

С.П. Родионов^{1,2}, Л.Н. Соколюк³

¹ Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН

² ЗАО «Конкорд»

³ Тюменский государственный университет

Расчёт и использование модифицированных относительных фазовых проницаемостей при преобразовании геологической модели в гидродинамическую

Предложена методика для определения тензоров модифицированных относительных фазовых проницаемостей при преобразовании геологической модели в гидродинамическую (upscaling). Обсуждаются вопросы применения предложенной методики.

Ключевые слова: геолого-гидродинамическая модель, апскейлинг, модифицированные фазовые проницаемости.

Введение. В настоящее время при моделировании разработки нефтяных месторождений широко применяются трёхмерные численные гидродинамические модели многофазной фильтрации. Гидродинамические модели создаются на основе геологических моделей нефтяных месторождений, которые в некоторых случаях могут содержать настолько большое количество ячеек разностной сетки, что время расчётов становится неприемлемым. Поэтому необходимо уменьшить количество ячеек путём объединения мелких ячеек геологической сетки в крупные ячейки гидродинамической сетки. Эквивалентные фильтрационно-ёмкостные параметры крупных ячеек, которые зависят от параметров составляющих их мелких ячеек, естественно определить таким образом, чтобы различие результатов расчётов на исходной и укрупненной сетках было минимальным. Такая процедура в зарубежной литературе называется up-scaling (ремасштабирование) геологической модели в гидродинамическую. В последнее время теория up-scaling'a интенсивно развивается за рубежом (см., например, [1, 2]). Число отечественных публикаций по этой теме значительно меньше. Как отмечается в [1, 3], завершённая теория up-scaling'a в настоящее время ещё не построена.

Эквивалентными параметрами укрупнённых ячеек, необходимыми для гидродинамических расчётов, являются пористость горной породы, насыщенности фаз и абсолютная проницаемость пористой среды. Вопросы определения эквивалентных или модифицированных относительных фазовых проницаемостей при up-scaling'e рассматривались в работах [4–7] и обзорах [8, 9].

В настоящей работе предлагается методика определения эквивалентных относительных фазовых проницаемостей (ОФП) при укрупнении ячеек. Методика основана на решении задачи двухфазной фильтрации в отдельной крупной ячейке. Такой способ определения фильтрационных параметров крупных ячеек является наиболее точным

среди других методов. Расчётным путём показывается, что если не производить модификацию ОФП, то это может привести к завышенным значениям важнейшего показателя разработки месторождений — коэффициента извлечения нефти (КИН).

Постановка и решение задачи.

Рассмотрим процедуру up-scaling'a при следующих допущениях: нефть, вода и пористая среда несжимаемы; вязкости фильтрующихся фаз постоянны; капиллярные и гравитационные силы пренебрежимо малы. Во избежание громоздкости изложения рассматривается случай двумерных ячеек. Расчёт эквивалентных величин осуществим на примере одной из ячеек гидродинамической сетки, так как в остальных их можно определить по аналогии. На рис. 1 в декартовых координатах x_1 и x_2 приведено схематическое представление процедуры up-scaling'a для крупной ячейки, включающей в себя $8 \times 8 = 64$ мелкие ячейки. Через L_k обозначены длины крупной ячейки вдоль координат x_k ($k = 1, 2$).

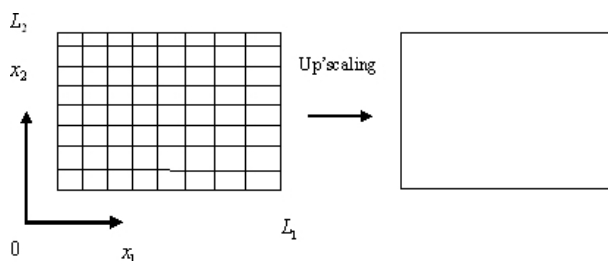


Рис. 1

Вычисление эквивалентных значений скалярных величин, характеризующих ёмкостные свойства крупной ячейки, таких, как пористость породы φ и насыщенности фаз S_l не вызывает трудностей и определяется путём осреднения по её объёму V [1]:

