УДК 517.997

А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Об управляемости упругих колебаний системы последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами со свободными границами

Решается задача гашения колебаний системы, состоящей из m последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами, границы системы свободны. В одной из точек соединения объектов с распределенными параметрами к системе присоединен объект с сосредоточенными параметрами, с помощью которого и осуществляется гашение колебаний системы.

Ключевые слова: волновое уравнение, краевая задача, упругие колебания, управляемость, гашение колебаний.

1. Введение

Задачи управляемости упругими колебаниями (гашение колебаний) связанных систем с распределенными и сосредоточенными параметрами исследовались в работах [1] – [5].

В работах [1] – [3] изучались колебания систем, состоящих из двух объектов. Колебания одного объекта описывается волновым уравнением (объект с распределенными параметрами), а колебания другого объекта — обыкновенным дифференциальным уравнением (объект с сосредоточенными параметрами). Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка содержит слагаемое, характеризующее объект с распределенными параметрами. Такого рода обратная связь присуща системам с ограниченным возбуждением [6], [7]. Подобные задачи могут возникать, например, при управлении процессами в длинных линиях электропередач или потоками газа в длинных трубопроводах [8].

В [4] и [5] исследовались колебания сетей — систем, состоящих из конечного числа объектов с распределенными параметрами. Изучались сети двух видов: сети, объекты с распределенными параметрами которых соединены в одной точке, и сети, для которых эти объекты последовательно соединены.

В настоящей статье решается задача гашения колебаний сети из последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами с помощью объекта с сосредоточенными параметрами. В отличие от задачи, решенной в [5], исследуется система со свободными границами. Ее решение имеет некоторые особенности.

2. Постановки задач

Краевая задача

$$u_{tt}^i(x,t) = a_i^2 u_{xx}^i(x,t), \qquad (x,t) \in Q^i, \quad i = 1,\dots,m, \tag{1}$$

$$u^i(x,0) = \varphi_i(x), \quad u_t^i(x,0) = \psi_i(x), \qquad (i-1)\ell \leqslant x \leqslant i\ell, \quad i = 1,\dots,m, \tag{2}$$

$$u_x^1(0,t) = u_x^m(m\ell,t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \tag{3}$$

$$u^i(i\ell,t) = u^{i+1}(i\ell,t), \qquad t \geqslant 0, \quad i = 1,\dots,m-1, \tag{4}$$

$$\alpha_i u_x^i(i\ell,t) + \beta_{i+1} u_x^{i+1}(i\ell,t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \quad i = 2,\dots,m-1, \tag{5}$$

$$c_1 u_x^1(\ell,t) + c_2 u_x^2(\ell,t) = y(t), \qquad t \geqslant 0, \tag{6}$$

$$\ddot{y}(t) + b^2 y(t) = k u^1(\ell,t) + \mu(t), \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = y^1. \tag{7}$$

Здесь $Q^i = \{\, (x,t) : (i-1)\ell < x < i\ell,\ t > 0\,\}$. При этом выполняются условия

$$a_i \neq a_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, m-1. \tag{8}$$

Замечание 1. В работе [5] вместо краевых условий (3) (свободные границы сети) исследовались граничные условия: $u^1(0,\,t) = u^m(m\ell,\,t) = 0$ (закрепленные границы сети).

Согласование начальных (2) и граничных условий (3) – (6) дает следующие равенства для функций $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$:

$$\begin{gathered}
\varphi_1'(0) = \varphi_m'(m\ell) = 0, \quad \psi_1'(0) = \psi_m'(m\ell) = 0,\\
\varphi_i(i\ell) = \varphi_{i+1}(i\ell), \quad \psi_i(i\ell) = \psi_{i+1}(i\ell), \qquad i = 1, \ldots, m-1,\\
\alpha_i\varphi_i'(i\ell) + \beta_{i+1}\varphi_{i+1}'(i\ell) = 0, \quad \alpha_i\psi_i'(i\ell) + \beta_{i+1}\psi_{i+1}'(i\ell) = 0, \qquad i = 2, \ldots, m-1,\\
c_1\varphi_1'(\ell) + c_2\varphi_2'(\ell) = y^0, \quad c_1\psi_1'(\ell) + c_2\psi_2'(\ell) = y^1.
\end{gathered} \tag{9}$$

З а д а ч а   у п р а в л я е м о с т и. *Найти промежуток времени T и функцию $\mu(t)$ такие, что решения $u^i(x,t)$ задачи (1) – (7) с начальными значениями (2) в момент времени T принимают нулевые значения:*

$$u^i(x,T) = 0, \quad u_t^i(x,T) = 0, \qquad (i-1)\ell \leqslant x \leqslant i\ell, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{10}$$

Для решения поставленной задачи нам потребуется получить условия существования решение краевой задачи (1) – (7).

