УДК 517.982.252

Г. М. Иванов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Уклонение выпуклой оболочки ограниченных множеств

Исследуется наибольшее уклонение выпуклой оболочки множества (УВО) от самого множества при условии, что множество содержится в единичном шаре. Для конечномерного пространства получена точная оценка сверху УВО в зависимости от размерности пространства. Приведена оценка сверху УВО через константу Липшица оператора метрического проектирования на гиперплоскость. Эта константа Липшица в свою очередь оценена сверху через модули гладкости и выпуклости пространства.

Ключевые слова: уклонение выпуклой оболочки, модуль опорной выпуклости.

1. Основные определения

Пусть E – линейное нормированное пространство размерности больше 1 (возможно, бесконечномерное). Через $\langle p, x\rangle$ обозначим значение функционала $p \in E^*$ на векторе $x \in E$. Для вектора $a \in E$ и функционала $p_0 \in E^*$ через $\mathfrak{B}_R(a)$ и $\mathfrak{B}^*_R(p_0)$ обозначим шары с радиусом R в пространствах E, E^* соответственно:

$$\mathfrak{B}_R(a) = \{x \in E : \|x - a\| \leqslant R\}, \qquad \mathfrak{B}^*_R(p_0) = \{p \in E^* : \|p - p_0\| \leqslant R\}.$$

Через $\operatorname{co} A$, ∂A, $\operatorname{int} A$ обозначим соответственно выпуклую оболочку, границу и внутренность множества $A \subset E$, через $\rho(x, A)$ – расстояние от точки $x \in E$ до множества A. *Уклонением* множества $A \subset E$ от множества $B \subset E$ называется величина

$$h^+(A, B) = \sup_{x \in A} \rho(x, B).$$

Заметим, что в ситуации $B \subset A$, которая имеет место ниже, уклонение $h^+(A, B)$ совпадает с расстоянием Хаусдорфа между множествами A и B. Величина $h^+(\operatorname{co} D, D)$ называется *уклонением выпуклой оболочки* (УВО) множества $D \subset E$. *УВО-модулем* пространства E назовем величину

$$\zeta_E = \sup_{D \subset \mathfrak{B}_1(0)} h^+(\operatorname{co} D, D).$$

Замечание 1.1. Непосредственно из определения следует, что для любого пространства E справедливы неравенства $1 \leqslant \zeta_E \leqslant 2$.

Пространство упорядоченных наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел x_i с нормой $\|x\| = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$ обозначим через ℓ^n_p.

Определение 1.1. Модулем выпуклости нормированного пространства E называется функция $\delta_E : (0, 2] \to \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x + y\|}{2} :\ x, y \in E,\ \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

Нормированное пространство E называется равномерно выпуклым, если $\delta_E(\varepsilon) > 0$ для любого $\varepsilon \in (0, 2]$.

Определение 1.2. Модулем гладкости нормированного пространства E называется функция $\rho_E : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$\rho_E(\tau) = \sup\left\{\frac{\|x + y\|}{2} + \frac{\|x - y\|}{2} - 1 :\ x, y \in E,\ \|x\| = 1, \|y\| = \tau\right\}.$$

Нормированное пространство E называется равномерно гладким, если

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\rho_E(\tau)}{\tau}=0.$$

Далее будет часто использовано следствие теоремы Хана—Банаха ([6] теорема 3.2): для любого вектора x из банахова пространства E существует функционал $p\in\partial\mathfrak{B}_1^*(0)$ такой, что $\langle p,x\rangle=\|x\|$.

Будем говорить, что функционал $p\in E^*$ является двойственным функционалом к вектору x из банахова пространства E, а вектор x будем называть двойственным вектором к функционалу p, если $\langle p,x\rangle=\|p\|\cdot\|x\|$. Заметим, что для рефлексивного банахова пространства для любого функционала $p\in E^*$ существует ему двойственный ненулевой вектор. Через $J_1(x)$ обозначим множество единичных функционалов, двойственных к вектору x.

Замечание 1.2. Любое равномерно выпуклое или равномерно гладкое банахово пространство рефлексивно [5].

Будем говорить, что вектор $y\in E$ *квазиперпендикулярен* вектору $x\in E$, и писать $y\urcorner x$, если существует функционал $p\in J_1(x)$ такой, что $\langle p,y\rangle=0$.

