УДК 517.956.225

Н.А. Гусев

Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет)

О зависимости градиента решения задачи Неймана для уравнения Лапласа от параметра

Рассматривается задача Неймана для уравнения Лапласа, граничное условие которой зависит от параметра $t \in [0,T]$, $T \in \mathrm{R}$. Исследуются дифференциальные свойства градиента классического решения. Устанавливаются оценки нормы градиента в пространстве Гёльдера. Показано, что эти оценки не улучшаемы. С помощью полученных оценок устанавливаются оценки проекторов на пространства градиентных и соленоидальных векторных полей (проекторы Лерэ–Гельмгольца) [1] в пространствах Гёльдера.

Ключевые слова: градиент решения, задача Неймана, уравнение Лапласа, пространство Гёльдера, зависимость граничного условия от параметра, проектор Лерэ–Гельмогольца.

I. Обозначения

Пусть $\Omega \subset R^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^{l+1+\alpha}$, $T > 0$. Обозначим $Q = \Omega \times (0,T)$, $S = \partial\Omega \times (0,T)$, и пусть $C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ — пространство Гёльдера с нормой

$$\|u\|_{l+\alpha} \equiv \|u\|_{l+\alpha,\Omega} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| +$$

$$+\sum_{j=1}^{l} \sum_{|p|=j} \max_{x\in\overline{\Omega}} |\partial_x^p u(x)| + \sum_{|p|=l} [\partial_x^p u]_x^\alpha,$$

где

$$[u]_x^\alpha = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \sup_{\Delta x: x+\Delta x\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x+\Delta x) - u(x)|}{|\Delta x|^\alpha},$$

p — мультииндекс, $l \in N \cup \{0\}$, $\alpha \in [0,1)$. Пусть $C^{l+\alpha,m+\beta}(\overline{Q})$ — пространство с нормой

$$\|u\|_{l+\alpha,m+\beta} \equiv \|u\|_{l+\alpha,m+\beta,Q} = \max_{t\in[0,T]} \|u(\cdot,t)\|_{l+\alpha} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \max_{(x,t)\in\overline{Q}} |\partial_t^j u(x,t)| + [\partial_t^m u]_t^\beta,$$

где

$$[u]_t^\beta = \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \sup_{\Delta t:(x,t+\Delta t)\in\overline{Q}} \frac{|u(x,t+\Delta t) - u(x,t)|}{|\Delta t|^\beta},$$

p — мультииндекс, l, $m \in N \cup \{0\}$, α, $\beta \in [0,1)$.

Норму пространства $C^{l+\alpha}(\partial\Omega)$ будем обозначать как $\|\cdot\|_{l+\alpha,\partial\Omega}$ (определение пространства $C^{l+\alpha}(\partial\Omega)$ есть, например, в [1]). Аналогично введём пространство $C^{k+\alpha,m+\beta}(\overline{S})$ с нормой

$$\|f\|_{l+\alpha,m+\beta,S} = \max_{t\in[0,T]} \|f(\cdot,t)\|_{l+\alpha,\partial\Omega} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \max_{(x,t)\in\overline{S}} |\partial_t^j f(x,t)| + [\partial_t^m f]_{t,\partial\Omega}^\beta,$$

где

$$[u]_{t,\partial\Omega}^\beta = \sup_{(x,t)\in\overline{S}} \sup_{\Delta t:(x,t+\Delta t)\in\overline{S}} \frac{|u(x,t+\Delta t) - u(x,t)|}{|\Delta t|^\beta}.$$

Для удобства обозначим

$$\|f\|_{\infty,\Omega} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|, \qquad \|f\|_{\infty,Q} = \max_{(x,t)\in\overline{Q}} |f(x,t)|.$$

Ниже, если не оговорено противное, будем считать, что α, $\beta \in (0,1)$.

II. Введение

Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,T]; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g, \qquad (1)$$

где граничное условие g для нормальной производной $\partial u/\partial n$ зависит от параметра $t \in [0,T]$: $g = g(x,t)$, $g \in C^{l+\alpha,m+\beta}(\overline{S})$, причём при каждом $t \in [0,T]$

$$\oint_{\partial\Omega} g(x,t)dS = 0.$$

Поскольку решение задачи Неймана для уравнения Лапласа единственно с точностью до аддитивной константы, решение задачи (1) единственно с точностью до произвольной аддитивной функции $U(t)$ и может не быть даже непрерывным по t. Тем не менее в данной работе будет показано, что существует решение задачи (1), дифференциальные свойства по параметру t которого определяются соответствующими свойствами граничного условия g. Будут получены оценки нормы этого решения и его градиента (по пространственным переменным) в пространствах Гёльдера, введённых выше. Также будет показано, что полученные оценки в определённом смысле неулучшаемы.