3. Решение краевой задачи

Функции $u^i(x,t)$ — решения краевой задачи (1) – (7) — будем искать в виде

$$u^i(x,t) = E_i(x + a_i t) + G_i(x - a_i t), \qquad (x,t) \in \overline{Q^i}. \tag{11}$$

Для введенных функций начальные условия (2) краевой задачи представляются следующими равенствами:

$$E_i(x) + G_i(x) = \varphi_i(x), \quad a_i[E_i'(x) - G_i'(x)] = \psi_i(x), \qquad (i-1)\ell \leqslant x \leqslant i\ell,$$

из которых получаем

$$E_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{2} + \frac{\widehat{\psi}_i(x)}{2a_i}, \quad G_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{2} - \frac{\widehat{\psi}_i(x)}{2a_i}, \qquad (i-1)\ell \leqslant x \leqslant i\ell. \tag{12}$$

Здесь введено обозначение $\widehat{\psi}_i(x) = \int\limits_{(i-1)\ell}^{x} \psi_i(s)\,ds$, $i = 1, \ldots, m$.

Пусть $\varphi_i \in C^2[(i-1)\ell, i\ell]$ и $\psi_i \in C^1[(i-1)\ell, i\ell]$, $i = 1, \ldots, m$, тогда функции (11) удовлетворяют при $(i-1)\ell < x + a_i t < i\ell$ и $(i-1)\ell < x - a_i t < i\ell$ уравнениям (1). Другие свойства функций E_i и G_i будем находить по мере продолжения решений за границы указанных областей.

С помощью условий (3) определим функцию G_1 для отрицательных аргументов и функцию E_m для аргументов, больших $m\ell$:

$$G_1(-z) = E_1(z), \qquad z \geqslant 0, \tag{13}$$

$$E_m(m\ell + z) = G_m(m\ell - z), \qquad z \geqslant 0. \tag{14}$$

Воспользуемся краевыми условиями (4) и (5), а также выражением (11), чтобы найти значения функций $E_i(i\ell + z)$ и $G_{i+1}(i\ell - z)$ для $i = 2, \ldots, m-1$. Для этого равенство (5) перепишем в следующем виде:

$$a_{i+1}\alpha_i\,[E_i(i\ell + a_i t) - G_i(i\ell - a_i t)] = -a_i\beta_{i+1}\,[E_{i+1}(i\ell + a_{i+1}t) - G_{i+1}(i\ell - a_{i+1}t)] + A_i^0. \tag{15}$$

Здесь A_i^0 — некоторая константа. Представим условие (4) для $i = 2, \ldots, m-1$:

$$E_i(i\ell + a_i t) + G_i(i\ell - a_i t) = E_{i+1}(i\ell + a_{i+1} t) + G_{i+1}(i\ell - a_{i+1} t). \tag{16}$$

Умножив равенство (15) на $-a_i\beta_{i+1}$ и сложив с (16), выразим $E_i(i\ell + a_i t)$. Затем равенство (15) умножаем на $-a_{i+1}\alpha_i$ и складываем с (16). Получаем $G_{i+1}(i\ell - a_{i+1}t)$:

$$\begin{gathered} E_i(i\ell + a_i t) = \gamma_i G_i(i\ell - a_i t) - \varkappa_i^1 E_{i+1}(i\ell + a_{i+1} t) + A_i, \\ G_{i+1}(i\ell - a_{i+1} t) = \varkappa_i^2 G_i(i\ell - a_i t) - \gamma_i E_{i+1}(i\ell + a_{i+1} t) + B_i. \end{gathered}$$