2. Уклонение выпуклой оболочки множеств в конечномерных пространствах

Лемма 2.1. *Если множество $\mathfrak{B}_1(O)\setminus\operatorname{int}\mathfrak{B}_r(O_1)$ не пусто, то оно линейно связно.*

Доказательство.
Будем предполагать, что $O\neq O_1$, иначе доказываемое утверждение тривиально. Обозначим точку пересечения луча O_1O с границей шара $\mathfrak{B}_1(O)$ через P. Из неравенства треугольника следует, что если множество $\mathfrak{B}_1(O)\setminus\operatorname{int}\mathfrak{B}_r(O_1)$ не пусто, то оно содержит точку P. Покажем, что множество $\partial\mathfrak{B}_1(O)\setminus\operatorname{int}\mathfrak{B}_r(O_1)$ линейно связно, откуда следует утверждение леммы. Для этого докажем, что в двумерном случае любая точка множества $\partial\mathfrak{B}_1(O)\setminus\operatorname{int}\mathfrak{B}_r(O_1)$ связана с точкой P. Предположим противное. Тогда на единичной окружности существуют точки A_1,B_1 такие, что они лежат по одну сторону от прямой OO_1, принадлежат окружностям $\partial\mathfrak{B}_r(O_1),\partial\mathfrak{B}_1(O)$, и на дуге A_1B_1 окружности $\partial\mathfrak{B}_1(O)$ найдется точка C_1 такая, что $\|C_1O_1\|>r$. Из точки O проведем лучи, параллельные лучам O_1A_1,O_1B_1 соответственно, пусть они пересекают единичную окружность $\partial\mathfrak{B}_1(O)$ в точках A,B соответственно. Из подобия шаров $\mathfrak{B}_1(O),\mathfrak{B}_r(O_1)$ следует, что $A_1B_1\parallel AB$. Из того, что точки A,B,A_1,B_1 лежат по одну сторону от прямой OO_1 и $OA\cap O_1A_1=\emptyset, OB\cap O_1B_1=\emptyset$, и выпуклости единичного шара, следует, что отрезки AB,A_1B_1 лежат на одной прямой, откуда $\|C_1O_1\|=r$. Противоречие. $\blacksquare$

Теорема 2.1. *Пусть E_n – линейное нормированное пространство размерности $n\geqslant 2$. Тогда $\zeta_{E_n}\leqslant 2\frac{n-1}{n}$. Причем равенство достигается при $E_n=\ell_1^n$.*

Доказательство.
Обозначим $r_n=2\frac{n-1}{n}\geqslant 1$.

Докажем неравенство. Предположим противное.

Существует банахово пространство E_n размерности $n\geqslant 2$, множество $D\subset\mathfrak{B}_1(0)\subset E_n$ и точка $O_1\in\operatorname{co}D$ такая, что $\mathfrak{B}_{r_n}(O_1)\cap D=\emptyset$. Но раз $O_1\in\operatorname{co}D$, то $O_1\in\operatorname{co}(\mathfrak{B}_1(0)\setminus\operatorname{int}\mathfrak{B}_{r_n}(O_1))$. Множество $B=\mathfrak{B}_1(0)\setminus\operatorname{int}\mathfrak{B}_{r_n}(O_1)$ по лемме 2.1 связно, значит, в силу усиления теоремы Каратеодори ([8], p.241, satz A) точка O_1 есть выпуклая комбинация не более чем n точек из множества B. Обозначим их $A_1,\dots A_k,\ k\leqslant n$, они образуют $(k-1)$-мерный симплекс A, точка $O_1=\alpha_1A_1+\dots+\alpha_kA_k$ лежит в его относительной внутренности $(\alpha_i>0,\alpha_1+\dots+\alpha_k=1)$. Пусть C_l – пересечение луча A_lO_1 с противоположной гранью симплекса A, т.е. $O_1=\alpha_lA_l+(1-\alpha_l)C_l$. Тогда

$$\|O_1A_l\|=(1-\alpha_l)\|C_lA_l\|.$$

Так как $C_lA_l \subset A \subset \mathfrak{B}_1(0)$, то $\|A_lC_l\| \leqslant 2$. Поэтому $r_n \leqslant \|O_1A_l\| \leqslant 2(1-\alpha_l)$. Следовательно, $\alpha_l \leqslant 1 - \frac{r_n}{2} \leqslant \frac{1}{n}$, а значит, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k \leqslant \frac{k}{n} \leqslant 1$. Противоречие.