$$\varphi^* = \frac{1}{V} \int_V \varphi dV, \quad \varphi^* S_l^* = \frac{1}{V} \int_V S_l \varphi dV,$$

$$V = \int_V dV \quad (l = w, o), \quad (1)$$

где индексом l внизу отмечены параметры, относящиеся к водной ($l = w$) и нефтяной ($l = o$) фазам. Эквивалентные параметры крупной ячейки отмечены знаком * вверху. Сложнее обстоит дело с определением фильтрационных параметров крупных ячеек, таких, как абсолютная проницаемость пористой среды и относительные проницаемости фаз. Фильтрационные параметры могут быть скалярами, векторами или тензорами.

При вычислении эквивалентной абсолютной проницаемости крупной ячейки в каждой её точке полагается справедливым закон Дарси:

$$u = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (2)$$

или в компонентном виде:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\nabla p)_1 \\ (\nabla p)_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $k_k = k_k(x_1, x_2)$, u_k и $(\nabla p)_k = \frac{\partial p}{\partial x_k}$ — k -я ($k = 1, 2$) составляющая соответственно диагонального тензора абсолютной проницаемости $k = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$, вектора скорости жидкости u и градиента давления ∇p ; μ — вязкость жидкости. Подставляя выражение (2) в уравнение сохранения массы жидкости

$$\operatorname{div} u = 0,$$

можно получить следующее уравнение для давления $p(x_1, x_2)$ фильтрующей жидкости, которое решается численно внутри крупной ячейки:

$$\operatorname{div} \left(\frac{k}{\mu} \nabla p \right) = 0. \quad (3)$$

Тензор эквивалентной абсолютной проницаемости k^* для крупной ячейки гидродинамической сетки представляет собой коэффициент пропорциональности между средними по объёму скоростью жидкости $\langle u \rangle$ и градиентом давления $\langle \nabla p \rangle$:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{V} \int_V u dV, \quad \langle \nabla p \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\nabla p) dV.$$

Тензор k^* определяется из выражения

$$\langle u \rangle = -\frac{1}{\mu} k^* \langle \nabla p \rangle, \text{ или}$$

$$\begin{pmatrix} \langle u \rangle_1 \\ \langle u \rangle_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* \\ k_{21}^* & k_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \nabla p \rangle_1 \\ \langle \nabla p \rangle_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Здесь и далее скобками $\langle \cdot \rangle$ обозначены вспомогательные средние величины, являющиеся результатом up'scaling'a, но не используемые в расчётах на крупной сетке. Знаком * отмечены величины, необходимые для расчётов на этой сетке.

Для решения дифференциального уравнения (3) необходимо задать условия для давления на границах укрупненной ячейки. Лучше всего их можно было бы взять из решения на мелкой сетке. Однако для этого потребовалось бы решить исходную задачу на геологической сетке, которую и требуется упростить. Поэтому на практике используются следующие наиболее распространенные типы граничных условий [1]:

а) — «открытые границы»

$$1. \quad p(0, x_2) = 1, \quad p(L_1, x_2) = 0, \\ p(x_1, 0) = p(x_1, L_2) = 1 - x_1/L_1,$$

$$2. \quad p(x_1, 0) = 1, \quad p(x_1, L_2) = 0, \\ p(0, x_2) = p(L_1, x_2) = 1 - x_2/L_2.$$

б) — «закрытые границы»

$$(5)$$

$$1. \quad p(0, x_2) = 1, \quad p(L_1, x_2) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{\partial p}{\partial x_2}(x_1, L_2) = 0,$$

$$2. \quad p(x_1, 0) = 1, \quad p(x_1, L_2) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1}(0, x_2) = \frac{\partial p}{\partial x_1}(L_1, x_2) = 0.$$

Здесь каждому типу граничных условий (а или б) соответствуют два варианта их задания (1 и 2).