III. Дифференциальные свойства решения задачи Неймана

Из классической теории потенциала известна следующая теорема (см. [2], теорема 1 на с. 208).

Теорема 1. При каждом $t \in [0,T]$ и $\alpha' \in (0,\alpha)$ существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (1), удовлетворяющее условию $\int\limits_{\Omega} u(x,t)dx = 0$. Для этого решения справедливы оценки

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} \leqslant C_1 \|g(\cdot,t)\|_{\infty,\partial\Omega},$$

$$\|u(\cdot,t)\|_{l+1+\alpha',\Omega} \leqslant C_2 \|g(\cdot,t)\|_{l+\alpha,\partial\Omega}, \qquad (2)$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от g.

Полученную с помощью теоремы 1 функцию $u(x,t)$ мы будем далее понимать под решением задачи (1). Целью данной работы является исследование дифференциальных свойств по параметру t функции $u(x,t)$ и её градиента $\nabla u(x,t)$. Сформулируем основные результаты.

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega \in C^{l+1+\alpha}$ и $g \in C^{l+\alpha,m+\beta}(\overline{S})$, причём при $t \in [0,T]$ $\oint\limits_{\partial\Omega} g dS = 0$. Решение задачи (1) при любом $\alpha' \in (0,\alpha)$ удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{l+1+\alpha',m+\beta} \leqslant C_1 \|g\|_{l+\alpha,m+\beta,S},$$

а его градиент ∇u для каждого $\beta' \in (0,\beta)$ удовлетворяет оценке

$$\|\nabla u\|_{l+\alpha',m+\beta'} \leqslant C_2 \|g\|_{l+\alpha,m+\beta,S}, \qquad (3)$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от g.

Замечание. При $\beta' = \beta$ оценка (3) неверна. Это следует из следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть $D = \{(x,y,z) : z = 0,\ x^2 + y^2 \leqslant R^2\} \subset \partial\Omega \in C^{\infty}$, $R > 2$. Пусть $h(x) \in C^{\infty}(R)$ — неубывающая функция, равная нулю при $x < 0$ и равная 1 при $x > 1$. Рассмотрим потенциал простого слоя

$$V(\mathrm{x},t) = \oint\limits_{\partial\Omega} \frac{\mu(\mathrm{y},t)}{|\mathrm{x} - \mathrm{y}|} dS_{\mathrm{y}}$$

с плотностью $\mu(\mathrm{y},t)$, равной нулю на $\partial\Omega \backslash D$ и заданной на D в полярных координатах $(x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi)$ формулой

$$\mu(r,\varphi,t) = t^{\beta}\omega(r,t)\cos\varphi,$$

где $\omega(r,t) = t^{\beta}h(r|\ln t|)h(R-r)$. Тогда при каждом $t \in [0,T]$ функция $V(\mathrm{x},t)$ является решением уравнения Лапласа и $\frac{\partial V}{\partial n} \in C^{\alpha,\beta}(\bar{S})$. При этом $\nabla V \in C^{\alpha,\beta'}(\bar{Q})$ для любого $\beta' \in (0,\beta)$, но $\nabla V \notin C^{\alpha',\beta}(\bar{Q})$ при $\alpha' \in (0,\alpha)$.

IV. Доказательства основных теорем

Для доказательства теорем 2 и 3 нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Если $u \in C^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$, где $\alpha,\beta \in (0,1)$, то при любых $\{(x_1,t_1),(x_2,t_2)\} \in \bar{Q}$ и $\sigma \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$|\Delta_x\Delta_t u| = |\Delta_t\Delta_x u| \leqslant 2\|u\|_{\alpha,\beta}|x_2 - x_1|^{\sigma\alpha}|t_2 - t_1|^{(1-\sigma)\beta},$$

где $\Delta_x u(x,t) = u(x_2,t) - u(x_1,t)$ и $\Delta_t u(x,t) = u(x,t_2) - u(x,t_1)$.

Доказательство. По условию

$$|\Delta_x u(x,t)| \leqslant \|u\|_{\alpha,\beta}|x_2 - x_1|^{\alpha}$$

и

$$|\Delta_t u(x,t)| \leqslant \|u\|_{\alpha,\beta}|t_2 - t_1|^{\beta}.$$

Тогда

$$|\Delta_t\Delta_x u| \leqslant 2\|u\|_{\alpha,\beta}|x_2 - x_1|^{\alpha},$$
$$|\Delta_t\Delta_x u| \leqslant 2\|u\|_{\alpha,\beta}|t_2 - t_1|^{\beta}.$$

Тогда доказываемое неравенство следует из равенства $|\Delta_t\Delta_x u| = |\Delta_t\Delta_x u|^{\sigma}|\Delta_t\Delta_x u|^{1-\sigma}$.