Покажем, что равенство достигается.

Рассмотрим пространство $l_1(n)$. Пусть $A_i = e_i \in \mathfrak{B}_1(0)$, где $\{e_i\}_{i=1}^n$ – стандартный базис в l_1^n, $B = \frac{1}{n}(A_1 + \ldots + A_n) \in \operatorname{co}\{A_1, \ldots, A_n\}$. Но расстояние от точки B до произвольной точки множества A равно $\|A_iB\| = 2\frac{n-1}{n}$. ■

Из теоремы 1 и неравенства $\zeta_E \geqslant 1$ следует, что УВО-модуль любого двумерного нормированного пространства равен 1. Легко видеть, что УВО-модуль пространства ℓ_1 равен 2.

Заметим, что в теореме фактически доказано, что если $\dim E = n$, то любой симплекс размерности $k < n$, содержащийся в единичном шаре, накрывается шаром радиуса $2\frac{k}{k+1}$ с центром в центре тяжести симплекса. Отсюда и из теоремы Хелли получаем следующее.

Следствие 2.1. *Пусть множества P и Q – сечения единичного n-мерного шара двумя параллельными аффинными подпространствами размерности k, причем аффинное подпространство, содержащее P, проходит через 0. Тогда Q параллельным переносом накрывается множеством $2\frac{k}{k+1}P$.*

3. Оценка УВО-модуля в произвольных банаховых пространствах

Введем следующую величину, характеризующую пространство:

$$\chi_E = \sup_{x,y\in\partial\mathfrak{B}_1(0)} \sup_{p\in J_1(y)} \|x - \langle p, x\rangle y\|.$$

Заметим, что если $y \in \partial\mathfrak{B}_1(0)$, $p \in J_1(y)$, то вектор $(x - \langle p, x\rangle y)$ является метрической проекцией вектора x на гиперплоскость $H_p = \{x \in E : \langle p, x\rangle = 0\}$. Поэтому $\chi_E = \sup_{y\in\partial\mathfrak{B}_1(0)} \sup_{p\in J_1(x)} \chi_E^p$, где χ_E^p – это половина диаметра проекции единичного шара на гиперплоскость H_p. Отсюда вытекает следующее замечание.

Замечание 3.1. χ_E – это минимальная константа Липшица метрической проекции при проектировании на гиперплоскость.

Оценим УВО-модуль пространства E через величину χ_E.

Лемма 3.1. *Пусть $O_1 \in \operatorname{co}(\mathfrak{B}_1(O)\backslash\operatorname{int}\mathfrak{B}_r(O_1))$, пусть единичный функционал p двойственен к вектору OO_1. Тогда в гиперплоскости $H_p = \{x \in E : \langle p, x\rangle = \langle p, O_1\rangle\}$ найдется точка x такая, что $x \in \mathfrak{B}_1(O)\backslash\operatorname{int}\mathfrak{B}_r(O_1)$.*

Доказательство.
Обозначим $B = \mathfrak{B}_1(O)\backslash\operatorname{int}\mathfrak{B}_r(O_1)$. Так как $O_1 \in \operatorname{co} B$, то существуют точки $A_1, \cdots, A_n \in B$ и набор положительных коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1)$ такие, что

$$O_1 = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n. \tag{1}$$

Пусть $H_p^+ = \{y \in E : \langle p, y\rangle \geqslant \langle p, O_1\rangle$. Из леммы 2 следует связность множества B. Отсюда и непустоты множества $B\backslash H_p^+$ следует, что если доказываемое утверждение неверно, то $B \cap H_p^+ = \emptyset$. Тогда $\langle p, A_i\rangle < \langle p, O_1\rangle$ и из формулы (1) следует, что

$$\langle p, O_1\rangle = \lambda_1\langle p, A_1\rangle + \ldots + \lambda_n\langle p, A_n\rangle < \langle p, O_1\rangle.$$

Противоречие. ■

Лемма 3.2.

$$\zeta_E \leqslant \sup_{y\in\mathfrak{B}_1(0)} \inf_{p\in J_1(y)} \sup_{x\in\mathfrak{B}_1(0):\langle p, x-y\rangle=0} \|x - y\|. \tag{2}$$

