

Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Задачи про однозначность разбора

Пусть дана некоторая последовательность символов, среди которых есть открывающие и закрывающие скобки. *Скобочным итогом* этой последовательности назовём разность числа открывающих скобок и числа закрывающих. *Правильной скобочной последовательностью* называется последовательность открывающих и закрывающих скобок, такая что у любого начала последовательности скобочный итог неотрицательный, а у всей последовательности — нулевой.

1. Дадим следующее определение S -последовательности:

- a) Пустая последовательность ε является S -последовательностью;
- b) Если σ является S -последовательностью, то (σ) также является S -последовательностью;
- c) Если σ_1 и σ_2 являются S -последовательностями, то $\sigma_1\sigma_2$ также является S -последовательностью.

Докажите, что любая S -последовательность является правильной скобочной, и наоборот.

2. Пусть τ является S -последовательностью. Всегда ли можно однозначно сказать, по какому из трёх правил она получена?

3. Пусть τ является S -последовательностью, полученной по второму правилу. Всегда ли можно однозначно указать σ , из которой получена τ ?

4. Пусть τ является S -последовательностью, полученной по третьему правилу. Всегда ли можно однозначно указать σ_1 и σ_2 , из которых получена τ ?

5. Дадим следующее определение T -последовательности:

- a) Пустая последовательность ε является T -последовательностью;
- b) Если σ_1 и σ_2 являются T -последовательностями, то $(\sigma_1\sigma_2)$ также является T -последовательностью.

Докажите, что любая T -последовательность является правильной скобочной, но обратное неверно.

6. Докажите, что скобочный итог любого начала T -последовательности, отличного от ε и всей последовательности, положительный.

7. Пусть τ является T -последовательностью, полученной по второму правилу. Всегда ли можно однозначно указать σ_1 и σ_2 , из которых получена τ ?

Назовём *пропозициональными переменными* символы p_1, p_2, \dots . Если p — пропозициональная переменная, то она также является пропозициональной формулой. Если φ — пропозициональная формула, то $\neg\varphi$ — также пропозициональная формула. Если

φ и ψ — пропозициональные формулы, то $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ и $(\varphi \rightarrow \psi)$ — также пропозициональные формулы.

8. Докажите лемму о скобочном итоге для пропозициональных формул: если τ — пропозициональная формула, а σ — её начало, то скобочный итог σ неотрицателен, причём он равен нулю только если $\sigma = \neg \neg \dots \neg$ (последовательность символов \neg , возможно пустая) или если $\sigma = \tau$.

9. Докажите теорему об однозначности разбора: если τ — пропозициональная формула, то она построена ровно по одному правилу единственным образом.

10. В пропозициональных формулах перестали писать закрывающие скобки. Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

11. В пропозициональных формулах вместо скобок стали писать модули (т.е. открывающие и закрывающие скобки стали обозначать одним и тем же символом $|$). Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

12. Пропозициональные формулы стали писать вообще без скобок. Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

13. Пропозициональные формулы стали писать в польской записи: $\neg\varphi$, $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, $\rightarrow\varphi\psi$. Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

14. Пропозициональные формулы стали писать в обратной польской записи: $\varphi\neg$, $\varphi\psi\wedge$, $\varphi\psi\vee$, $\varphi\psi\rightarrow$. Сохранилась ли при этом однозначность разбора?

15. В задачах 10–14 дайте полные определения обсуждаемых формул.