Лемма 2. (см. [3], с. 221, лемма 2.) Пусть $u \in C^{l_1,l_2}(\overline{Q})$ (где l_1, $l_2 \in R\backslash Z$ — положительные числа) и r_1, $r_2 \in N \cup \{0\}$ — такие, что $\mu = 1 - r_1/l_1 - r_2/l_2 > 0$. Тогда $\partial_x^{r_1}\partial_t^{r_2}u \in C^{\rho_1,\rho_2}(\bar{Q})$, где $\rho_1 = \mu l_1$, $\rho_2 = \mu l_2$, причём справедливо неравенство $\|\partial_x^{r_1}\partial_t^{r_2}u\|_{\rho_1,\rho_2} \leqslant C\|u\|_{l_1,l_2}$, где константа C не зависит от u.

Заметим, что леммы 1 и 2 останутся справедливыми, если в их формулировках заменить Q на S, поскольку функции из $C^{l_1,l_2}(\overline{S})$ можно считать граничными значениями функций из $C^{l_1,l_2}(\overline{Q})$ на $\partial\Omega$ [1].

Доказательство теоремы 2 проведём индукцией по m. При $m = 0$ по теореме 1 для каждого $t \in [0,T]$:

$$\|u(\cdot,t)\|_{l+1+\alpha',\Omega} \leqslant C_2\|g(\cdot,t)\|_{l+\alpha,\partial\Omega};$$

при любых t_1, $t_2 \in [0,T]$ в силу линейности задачи Неймана имеем

$$\frac{\|u(\cdot,t_2) - u(\cdot,t_1)\|_{\infty,\Omega}}{|t_2 - t_1|^{\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\frac{\|g(\cdot,t_2) - g(\cdot,t_1)\|_{\infty,\partial\Omega}}{|t_2 - t_1|^{\beta}} \leqslant C_1\|g\|_{l+\alpha,\beta,S}.$$

Из полученных оценок следует, что

$$\|u\|_{l+\alpha',\beta} \leqslant C\|g\|_{l+\alpha,\beta,S},\ C = \mathrm{const}\,.$$

Возьмём $\sigma = 1 - \beta'/\beta < 1$, тогда $g \in C^{\sigma\alpha,\beta}(\bar{S})$. В силу линейности задачи Неймана по теореме 1 имеем оценку (см. неравенство (2) при $l = 0$):

$$\frac{\|\nabla u(\cdot,t_2) - \nabla u(\cdot,t_1)\|_{\infty,\Omega}}{|t_2 - t_1|^{\beta'}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\frac{\|g(\cdot,t_2) - g(\cdot,t_1)\|_{\sigma\alpha,\partial\Omega}}{|t_2 - t_1|^{\beta'}}.$$

В силу леммы 1

$$\|g(\cdot,t_2) - g(\cdot,t_1)\|_{\sigma\alpha,\partial\Omega} = \|g(\cdot,t_2) - g(\cdot,t_1)\|_{\infty,\partial\Omega} +$$

$$+ \max_{x_1,x_2\in\Omega}\frac{\|g(x_2,t_2) - g(x_1,t_1)\|_{\infty,\partial\Omega}}{|x_2 - x_1|^{\sigma\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \|g\|_{0,\beta}|t_2-t_1|^{\beta}+$$

$$+\frac{\|g\|_{\sigma\alpha,\beta,S}|x_2-x_1|^{\sigma\alpha}|t_2-t_1|^{(1-\sigma)\beta}}{|x_2-x_1|^{\sigma\alpha}},$$

поэтому

$$\frac{\|\nabla u(\cdot,t_2)-\nabla u(\cdot,t_1)\|_{\infty,\Omega}}{|t_2-t_1|^{\beta'}} \leqslant C_1(\|g\|_{0,\beta}|t_2-t_1|^{\beta-\beta'}+$$

$$+\|g\|_{\sigma\alpha,\beta,S}) \leqslant C\|g\|_{\sigma\alpha,\beta,S}.$$

Итак, для $m = 0$ теорема 2 доказана. Пусть эта теорема верна для некоторого m и $g \in C^{l+\alpha,m+1+\beta}(\overline{S})$. Тогда в силу леммы 2 $\partial_t g \in C^{\gamma,m+\beta}(\overline{S})$, где $\gamma = \frac{m+\beta}{m+1+\beta}(l+\alpha) > 0$. Для решения v задачи Неймана

$$\Delta v = 0,\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \partial_t g$$

мы уже можем воспользоваться доказываемой теоремой и получить оценки

$$\|v\|_{0,m+\beta} \leqslant C_1\|g\|_{l+\alpha,m+\beta,S},$$

$$\|\nabla v\|_{0,m+\beta'} \leqslant C_1\|g\|_{0,m+\beta,S}.$$

Остаётся заметить, что $u(x,t) = u(x,0)+\int\limits_0^t v(x,\tau)d\tau$ является решением исходной задачи Неймана (1).