Доказательство.
Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда по определению УВО-модуля найдется

множество $D \subset \mathfrak{B}_1(0)$ такое, что $h^+(\operatorname{co} D, D) \geqslant \zeta_E - \varepsilon$. Следовательно, найдется точка $O_1 \in \operatorname{co} D : \rho(O_1, D) \geqslant \zeta_E - 2\varepsilon$. Обозначим $r = \rho(O_1, D)$. Тогда $D \subset \mathfrak{B}_1(0) \setminus \operatorname{int} \mathfrak{B}_r(O_1)$. Следовательно, $O_1 \in \operatorname{co}[\mathfrak{B}_1(0) \setminus \operatorname{int} \mathfrak{B}_r(O_1)]$. Обозначим $y = O_1$, пусть $p \in J_1(y)$. По лемме 3.1 существует вектор $x \in \mathfrak{B}_1(0) \setminus \operatorname{int} \mathfrak{B}_r(O_1) : \langle p, x - y\rangle = 0$. При этом $r \leqslant \|x - y\|$. Следовательно, $\zeta_E \leqslant \|x - y\| + 2\varepsilon$. Устремляя ε к нулю, получаем доказываемое неравенство. ■

Нетрудно понять, что

$$\chi_E = \sup_{y \in \mathfrak{B}_1(0), p \in J_1(y)} \sup_{x \in \mathfrak{B}_1(0) : \langle p, x-y\rangle = 0} \|x - y\|.$$

Тогда из леммы 3.2 следует утверждение.

Теорема 3.1. $\zeta_E \leqslant \chi_E$.

Следствие 3.1. *Для гильбертова пространства H справедливо равенство $\zeta_H = 1$.*

Вся оставшаяся часть работы посвящена оценке величины χ_E. В этом параграфе приведем достаточно неточную оценку, следующую из работ В.И. Бердышева. Согласно статье [4], обозначим

$$h_E^- = \inf \|x - y\|; \; h_E^+ = \sup \|x - y\|,$$

где инфимум (супремум) берется по всем единичным векторам $y, x : \; y \urcorner x$. В этой же статье приведена оценка на величину h_E^- :

$$h_E^- \geqslant \frac{1}{t_0} \geqslant \frac{1}{1 - \delta_E(\frac{1}{2})},$$

где t_0 – корень уравнения

$$t + 2\delta_E(t) = 1.$$

Оценим величину h_E^+. Пусть векторы x, y такие, что $\|x\| = \|y\| = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} \|x - \tau y\| = 1$. Тогда $\|-y\| = \inf_{\tau \in \mathbb{R}} \|x + \tau(-y)\| = 1$. Значит, $\|x + y\| \geqslant h_E^- \geqslant \frac{1}{t_0} \geqslant \frac{1}{1 - \delta_E(\frac{1}{2})}$, откуда $\delta_E(\|x - y\|) \leqslant 1 - \frac{\|x+y\|}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{2t_0} \leqslant 1 - \frac{1}{2\left(1 - \delta_E\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$. Получаем, что

$$h_E^+ = \sup \|x - y\| \leqslant \delta_E^{-1}\left(1 - \frac{1}{2t_0}\right) \leqslant \delta_E^{-1}\left(1 - \frac{1}{2\left(1 - \delta_E\left(\frac{1}{2}\right)\right)}\right). \tag{3}$$

Но можно действовать и другим способом:

$$\frac{1}{2}\|x - y\| \leqslant 1 - \delta_E(\|x + y\|) \leqslant 1 - \delta_E\left(\frac{1}{t_0}\right) \leqslant 1 - \delta_E\left(\frac{1}{1 - \delta_E(\frac{1}{2})}\right),$$

т.е.

$$h_E^+ = \sup \|x - y\| \leqslant 2\left(1 - \delta_E\left(\frac{1}{t_0}\right)\right) \leqslant 2\left(1 - \delta_E\left(\frac{1}{1 - \delta_E(\frac{1}{2})}\right)\right). \tag{4}$$

Лемма 3.3. *В любом пространстве верны неравенства*

$$\zeta_E \leqslant \chi_E \leqslant h_E^+. \tag{5}$$

Доказательство.