Здесь введены обозначения: $\varkappa_i^1 = \dfrac{2a_i\beta_{i+1}}{a_{i+1}\alpha_i - a_i\beta_{i+1}}$, $\varkappa_i^2 = \dfrac{2a_{i+1}\alpha_i}{a_{i+1}\alpha_i - a_i\beta_{i+1}}$, $\gamma_i = 1 + \varkappa_i^1$, а A_i и B_i — некоторые константы, $i = 2, \ldots, m-1$. На константы краевой задачи (1) – (7) получаем ограничение:

$$a_{i+1}\alpha_i - a_i\beta_{i+1} \neq 0, \qquad i = 2, \ldots, m-1. \tag{17}$$

Полученные выражения для $0 \leqslant z \leqslant \ell$ представим в следующем виде:

$$E_i(i\ell + z) = \gamma_i G_i(i\ell - z) - \varkappa_i^1 E_{i+1}\left(i\ell + \frac{a_{i+1}}{a_i}\,z\right) + A_i, \tag{18}$$

$$G_{i+1}(i\ell - z) = \varkappa_i^2 G_i\left(i\ell - \frac{a_i}{a_{i+1}}\,z\right) - \gamma_i E_{i+1}(i\ell + z) + B_i, \tag{19}$$

где константы A_i и B_i определяются равенствами

$$A_i = E_i(i\ell) - \gamma_i G_i(i\ell) + \varkappa_i^1 E_{i+1}(i\ell), \qquad B_i = G_{i+1}(i\ell) + \gamma_i E_{i+1}(i\ell) - \varkappa_i^2 G_i(i\ell).$$

Обратим внимание на то, что выражение (18) представляет собой рекуррентное соотношение, ибо если $z > \dfrac{a_i}{a_{i+1}}\,\ell$, т.е. $z = \dfrac{a_i}{a_{i+1}}\,\ell + \zeta$, $\zeta > 0$, то функция $E_i(i\ell + z)$ определяется с помощью функции $E_{i+1}\left((i+1)\ell + \dfrac{a_{i+1}}{a_i}\,\zeta\right)$, и т.д. Наконец, функция $E_m(m\ell + z)$ имеет вид (14). Причем если $z > \ell$ в (14), то по формуле (19) при $i = m-1$ находим требуемую функцию. Для нахождения соответствующих значений функций $E_i(i\ell + z)$ и $G_{i+1}(i\ell - z)$ с помощью формул (18) и (19) также используются найденные значения (12) функций $E_i(x)$ и $G_i(x)$.

Наконец, определим выражения для функций $E_1(\ell + z)$ и $G_2(\ell - z)$. Для этого прежде всего найдем решение $y(t)$ задачи Коши (7):

$$y(t) = y^0 \cos bt + \frac{y^1}{b}\,\sin bt + \frac{1}{b}\int\limits_0^t \left[\,\mu(\tau) + k u^1(\ell, \tau)\right] \sin b(t - \tau)\, d\tau, \qquad t \geqslant 0. \tag{20}$$

В (4) при $i = 1$ подставим выражение из (11) и продифференцируем полученное равенство по t. Получаем уравнение

$$a_1\left[E_1'(\ell + a_1 t) - G_1'(\ell - a_1 t)\right] - a_2\left[E_2'(\ell + a_2 t) - G_2'(\ell - a_2 t)\right] = 0. \tag{21}$$

Далее воспользуемся условием (6), выражением (20) функции $y(t)$ и представлением (11) функций $u^i(x,t)$, $i = 1, 2$. Получаем уравнение

$$\begin{aligned} c_1\left[E_1'(\ell + a_1 t) + G_1'(\ell - a_1 t)\right] + c_2\left[E_2'(\ell + a_2 t) + G_2'(\ell - a_2 t)\right] &= \\ = f(t) + \frac{k}{b}\int\limits_0^t E_1(\ell + a_1\tau) \sin b(t - \tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{22}$$

где обозначено $f(t) = y^0 \cos bt + \dfrac{y^1}{b} \sin bt + \dfrac{1}{b}\int\limits_0^t [\,\mu(\tau) + k\,G_1(\ell - a_1\tau)] \sin b(t-\tau)\,d\tau$.