Доказательство теоремы 3. Непосредственно проверяется, что плотность простого слоя μ, рассматриваемая в условии теоремы, принадлежит $C^{1,\beta}(\bar{S})$ и, следовательно, $C^{\alpha,\beta}(\bar{S})$ при любом $\alpha \in (0,1)$. По теореме Ляпунова при $t \in [0,T]$ имеем $\frac{\partial V}{\partial n}(\cdot,t) \in C^{\alpha}(\partial\Omega)$. В силу гладкости границы области нормальная производная $\frac{\partial V}{\partial n}$ является правильной нормальной производной и удовлетворяет неравенству

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial n}(\cdot,t)\right\|_{\infty,\Omega} \leqslant \|\mu(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega},$$

из которого следует, что $\frac{\partial V}{\partial n}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем β по параметру t. Тогда $\frac{\partial V}{\partial n} \in C^{\alpha,\beta}(\bar{S})$. По теореме 2 при любом $\beta' \in (0,\beta)$ $\nabla V \in C^{\alpha,\beta'}(\bar{Q})$. Однако

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\substack{\partial\Omega\\ x=0\\ y=0}} = -\int\limits_{(x,y)\in D}\frac{\mu(x,y,0,t)}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}xdS =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int\limits_0^R t^{\beta}\frac{\omega(r,t)}{r}dr = O(t^{\beta}\ln|\ln t|)$$

при $t \to 0$, то есть производная $\frac{\partial V}{\partial x}$ не удовлетворяет условию Гёльдера по t с показателем β.

V. О дифференциальных свойствах проекторов Лерэ–Гельмгольца

Пусть $J^0(\Omega)$ — замыкание по норме $L^2(\Omega)$ множества всех бесконечно дифференцируемых соленоидальных финитных векторных полей, $G(\Omega)$ — ортогональное в $L^2(\Omega)$ дополнение подпространства $J^0(\Omega)$. Пусть P_G — проектор $L^2(\Omega)$ на $G(\Omega)$, а P_J — проектор $L^2(\Omega)$ на $J^0(\Omega)$. Обозначим через $B(X,Y)$ множество линейных непрерывных отображений банахова пространства X в банахово пространство Y.

С помощью доказанной выше теоремы 2 можно доказать следующие утверждения.

Теорема 4. Пусть $\partial\Omega \in C^{l+1+\alpha}$ и $\vec{u} \in C^{l+\alpha,m+\beta}(\overline{Q}), \operatorname{div}\vec{u} \in C^{l-1+\alpha,m+\beta}(\overline{Q})$, $k \geqslant 1$. Тогда при любых $\alpha' \in (0,\alpha)$ и $\beta' \in (0,\beta)$ $P_G(\vec{u}) \in C^{l+\alpha',m+\beta'}(\overline{Q})$, причём

$$\|P_G(\vec{u})\|_{l+\alpha',m+\beta'} \leqslant C(\|(\vec{u},\vec{n})|_{\partial\Omega}\|_{l+\alpha,m+\beta}+$$

$$+\|\operatorname{div}\vec{u}\|_{l-1+\alpha,m+\beta}),$$

где константа C не зависит от $\vec{u}$.

Теорема 5. Пусть $\partial\Omega \in C^{l+1+\alpha}$. Тогда при любых $\alpha' \in (0,\alpha)$ и $\beta' \in (0,\beta)$ $P_G,P_J \in B(C^{l+\alpha,m+\beta}(\overline{Q}),C^{l+\alpha',m+\beta'}(\overline{Q}))$.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, контракт П532 от 05 августа 2009 г. и при поддержке гранта Федерального агентства по образованию, программа 1.2.1, контракт П938, а также при поддержке гранта РФФИ 09-01-12157-ОФИ-М.

Литература

1. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.

2. *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики. — М.: Гос. техн.-теорет. изд-во, 1953.

3. *Солонников В.А.* Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса // Тр. МИАН СССР. — 1964. — Т. 70. — С. 213–317.

Поступила в редакцию 31.03.2010.