Зафиксируем векторы y, y_2 на единичной сфере. Рассмотрим двумерное сечение E_2 исходного пространства E плоскостью yOy_2. Возьмем на единичной окружности в пространстве E_2 точку x такую, что опорная прямая к единичному кругу в этой точке параллельна вектору y. Ясно, что длина вектора метрической проекции любого вектора из единичного круга $E_2 \cap \mathfrak{B}_1(O)$ на гиперплоскость $H_p = \{a \in E : \langle p, a\rangle = 0\}$ для некоторого $p \in J_1(y)$ не превосходит длины метрической проекции вектора x на эту гиперплоскость. Пусть $l = H_p \cap E_2$.

Проведем прямые l^-, l^+, параллельные l, проходящие через точки $-y, y$ соответственно. Ясно, что l^-, l^+ являются опорными прямыми к единичному кругу в плоскости E_2. Значит, прямая $l_x \parallel l$, проходящая через x, пересекает отрезок $[-y; y]$. Обозначим $[-y; y] \cap l_x = z$. Тогда $\|z - x\|$ и есть длина метрической проекции вектора x на H_p. Но для любой точки $z_0 \in [-y; y]$ верно неравенство $\|z_0 - x\| \leqslant \max\{\|x + y\|; \|x - y\|\} \leqslant h_E^+$. Откуда и следует утверждение леммы. ■

4. Модуль опорной выпуклости

Пусть $\|y\| = \|x\| = 1; y \urcorner x, r > 0$. Если существует такое число β, что $\|x + ry - \beta x\| \leqslant 1$, то положим $\lambda_E(x, y, r) = \inf\{\lambda | \, \|x + ry - \lambda x\| = 1\}$. Если такого β не существует, положим $\lambda_E(x, y, r) = +\infty$. Заметим, что из центральной симметричности шара следует, что величины $\lambda_E(x, y, r)$, $\lambda_E(x, -y, r)$ либо обе конечны, либо равны $+\infty$. Обозначим

$$\lambda_E^-(x, y, r) = \min\{\lambda_E(x, y, r),\ \lambda_E(x, -y, r)\}; \quad \lambda_E^+(x, y, r) = \max\{\lambda_E(x, y, r),\ \lambda_E(x, -y, r)\}.$$

Определение 4.1. Назовем *модулями локальной опорной выпуклости* функции $\lambda_E^\pm : E \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, задаваемые соотношениями

$$\lambda_E^-(x, r) = \inf \lambda_E^-(x, y, t); \quad \lambda_E^+(x, r) = \sup \lambda_E^+(x, y, t),$$

где $x \in E$, $\|x\| = 1$, $r > 0$, а супремум (инфимум) берется по всем таким наборам (y, t), что $\|y\| = 1,\ y \urcorner x,\ 0 \leqslant t \leqslant r$ и $\lambda_E^+(x, y, t) < +\infty$.

Ясно, что выполняются неравенства $\lambda_E^-(x, r) \leqslant \lambda_E^+(x, r)$ и $\lambda_E^-(x, r) \leqslant 1$.

Определение 4.2. Назовем *модулями m-опорной и p-опорной выпуклости*, функции $\lambda_E^-(r), \lambda_E^+(r)$, задаваемые соотношениями

$$\lambda_E^-(r) = \inf \lambda_E^-(x, t); \lambda_E^+(r) = \sup \lambda_E^+(x, t),$$

где супремум (инфимум) берется по всем наборам (x, t), что $\|x\| = 1$, $0 \leqslant t \leqslant r$ и $\lambda_E^+(x, t) < +\infty$.

Приведем некоторые оценки на $\lambda_E^-(r)$, $\lambda_E^+(r)$.

Лемма 4.1. *Для любого $r \in (0, 2]$ верны следующие неравенства:*

$$1 - \frac{1}{2}\delta_E^{-1}\left(1 - \frac{r}{2}\right) \leqslant 1 - \frac{1}{2}\delta_E^{-1}\left(1 - \frac{r}{\chi_E}\right) \leqslant \lambda_E^+(r). \tag{6}$$

Доказательство.