Исключим функцию $G_2'(\ell - a_2 t)$ из уравнений (21) и (22), находим интегро-дифференциальное уравнение для функции $E_1(\ell + a_1 t)$:

$$a_1 E_1'(\ell + a_1 t) + \frac{a_2 k}{b\varkappa}\int\limits_0^t E_1(\ell + a_1\tau)\sin b(t-\tau)\,d\tau = F(t). \qquad (23)$$

Здесь введены обозначения $\varkappa = [a_1c_2 - a_2c_1]/a_1$ и

$$F(t) = -\frac{a_2}{\varkappa}\left[y^0\cos bt + \frac{y^1}{b}\sin bt + \frac{1}{b}\int\limits_0^t [\mu(\tau) + kG_1(\ell - a_1\tau)]\sin b(t-\tau)\,d\tau\right] +$$
$$+ \frac{1}{\varkappa}\left[(a_1c_2 + a_2c_1)G_1'(\ell - a_1 t) + 2a_2c_2E_2'(\ell + a_2 t)\right]. \qquad (24)$$

Очевидно, что коэффициенты a_i и c_i, $i = 1, 2$, должны удовлетворять условию

$$a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0. \qquad (25)$$

Для нахождения функции $E_1(\ell + a_1 t)$ воспользуемся операционным исчислением. Обозначим $E_1(\ell + a_1 t)$ через $\mathcal{E}(t)$ и через $\widehat{\mathcal{E}}(p)$ — преобразование Лапласа функции $\mathcal{E}(t)$. От уравнения (23) приходим к уравнению $-\mathcal{E}(0) + p\,\widehat{\mathcal{E}}(p) + \dfrac{a_2 k}{b\varkappa}\,\widehat{\mathcal{E}}(p)\,\dfrac{b}{p^2 + b^2} = \widehat{F}(p)$. Откуда находим $\widehat{\mathcal{E}}(p) = \dfrac{p^2 + b^2}{p^3 + b^2 p + a_2 k/\varkappa}\,\left[\widehat{F}(p) + \mathcal{E}(0)\right]$. Следовательно, функция $E_1(\ell + a_1 t)$ имеет следующий вид: $E_1(\ell + a_1 t) = E_1(\ell)K(t) + \int\limits_0^t K(t-\tau)F(\tau)\,d\tau$, или, если обозначить $a_1 t = z$,

$$E_1(\ell + z) = E_1(\ell)K(z/a_1) + \int\limits_0^{z/a_1} K(z/a_1 - \tau)F(\tau)\,d\tau. \qquad (26)$$

Здесь $K(t)$ — функция, для которой $\widehat{K}(p) = \dfrac{p^2 + b^2}{p^3 + b^2 p + a_2 k/\varkappa}$ является преобразованием Лапласа. Явный вид функции $K(t)$ зависит от нулей многочлена $p^3 + b^2 p + a_2 k/\varkappa$. Возможны два случая.

1. *Многочлен имеет три различных действительных нуля.* Пусть выполняется равенство $p^3 + b^2 p + a_2 k/\varkappa = (p - r_1)(p - r_2)(p - r_3)$, тогда

$$\frac{p^2 + b^2}{p^3 + b^2 p + a_2 k/\varkappa} = \frac{C_1}{p - r_1} + \frac{C_2}{p - r_2} + \frac{C_3}{p - r_3}, \qquad K(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + C_3 e^{r_3 t}.$$

Постоянные C_i, $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются. При этом найденная функция $K(t)$ обладает следующими свойствами:

$$K(0) = 1, \quad K'(0) = 0, \quad K''(0) = 0. \qquad (27)$$

Эти свойства проверяются непосредственно, если использовать связь коэффициентов рассматриваемого многочлена с постоянными C_i и его нулями r_i, $i = 1, 2, 3$.

2. *Многочлен имеет один действительный нуль и два комплексно сопряженных нуля.* В этом случае выполняется $p^3 + b^2 p + a_2 k/\varkappa = (p - s_1)((p - s_2)^2 + s_3^2)$. Тогда

$$\frac{p^2 + b^2}{p^3 + b^2 p + a_2 k/\varkappa} = \frac{D_1}{p - s_1} + \frac{D_2(p - s_2) + D_3 s_3}{(p - s_2)^2 + s_3^2}, \qquad K(t) = D_1 e^{s_1 t} + D_2 e^{s_2 t}\cos s_3 t + D_3 e^{s_2 t}\sin s_3 t.$$

Полученная функция $K(t)$ также обладает свойствами (27).

