аттрактор* $A = [0,1]^2$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся определением 4.4. Возьмём $U = [0,1] \times [-0.25, 1.05]$. Из определения F_* следует, что при любом натуральном n $F_*^n(U) \subset U$.

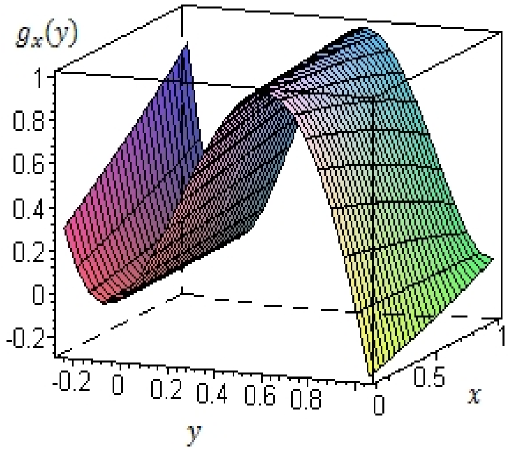

Рис. 4

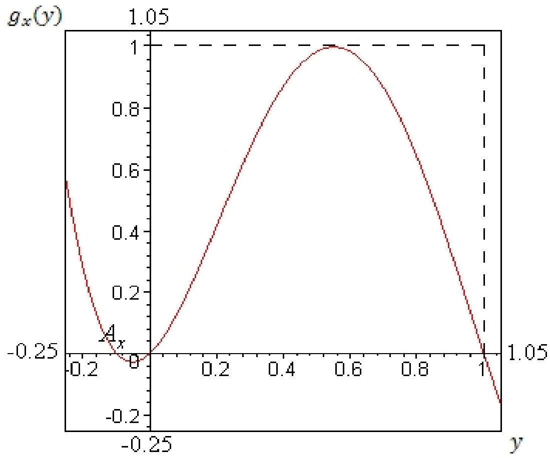

Рис. 5

Покажем, что $A = \bigcap\limits_{k \geq 0} F_*^k(U)$. Действительно, для каждого $x \in [0, 1]$ положим A_x равным наименьшему корню отображения g_x на отрезке $[-0.25, 1.05]$ (см. рис. 5).

Тогда при любом $x \in [0, 1]$ имеем

1) $g_x([0, 1]) \subset [0, 1]$;
2) $g_x([-0.25, A_x]) \subset [0, 1]$;
3) $g_x([1, 1.05]) \subset [-0.25, A_x]$;
4) отрезок $[A_x, 0]$ под действием отображений в слоях стягивается к точке 0, так как точка 0 является притягивающей слева неподвижной точкой каждого отображения g_x.

Таким образом, $A = \bigcap\limits_{k \geq 0} F_*^k(U)$, а следовательно, множество A — аттрактор F_*. Теорема 4.5 доказана.

Литература

1. *Биркгоф Д.* Динамические системы. – Ижевск: Издат. дом «Удмуртский университет», 1999.
2. *Hedlund G.A.* A class of transformations of the plane // Proc. Cambr. Phil. Soc. — 1955. — V. 51, N 4. — P. 554–564.
3. *Аносов Д.В.* Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1973. — Т. 37, Ч. 6. — С. 1259–1274.
4. *Diaz L.J., Pujals E., Uras R.* Partial hyperbolicity and robast transitivity // Acta Mathematica. — 1999. — V. 183. — P. 1–43.
5. *Городецкий А.С., Ильяшенко Ю.С.* Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленоидом // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова. — 2000. — Т. 231. — С. 96–118.
6. *Каток А., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.
7. *Сидоров Е.А.* Топологически транзитивные цилиндрические каскады // Математические заметки. — 1973. — Т. 14. — Ч. 3.
8. *Alseda Ll., Kolyada S., Llibre J., Snoha L.* Entropy and Periodic Points for Transitive Maps // Trans. Amer. Math. Soc. — 1999. — V. 351. — P. 1551–1575.

9. *Ефремова Л.С., Фильченков А.С.* О простейших топологически транзитивных косых произведениях в плоскости // Труды международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. — Суздаль, 2008.

10. *Ефремова Л.С., Фильченков А.С.* Об одном примере топологически транзитивного косого произведения в плоскости // Проблемы фундаментальной и прикладной математики. — М.: МФТИ, 2009. — С. 61–68.

11. *Bamon R., Kiwi J., Rivera-Letelier J., Urzua R.* On the Topology of Solenoidal attractors of the Cylinder // Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis. — March-April 2006. — V. 23, I. 2. — P. 209–236.

12. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1986.

13. *Шарковський О.М.* Неблукаючі точки та центр неперевного відображения прямоі в себе // Доп. АН УРСР. — 1964. — Т. 7. — С. 865–868.

14. *Брур Х.В., Дюмортье Ф., ван Стрин С., Такенс Ф.* Структуры в динамике. — М.—Ижевск, 2003.

15. *Melo W. de, S. Strien van.* One-Dimensional Dynamics. — Berlin: Springer, 1996.

16. *D'Aniello E., Steele T.* Approximating ω-limit sets with periodic orbits // Aequationes Math. — 2008. — V. 75. — P. 93–102.

17. *Куратовский Л.* Топология. — М.: Мир. — Т. 1. 1966; Т. 2. 1969.

18. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.

19. *Мартин Н., Ингленд Дж.* Математическая теория энтропии / пер. с англ. — М.: Мир, 1988.

20. *Шарковский А.Н.* О притягивающих и притягивающихся множествах // ДАН СССР. — 1966. — Т. 170, Ч. 6. — С. 1276–1278.

Поступила в редакцию 06.02.2012.