Первое неравенство в цепочке (6) следует из неравенства $\chi_E \leqslant 2$. Зафиксируем произвольную точку X_0 на единичной сфере. Зафиксируем в гиперплоскости H_x, опорной к единичному шару в точке X_0, точку X_1 такую, что $\|X_0X_1\| = r$. Обозначим луч $OX_0 + \alpha X_0X_1;\ \alpha \geqslant 0$ как l. Пусть l_1, l_2 – прямые, параллельные вектору OX_0, причем l_2 – опорная к единичному шару E_2 в точке Y_2 и $l_2 \cap l = X_2$, а прямая l_1 пересекает луч l в точке X_1 и единичную окружность в точках A, B. Пусть $Y_1 = OY_2 \cap AB$. Из определения $\lambda_E^+(r)$ и центральной симметричности шара следует, что $\|AB\| \geqslant 2(1 - \lambda_E^+(r))$. Ясно, что $\|Y_1Y_2\| \geqslant \delta_E(\|AB\|)$, откуда

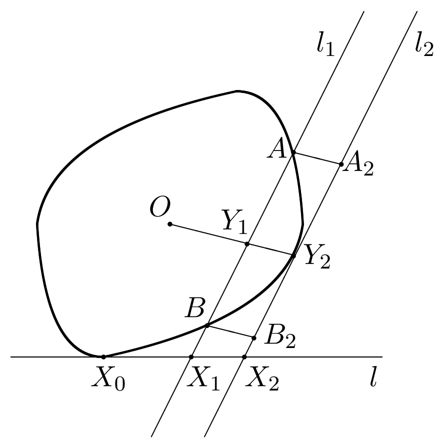

Рис. 1

$$\delta_E(2(1 - \lambda_E^+(r))) \leqslant \delta_E(\|AB\|) \leqslant \|Y_1Y_2\|. \tag{7}$$

Используя теорему Фалеса, получаем

$$\|Y_1Y_2\| = \frac{\|Y_1Y_2\|}{\|OY_2\|} = \frac{\|X_1X_2\|}{\|X_0X_2\|} = \frac{\|X_0X_2\| - \|X_0X_1\|}{\|X_0X_2\|} = 1 - \frac{r}{\|X_0X_2\|} \leqslant 1 - \frac{r}{\chi_E}. \tag{8}$$

Из неравенств (7), (8) получаем

$$\delta_E(2(1-\lambda_E^+(r))) \leqslant 1 - \frac{r}{\chi_E},$$

откуда следует неравенство (6).■

Лемма 4.2. *Для любого $x \in [0;2]$ верны следующие неравенства:*

$$\delta_E(x) \leqslant \lambda_E^+\left(\frac{x}{2}\right); \tag{9}$$

$$\delta_E(x) \leqslant \lambda_E^-(x). \tag{10}$$

Доказательство.
Пусть на единичной сфере выбраны точки A, B так, что $\|AB\| = x$. Рассмотрим сечение исходного пространства двумерной плоскостью $E_2 = AOB$. В плоскости E_2 на единичной окружности найдется такая точка Y_2, что через нее можно провести опорную прямую l_2, параллельную AB, и $OY_2 \cap AB = Y_1$. Пусть точки A_2, B_2 принадлежат проекциям точек A, B соответственно на прямую l_2, причем отрезки Y_1Y_2, AA_2 и BB_2 параллельны и равны (как параллельные отрезки, заключенные между параллельными прямыми). Понятно, что $\delta_E(x) \leqslant \|Y_1Y_2\|$. Не ограничивая общности, считаем, что $\|Y_2A_2\| \leqslant \frac{x}{2}$. Тогда $\|Y_1Y_2\| = \|AA_2\| \leqslant \lambda_E^+(\|Y_2A_2\|) \leqslant \lambda_E^+(\frac{x}{2})$. Так как $\|Y_2A_2\| \leqslant \|Y_2B_2\|$ и $\|AA_2\| = \|BB_2\|$, то $\|BB_2\| \leqslant \lambda_E^-(Y_2, \|Y_2B_2\|) \leqslant \lambda_E^-(Y_2, \|A_2B_2\|) = \lambda_E^-(Y_2, x)$. Переходя к инфимуму, получим неравенство (10). ■

Лемма 4.3. *Пусть $\lambda_E^-(r) < \infty$. Обозначим $\lambda^- = \lambda_E^-(r)$. Верно неравенство*

$$\lambda^- \leqslant (1-\lambda^-)\rho_E\left(\frac{r}{1-\lambda^-}\right) \leqslant \rho_E\left(r\right). \tag{11}$$