Из равенства (4) при $i=1$ и формулы (11) находим функцию $G_2(\ell - z)$ при $z \geqslant 0$:

$$G_2(\ell - z) = E_1\left(\ell + \frac{a_1}{a_2}\,z\right) + G_1\left(\ell - \frac{a_1}{a_2}\,z\right) - E_2(\ell + z). \tag{28}$$

Заметим, что полученное выражение (28) содержит функцию $E_1\left(\ell + \dfrac{a_1}{a_2}\,z\right)$. Она определена в (26).

Доказана следующая теорема.

Теорема1. *Пусть функции* $\varphi_i(x) \in C^2[(i-1)\ell, i\ell]$ *и* $\psi_i(x) \in C^1[(i-1)\ell, i\ell]$ *удовлетворяют условиям* (9) *при* $i = 1, \ldots, m$, *причем коэффициенты краевой задачи* (1) – (7) *удовлетворяют условиям* (17) *и* (25). *Тогда каждая непрерывная функция* $\mu(t)$ *однозначно определяет единственные решения* $u^i(t,x)$ *из* $C^2(\overline{Q^i})$ *задачи* (1) – (7), *которые представимы в виде* (11). *Здесь* $E_i(x)$ *и* $G_i(x)$ *заданы при* $(i-1)\ell \leqslant x \leqslant i\ell$ *формулами* (12) *для* $i = 1, \ldots, m$; *при* $z \geqslant 0$ *функции* $E_i(i\ell + z)$ *имеют вид* (18), *а функции* $G_{i+1}(i\ell - z)$ *определяются формулами* (19) *для* $i = 2, \ldots, m-1$. *Наконец, функции* $E_m(m\ell + z)$ *и* $E_1(\ell + z)$ *определяются выражениями* (14) *и* (26) *соответственно, а функции* $G_1(-z)$ *и* $G_2(\ell - z)$ *определены соответственно в* (13) *и* (28).

4. Решение задачи управляемости

Введем обозначения $t_i = \ell/a_i$, $i = 1, \ldots, m$, тогда в силу условия (8) выполняется $t_i \neq t_{i+1}$, $i = 1, \ldots, m-1$. Гашение колебаний рассматриваемой сети возможно лишь при условии соизмеримости промежутков времени t_i, $i = 1, \ldots, m$, т. е. при условии существования таких чисел $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, m$, что $a_1/n_1 = \ldots = a_m/n_m$.

Из условий (10) и выражений (11) получаем следующую систему уравнений:

$$E_i(x + a_iT) = H_i, \quad G_i(x - a_iT) = -H_i, \qquad (i-1)\ell \leqslant x \leqslant i\ell, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{29}$$

где H_i — некоторые постоянные.

Функция $\mu(t)$ содержится в выражении (24) для $F(t)$, через которую в свою очередь определяется функция $E_1(\ell + z)$ (см. (26)). Будем гасить колебания в течение периода времени $T = 2t_1$. Для того чтобы найти управляющую функцию $\mu(t)$, воспользуемся уравнениями (29) при $i = 1$:

$$E_1(x + a_1T) = H_1, \quad G_1(x - a_1T) = -H_1, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell. \tag{30}$$

При $x = 0$ из уравнений (30) и (13) находим, что $H_1 = 0$.

Далее из (30), используя выражение (13), получаем $E_1(\ell + a_1t) = 0$, где $0 \leqslant t \leqslant T$. В частности, $E_1(\ell) = 0$. Затем по равенству (26) переходим к интегральному уравнению:

$$0 = \int\limits_0^t K(t-\tau)F(\tau)\,d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{31}$$

Откуда следует, что $F(t) \equiv 0$ для $0 \leqslant t \leqslant T$.

