Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Задачи про теорему о компактности для исчисления высказываний

Теорема о компактности для исчисления высказываний гласит: если любое конечное подмножество множества пропозициональных формул Γ совместно, то и всё Γ совместно.

Назовём *обобщённым графом* пару $\langle V, E\rangle$, где V — некоторое множество, называемое множеством вершин, а E — антирефлексивное симметричное отношение на V. *Циклом* в обобщённом графе назовём такую последовательность $v_1, \dots, v_n$, что $v_1 E v_2$, $v_2 E v_3$, $\dots$, $v_{n-1} E v_n$, $v_n E v_1$. Обобщённый граф назовём *двудольным*, если $V = V_1 \sqcup V_2$, так что $\neg x E y$ для всех $x \in V_1$, $y \in V_1$ и $x \in V_2$, $y \in V_2$.

1. Докажите, что обобщённый граф двудолен тогда и только тогда, когда в нём нет циклов из нечётного числа вершин. (Указание: сопоставьте каждой вершине переменную, истинную тогда и только тогда, когда эта вершина лежит в V_1.)

Обобщённый граф можно раскрасить в k цветов, если $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_k$, так что $\neg x E y$ для всех $x \in V_i$, $y \in V_i$, где $i = 1, \dots, k$. *Подграфом* называется (обобщённый) граф $\langle V', E'\rangle$, такой что $V' \subset V$ и $E' \subset E$.

2. Докажите, что обобщённый граф можно покрасить в k цветов тогда и только тогда, когда любой его конечный подграф можно покрасить в k цветов.

Пусть $\mathcal{V}$ — некоторое множество пропозициональных переменных. *Присваиванием* называется произвольное отображение из $\mathcal{V}$ в $\{0, 1\}$. Множество присваиваний A называется *определимым*, если существует такое множество пропозициональных формул Γ, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда все формулы из Γ истинны на x.

3. Пусть $\mathcal{V}$ конечно. Докажите, что любое множество присваиваний определимо.

4. Пусть $\mathcal{V}$ счётно. Докажите, что любое одноэлементное множество присваиваний определимо.

5. Пусть $\mathcal{V}$ счётно. Докажите, что любое конечное множество присваиваний определимо.

6. Пусть $\mathcal{V}$ счётно. Из соображений мощности докажите, что не любое множество присваиваний определимо.

7. Пусть $\mathcal{V}$ счётно и равно $\{p_0, p_1, \dots\}$. Докажите, что не определимо множество присваиваний, содержащее все $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, но не содержащее $\{p_0, p_1, \dots\}$. (Здесь присваивание отождествлено с множеством переменных, на которых оно истинно). (Указание: добавьте к предполагаемому определяющему семейству Γ все формулы вида p_i и по теореме компактности докажите, что результат совместен).

Через $\mathbb{N}^*$ обозначим множество всех кортежей натуральных чисел (произвольной длины). *Деревом* называется такое подмножество T множества $\mathbb{N}^*$, что если $\alpha \in T$, а β — начало α, то $\beta \in T$. Дерево имеет *конечное ветвление*, если для любого кортежа $\alpha \in T$ только конечное количество кортежей αx, где $x \in \mathbb{N}$, принадлежит T. *Лемма Кёнига* гласит, что любое бесконечное (т.е. содержащее бесконечное число кортежей) дерево с конечным ветвлением содержит бесконечную ветвь, т.е. все начала некоторой бесконечной последовательности натуральных чисел.

8. Докажите лемму Кёнига при помощи теоремы о компактности. (Указание: для каждой вершины дерева введите переменную, истинную, если она лежит на искомой бесконечной ветви; запишите формулы, что на каждом уровне лежит ровно одна отмеченная вершина и что отмеченные вершины образуют ветвь; из конечного ветвления заключите, что любое конечное множество полученных формул совместно.)

9. Докажите теорему о компактности для счётного числа переменных при помощи леммы Кёнига. (Указание: включите в дерево булевы кортежи $(a_1, \ldots, a_i)$, на которых верны все формулы из Γ, зависящие только от переменных p_1, …, p_i).

Пусть C — некоторое конечное непустое множество цветов. Назовём плиткой элемент C^4, будем его обозначать (c_T, c_R, c_B, c_L). (Т.е. это квадрат, рёбра которого раскрашены в какие-то цвета). Пусть задан некоторый набор плиток $A \subset C^4$. Назовём замощением решётки плоскости функцию $F\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to A$. Замощение называется правильным, если $F(x,y)_T = F(x,y+1)_B$ и $F(x,y)_R = F(x+1,y)_L$. (Т.е. цвета граничных рёбер соседних квадратов совпадают).

10. Докажите, что если любой квадрат $n \times n$ можно правильно замостить, то и всю плоскость можно правильно замостить.

11. Пусть задан некоторый набор многоугольников. Докажите, что если любой квадрат можно замостить этими многоугольниками, то и всю плоскость можно замостить. (Многоугольники можно поворачивать и переворачивать, они не могут пересекаться по внутренним точкам, но могут выходить за пределы квадрата).

Литература

Shai Ben-David, “The compactness theorem for propositional calculus”, `http://www.student.cs.uwaterloo.ca/~cs798/compactness2.pdf`

Н.К.Верещагин, А.Шень, “Языки и исчисления”, стр. 61–63