Доказательство.
Зафиксируем точки $x, y \in \partial\mathfrak{B}_1(0)$, $y\urcorner x$. Пусть $\lambda_1 = \lambda_E^-(x,y,r)$. Тогда верны следующие неравенства:

$$\|x - \lambda_1 x + ry\| \geqslant 1; \quad \|x - \lambda_1 x - ry\| \geqslant 1.$$

После деления на $2(1-\lambda_1)$ и сложения обоих неравенств получаем

$$\frac{1}{1-\lambda_1} \leqslant \frac{\left\|x + \frac{ry}{1-\lambda_1}\right\| + \left\|x - \frac{ry}{1-\lambda_1}\right\|}{2}.$$

Используя определение модуля гладкости, получаем, что

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} \leqslant \rho_E\left(\frac{r}{1-\lambda_1}\right),$$

домножив последнее выражение на $1-\lambda_1$ и перейдя к супремуму, получим неравенство (11). Второе неравенство в формуле (11) следует из выпуклости модуля гладкости.

Лемма 4.4. *Пусть $x, y \in E$, $x \neq 0$, $p \in J_1(x)$. Тогда*

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \langle p, y\rangle + 2\|x\|\,\rho_E\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right). \tag{12}$$

Доказательство.
Из определения модуля гладкости следует, что

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\|x+y\|}{\|x\|} + \frac{\|x-y\|}{\|x\|}\right) - 1 \leqslant \rho_E\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right),$$

домножая неравенство на $2\|x\|$ и преобразуя, получим следующую цепочку неравенств:

$$\|x+y\| \leqslant 2\|x\| - \|x-y\| + 2\|x\|\rho_E\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\|x\| + \langle p, y-x\rangle + 2\|x\|\rho_E\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right) = \|x\| + \langle p, y\rangle + 2\|x\|\rho_E\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right). \blacksquare$$

Лемма 4.5. *Пусть* $\lambda = \lambda_E^+(r) < 1$. *Тогда*

$$\lambda \leqslant 2(1-\lambda)\rho_E\left(\frac{r}{1-\lambda}\right). \tag{13}$$

Доказательство.
Пусть $\mu \in (0, \lambda)$ и пусть существуют векторы $x, y \in E$ и функционал $p \in J_1(x) = J_1(x-\mu x)$, удовлетворяющие соотношениям $\|x\| = \|x-\mu y\| = 1$, $\|x-y\| \leqslant r$, $\langle p, y\rangle = 1$. Тогда в силу леммы 4.4 имеем

$$1 = \|y-\mu x\| \leqslant \|x-\mu x\| + \langle p, y-x\rangle + 2(1-\mu)\rho_E\left(\frac{r}{1-\mu}\right) = 1-\mu+2(1-\mu)\rho_E\left(\frac{r}{1-\mu}\right).$$

Откуда следует неравенство (13). ■

Теорема 4.1. *Верны следующие неравенства:*

$$\chi_E \leqslant \frac{1}{1-\lambda_E^+\left(\frac{1-\lambda_E^-(1)}{2}\right)}; \tag{14}$$

$$\chi_E \leqslant \frac{1}{1-\lambda_E^-\left(1-\lambda_E^-(1)\right)}. \tag{15}$$

Доказательство.
Зафиксируем точку X_0 на единичной сфере. Пусть прямая l — опорная к сфере в точке X_0, а прямая l_2 касается сферы в точке Y_2 и такая, что $l_2 \parallel OX_0$ и $l_2 \cap l = X_2$, причем $\|Y_2X_2\| \leqslant 1$. На отрезке X_0X_2 отметим точку X_1 такую, что $\|X_0X_1\| = 1$, и проведем через нее прямую $l_1 \parallel OX_0$. Точку пересечения прямой l_1 и отрезка OY_2 обозначим Y_1, а точки пересечения прямой l_1 с единичной сферой A и B, причем $A \in X_1Y_1$. В доказательстве леммы 4 показано, что

$$\|X_0X_2\| = \frac{1}{1-\|Y_1Y_2\|}. \tag{16}$$

Заметим, что $\|X_1B\| = 1$, откуда $\|AB\| \geqslant 1 - \lambda_E^-(1)$. Применяя рассуждения из леммы 4.2, получаем, что $\|Y_1Y_2\| \leqslant \lambda_E^-\left(1-\lambda_E^-(1)\right)$ и $\|Y_1Y_2\| \leqslant \lambda_E^+\left(\frac{1-\lambda_E^-(1)}{2}\right)$. Откуда и следует утверждение теоремы. ■

Замечание 4.1. Оценка (14) в случае гильбертова пространства является точной. Выражение, стоящее в правой части в неравенстве (14), не превосходит 2.