Теперь воспользуемся формулой (24) для функции $F(t)$. Это равенство продифференцируем дважды по t:

$$\begin{aligned} &- y^0 b^2 \cos bt - y^1 b \sin bt + \mu(t) + kG_1(\ell - a_1t) - \\ &\quad - b\int\limits_0^t [\mu(\tau + kG_1(\ell - a_1\tau)]\,\sin b\tau\,d\tau = a_1^2\,\frac{a_1c_2 + a_2c_1}{a_2}\,G_1^{(3)}(\ell - a_1t) + 2a_2^2c_2E_2^{(3)}(\ell + a_2t). \end{aligned}$$

Сложим полученное уравнение и уравнение (24), умноженное на b^2. Из полученного выражения находим управляющую функцию $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \frac{a_1c_2 + a_2c_1}{a_2}\left[a_1^2G_1^{(3)}(\ell - a_1t) + b^2G_1'(\ell - a_1t)\right] + \\ + 2c_2\left[a_2^2E_2^{(3)}(\ell + a_2t) + b^2E_2'(\ell + a_2t)\right] - kG_1(\ell - a_1t). \tag{32}$$

Замечание 2. Обратим внимание на тот факт, что формула (32) требует повышенной гладкости функций начального состояния, чем это требовалось в теореме 1. Предположим, что $\varphi_i \in C^3[(i-1)\ell, i\ell]$ и $\psi_i \in C^2[(i-1)\ell, i\ell]$, $i = 1, \ldots, m$. Следовательно, из согласования начальных и граничных условий краевой задачи (1) – (7) найдем дополнительные условия на функции φ_i и ψ_i:

$$\begin{gathered} \varphi_1^{(3)}(0) = \varphi_m^{(3)}(m\ell) = 0, \\ a_i^2\varphi_i''(i\ell) = a_{i+1}^2\varphi_{i+1}''(i\ell), \quad a_i^2\psi_i''(i\ell) = a_{i+1}^2\psi_{i+1}''(i\ell), \qquad i = 1, \ldots, m-1, \\ \alpha_i a_i^2\varphi_i^{(3)}(i\ell) + \beta_{i+1}a_{i+1}^2\varphi_{i+1}^{(3)}(i\ell) = 0, \qquad i = 2, \ldots, m-1, \\ c_1a_1^2\varphi_1^{(3)}(\ell) + c_2a_2^2\varphi_2^{(3)}(\ell) = -b^2y^0 + k\varphi_1(\ell) + \mu(0). \end{gathered} \tag{33}$$

Таким образом, уравнения при $i = 1$ системы (29) позволяют определить управляющую функцию $\mu(t)$, остальные уравнения системы дают дополнительные условия на функции $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(x)$, $(j-1)\ell \leqslant x \leqslant j\ell$, $j = 2, \ldots, m$. Для того чтобы получить эти условия, необходимо учитывать соотношение коэффициентов a_j, $j = 1, \ldots, m$. Рассмотрим один простой частный случай.

4.1. Случай $m = 3$ и $a_1 = a_2/2 = a_3$

В этом случае $t_1 = 2t_2 = t_3$. Уравнения системы (29) при $i = 1$ дают условие: $E_1(\ell + z) = 0$ для $0 \leqslant z \leqslant 2\ell$. Остальные уравнения системы принимают следующий вид:

$$E_2(5\ell + z) = H_2, \quad G_2(z - 3\ell) = -H_2, \qquad 0 \leqslant z \leqslant \ell; \tag{34}$$

$$E_3(4\ell + z) = H_3, \quad G_3(z) = -H_3, \qquad 0 \leqslant z \leqslant \ell. \tag{35}$$

Последовательно применяя равенства (18) и 19) для $i = 2$, а также равенство (28), находим из системы (34) – (35) выражения

$$H_2 + \gamma_2A_2 - A_2 = \\ = \gamma_2E_1\left(\frac{z}{2}\right) - \gamma_2^2G_1\left(\ell - \frac{z}{2}\right) + \gamma_2^2E_2(\ell + z) + \gamma_2\varkappa_2^1E_3\left(2\ell + \frac{\ell + z}{2}\right) - \varkappa_2^1G_3\left(2\ell + \frac{\ell - z}{2}\right);$$

$$-H_2 - \gamma_2A_2 + A_2 = \\ = -\gamma_2G_1\left(\frac{z}{2}\right) + E_1\left(\ell - \frac{z}{2}\right) + \gamma_2^2G_2(\ell + z) - \gamma_2\varkappa_2^1E_3\left(2\ell + \frac{\ell - z}{2}\right) + \varkappa_2^1G_3\left(2\ell + \frac{\ell + z}{2}\right);$$

