

Московский физико-технический институт (ГУ)
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Программа курса

Все материалы по курсу выкладываются на сайте dm.fizteh.ru.

Основные цели и задачи курса:

- Выработать навык структурированного логического мышления.
- Научиться давать формальные определения и приводить примеры определяемых объектов.
- Научиться строить формальные записи математических утверждений и их доказательств и работать с этими записями.
- Научиться проводить математические рассуждения, не основанные на конкретных свойствах рассматриваемых объектов.

Основные темы курса (разделы, помеченные звёздочками, будут изучены только при наличии времени):

1. **Язык логики высказываний.** Понятия формального алфавита, слова, языка. Операции со словами и отношения на словах. Эквивалентность двух определённой правильной скобочной последовательности. Построение пропозициональных формул. Лемма о скобочном итоге и теорема об однозначности разбора.
2. **Булевы функции и пропозициональные формулы.** Булевы переменные и функции. Вычисление значения формулы на наборе значений переменных. Таблотологии и противоречия. Приведение формул к КНФ и ДНФ. Многочлены Жегалкина. Полные системы связей, теорема Поста.
3. **Исчисление высказываний.** Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Корректность исчисления высказываний. Лемма о дедукции. Полнота исчисления высказываний. Непротиворечивые и совместные семейства формул. Теорема о компактности для пропозициональных формул.
4. **Языки первого порядка.** Понятие сигнатуры. Построение формул первого порядка: термы, атомарные формулы, логические связки и кванторы. Параметры формулы. Понятие замкнутой формулы. Интерпретация сигнатуры. Истинность формулы в данной интерпретации на данной оценке. Выполнимость и общезначимость формул первого порядка. Замена связанной переменной. Предварённая нормальная форма. Выражение предикатов формулами первого порядка. Изоморфизмы и автоморфизмы интерпретаций. Примеры невыразимых предикатов. Метод элиминации кванторов. Элементарная эквивалентность интерпретаций. Теорема Эренфойхта.
5. **Исчисление предикатов и теория моделей.** Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Правило обобщения. Лемма о дедукции для исчисления предикатов. Корректность исчисления предикатов. Непротиворечивые и совместные теории. Теории и модели. Полные и экзистенциально полные теории. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Семантическое следование. Теорема Мальцева о компактности. Аксиоматизируемость теорий. Аксиомы равенства и нормальные модели.

- 6*. **Неклассические логики.** Интуиционистское исчисление высказываний. Конструктивное понимание логических связей. Модели Крипке. Модальная логика. Системы аксиом для модальных логик. Семантика Крипке.
- 7*. **Формальные языки.** Языки и грамматики. Иерархия Хомского. Детерминированные и недетерминированные конечные автоматы. Лемма о разрастании. Регулярные выражения. Контекстно-свободные грамматики.

Литература:

1. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть I. Начала теории множеств. М.: МЦНМО, 2002. (Электронная версия доступна на странице <http://www.mcsme.ru/free-books>)
2. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть II. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2002. (Электронная версия доступна на странице <http://www.mcsme.ru/free-books>)
3. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
4. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2004
5. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2002.
6. Фейс Р., Модальная логика, М.: Наука, 1975.
7. Пентус А.Е., Пентус М.Р., Математическая теория формальных языков, М.: Интернет-университет информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
8. Пентус М.Р. Введение в математическую логику. Конспект лекций на механико-математическом факультете МГУ, весна 2006.
<http://lpcs.math.msu.su/~pentus/ftp/mehmat/vmlk061e.pdf>
9. Плиско В.Е. Математическая логика. Конспект.
<http://lpcs.math.msu.su/~plisko/matlog.pdf>
10. Bilaniuk, S., A Problem Course in Mathematical Logic.
<http://euclid.trentu.ca/math/sb/pcml>
11. Hedin, A., Modal Logic (Lecture Notes for Applied Logic), 2008
<http://www2.math.uu.se/~hedin/TillLog/LectureNotesAL.pdf>

Дополнительная литература:

12. Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
13. Смаллиан Р. Как же называется эта книга? М.: Мир, 1981.
14. Линдон Р. Заметки по логике. М.: Мир, 1968.
15. Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. М.: Советское радио, 1979.

16. Хофштадтер Д. Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда. Самара: Бахрах-М, 2001.

Лекции проходят по средам в 15:30 в аудитории 123 ГК, читает Мусатов Д.В.

Семинары проходят по понедельникам в корпусе на Тимирязевской, их ведут Дашков Е.В. (295, 16:55; 299, 14:30), Колесниченко И.И. (296, 13:45), Раскин М.А. (294, 10:35), Уляшкина Ю.С. (297, 10:35). На семинарах разбираются задачи и сложные моменты из теоретического материала.

Самостоятельные работы на 10–15 минут проводятся на семинарах. Эти работы не влияют на итоговые оценки, но служат для самоконтроля усвоения материала.

Домашние задания выдаются и проверяются по усмотрению преподавателя, ведущего семинары.

Наборы задач для самостоятельного решения готовятся по каждой теме и публикуются на странице курса.

Контрольные работы и зачёт. В течение семестра проводятся три контрольные работы (предварительные даты: 8 октября, 19 ноября, 17 декабря), на каждой даётся 4 обычные задачи и 2 задачи повышенной трудности. Каждая задача оценивается из 10 баллов. После каждой контрольной даётся список дополнительных задач, которые можно сдавать в течение семестра или на зачёте исходя из 5 баллов за задачу. При этом засчитывается не более 4 задач по каждой контрольной, баллы складываются с оценкой за контрольную, но суммарный балл по каждой задаче не может превышать 10. В итоге по каждой контрольной имеется оценка: x_1, x_2, x_3 . Оценка за дифференцированный зачёт ставится по формуле:

$$\max\{1, \min\{10, 0.1(x_1 + x_2 + x_3) - 2, 0.5 \cdot \min\{x_1, x_2, x_3\} - 5\}\}$$

Например, чтобы получить отл(8), нужно в сумме за 3 контрольные набрать не меньше 100 баллов, а за каждую отдельную контрольную — не меньше 26.

Экзамен пройдёт весной по годовому курсу. По темам первого семестра будут даны один теоретический вопрос и одна задача. Решением преподавателя студент может быть освобождён от задачи по итогам работы на семинарах, выполнения домашних заданий, решения задач, написания самостоятельных и контрольных.