Гипотеза. *Оценка* (14) *точна для пространства* L_p, $p \in (1; +\infty)$.

5. Следствия

Подставляя различные полученные оценки на модули опорной выпуклости, нетрудно получить серию оценок на величину χ_E. Например, подставляя в неравенство (15) оценки (10), (11) на величину λ_E^-, получаем следующее утверждение.

Следствие 5.1. *В любом банаховом пространстве* E *верны неравенства:*

$$\zeta_E \leqslant \chi_E \leqslant \frac{1}{1-\rho_E\left(1-\delta_E(1)\right)}, \tag{17}$$

что позволяет оценить УВО-модуль пространства через модули равномерной выпуклости и гладкости.

Замечание 5.1. Оценка (17) не точная, но отражает связь модуля выпуклости гладкости и УВО-модуля пространства. Так, в случае гильбертова пространства выражение, стоящее в правой части неравенства (17), приблизительно равно $\frac{3}{2}$, хотя в этом случае $\zeta_E = \chi_E = 1$.

Согласно работе [7] множество $A \subset X$ называется *проксимально гладким* с константой R, если функция расстояния $x \to \rho(x, A)$ непрерывно дифференцируема на множестве $U(R, A) = \{x \in X : 0 < \rho(x, A) < R\}$.

В работе [2] показано, что в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве X метрическая проекция на замкнутое проксимально гладкое с константой R множество $A \subset X$ непрерывна на множестве $U(R, A)$. Отсюда и из теоремы 1 получаем следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть замкнутое множество A из равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства X является проксимально гладким с константой R и содержится в шаре радиуса $r < \frac{R}{\zeta_X}$. Тогда A стягиваемо.*

Доказательство.
Заметим, что поскольку множество $\operatorname{co} A$ выпукло и ограничено, то оно стягиваемо, то есть существует точка $x_0 \in \operatorname{co} A$ и непрерывная функция $F : [0, 1] \times \operatorname{co} A \to \operatorname{co} A$ такие, что $F(0, x) = x$, $F(1, x) = x_0$ для любого $x \in \operatorname{co} A$. Из определения УВО-модуля следует, что множество $\operatorname{co} A$ содержится в R-окрестности множества A. С другой стороны, A является проксимально гладким с константой R множеством, а значит, согласно работе [2] отображение метрического проектирования $\pi : \operatorname{co} A \to A$ однозначно и непрерывно. Поэтому отображение $\tilde{F} : [0, 1] \times A \to A$, заданное формулой $\tilde{F}(t, x) = \pi(F(t, x))$ при всех $t \in [0, 1]$, $x \in A$, является стягиванием множества A. ■

Выражаю огромную признательность моему научному руководителю Г.Е. Иванову за тяжелую работу по корректировке этой работы и ценные замечания.

Литература

1. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. – М.: Физматлит, 2006.
2. *Балашов М.В., Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Известия РАН. Серия математическая. – 2009. – Т. 73, № 3. – С. 23–66.
3. *Гурарий В.И.* О равномерно выпуклых и равномерно гладких банаховых пространствах // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: респ. науч. сб. / Харьковский государственный университет им. А.М. Горького. — Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1965. — Вып. 1. — С. 205–211.
4. *Бердышев В.И.* Связь между неравенством Джексона и одной геометрической задачей // Математические заметки. – 1968. – Т. 3, № 3. – С. 327–338.
5. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. – Киев: Вища школа, 1980.
6. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975.
7. *Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R.* Proximal Smoothness and Lower–C^2 Property // J. Convex Anal. – 1995. – V. 2, N 1–2. – P. 117–144.
8. *Fenchel W.* Über Krilmmung and Windung geshlossener Raumkurven // Math. Ann. 1929. – V. 101. – P. 589–593.

Поступила в редакцию 29.02.2012.