$$-B_2 + H_3 = \varkappa_2^2G_1\left(\ell - \frac{z}{2}\right) - \varkappa_2^2E_2(\ell + z) - \gamma_2E_3\left(2\ell + \frac{\ell + z}{2}\right);$$

$$-B_2 + H_3 = \varkappa_2^2G_2(\ell + z) - \gamma_2E_3\left(2\ell + \frac{\ell - z}{2}\right);$$

$$-H_3 - B_2 + \varkappa_2^2A_2 = \\ = \varkappa_2^2E_1\left(\frac{z}{2}\right) - \gamma_2\varkappa_2^2G_1\left(\ell - \frac{z}{2}\right) + \gamma_2\varkappa_2^2E_2(\ell + z) + \varkappa_2^1\varkappa_2^2E_3\left(2\ell + \frac{\ell + z}{2}\right) - \gamma_2G_3\left(2\ell + \frac{\ell - z}{2}\right);$$

$$
\begin{aligned}
&-H_3 - B_2 + \varkappa_2^2 A_2 = \\
&\qquad = \varkappa_2^2 G_1\left(\frac{z}{2}\right) - \gamma_2 \varkappa_2^2 G_2(\ell + z) + \varkappa_2^1 \varkappa_2^2 E_3\left(2\ell + \frac{\ell - z}{2}\right) - \gamma_2 G_3\left(2\ell + \frac{\ell + z}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Откуда получаем условия на функции φ_i, ψ_i, $i = 1,\,2,\,3$ для $0 \leqslant z \leqslant \ell$:

$$
\begin{gathered}
G_3'\left(2\ell + \frac{\ell - z}{2}\right) = 0; \qquad G_3'\left(2\ell + \frac{\ell + z}{2}\right) = \frac{\varkappa_2^2}{\gamma_2} E_1'\left(\ell - \frac{z}{2}\right); \\
E_3'\left(2\ell + \frac{\ell - z}{2}\right) = -2\,\frac{\varkappa_2^2}{\gamma_2} G_2'(\ell + z); \\
E_3'\left(2\ell + \frac{\ell + z}{2}\right) = \frac{\varkappa_2^2}{\gamma_2}\left[E_2'(\ell + z) + G_1'\left(\ell - \frac{z}{2}\right)\right]; \\
2\left[E_2'(\ell + z) + G_1'\left(\ell - \frac{z}{2}\right)\right] = \frac{1}{\gamma_2} E_1'\left(\frac{z}{2}\right) - \left[\frac{1}{\delta_2} - \frac{1}{\gamma_2}\right] E_1'\left(\ell - \frac{z}{2}\right); \\
2G_2'(\ell + z) = -\frac{1}{\gamma_2} E_1'\left(\frac{z}{2}\right) - \left[\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\gamma_2}\right] E_1'\left(\ell - \frac{z}{2}\right).
\end{gathered}
\tag{36}
$$

Сформулируем результат.

Предложение 1. Пусть $m = 3$ и $a_1 = a_2/2 = a_3$; для функций начального состояния $\varphi_j(x) \in C^3[(j-1)\ell, j\ell]$ и $\psi_j(x) \in C^2[(j-1)\ell, j\ell]$, $j = 1, 2, 3$, выполнены условия теоремы 1 и равенства (33), (36). Тогда непрерывная на отрезке $[0, T]$ при $T = 2t_1$ управляющая функция $\mu(t)$, определяющая решения $u^i(x,t)$ краевой задачи (1) – (7), $i = 1, 2, 3$, с условиям (10), имеет вид (32).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-01-00217.

Литература

1. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Управления колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2005. — Т. 45, № 10. — С. 1766–1784.
2. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости колебаний системы связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2006. — Т. 46, № 6. — С. 1002–1018.
3. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Управляемость упругих колебаний систем с распределенными и сосредоточенными параметрами по двум границам // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2006. — Т. 46, № 11. — С. 2032–2044.
4. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2009. — Т. 49, № 5. — С. 815–825.
5. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // Труды ИМиМ УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 1. — С. 85–92.
6. *Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2008.
7. *Кононенко В.О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. — М.: Наука, 1964.
8. *Егоров А.И.* Основы теории управления. — М.: Физматлит, 2004.

Поступила в редакцию 29.02.2012.