Чтобы определить компоненты тензора k^* , необходимо сперва выбрать тип граничного условия: а) или б). Затем с выбранным типом граничных условий дважды решить уравнение (3), поочередно рассматривая варианты $j = 1$ и $j = 2$. Поскольку векторы $\langle u \rangle$ и $\langle \nabla p \rangle$ имеют две компоненты и уравнение (3) решается для двух различных вариантов граничных условий ($j = 1, 2$), то для выбранного типа граничных условий становится возможным определение всех четырёх компонент тензора

$$k^* = \begin{pmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* \\ k_{21}^* & k_{22}^* \end{pmatrix}.$$

Система уравнений для определения компонент k^* имеет вид

$$\langle u \rangle_1^1 = -\frac{1}{\mu} (k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 + k_{12}^* \langle \nabla p \rangle_2^1),$$

$$\langle u \rangle_2^1 = -\frac{1}{\mu} (k_{21}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 + k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^1), \quad (6)$$

$$\langle u \rangle_1^2 = -\frac{1}{\mu} (k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^2 + k_{12}^* \langle \nabla p \rangle_2^2),$$

$$\langle u \rangle_2^2 = -\frac{1}{\mu} (k_{21}^* \langle \nabla p \rangle_1^2 + k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^2),$$

или с учётом второго из соотношений (4):

$$k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 + k_{12}^* \langle \nabla p \rangle_2^1 = \langle k_{11} \nabla p \rangle_1^1 + \langle k_{12} \nabla p \rangle_2^1,$$

$$k_{21}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 + k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^1 = \langle k_{21} \nabla p \rangle_1^1 + \langle k_{22} \nabla p \rangle_2^1,$$

$$k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^2 + k_{12}^* \langle \nabla p \rangle_2^2 = \langle k_{11} \nabla p \rangle_1^2 + \langle k_{12} \nabla p \rangle_2^2,$$

$$k_{21}^* \langle \nabla p \rangle_1^2 + k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^2 = \langle k_{21} \nabla p \rangle_1^2 + \langle k_{22} \nabla p \rangle_2^2.$$

Здесь индексами 1 и 2 вверху отмечены значения для граничных условий с номерами 1 и 2. Индексами 1 и 2 внизу обозначены соответствующие компоненты векторов $\langle u \rangle$ и $\langle \nabla p \rangle$.

Определенный из системы (6) на основе граничных условий (5) тензор k^* может оказаться несимметричным. Чтобы получить симметричный тензор согласно [1], необходимо решить систему (6) и рассчитать $\frac{(k_{12}^* + k_{21}^*)}{2}$. Затем компоненты k_{12}^* и k_{21}^* тензора k^* из (6) необходимо заменить на $\frac{(k_{12}^* + k_{21}^*)}{2}$, то есть

$$k_{12}^* \rightarrow \frac{(k_{12}^* + k_{21}^*)}{2}, \quad k_{21}^* \rightarrow \frac{(k_{12}^* + k_{21}^*)}{2}. \quad (7)$$

В соответствии с (7) тензор k^* уже будет симметричным.

Отметим, что полный тензор k^* может быть определен только при граничных условиях типа а) — «открытые границы». При граничных условиях типа б) — «закрытые границы» — можно вычислить только диагональную часть этого тензора. Действительно, при граничных условиях б) имеем $\langle u \rangle_1^2 = \langle u \rangle_1^1 = 0$. Поэтому из (6) следует, что

$$\langle u \rangle_1^1 = -\frac{1}{\mu} k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 = -\frac{1}{\mu} \langle k_1^\nabla p \rangle_1^1,$$

$$\langle u \rangle_2^2 = -\frac{1}{\mu} k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^2 = -\frac{1}{\mu} \langle k_2^\nabla p \rangle_2^2,$$

и компоненты тензора абсолютной проницаемости для крупной ячейки можно определить с использованием следующих простых формул:

$$k_{11}^* = \frac{\langle k_1^\nabla p \rangle_1^1}{\langle \nabla p \rangle_1^1}, \quad k_{22}^* = \frac{\langle k_2^\nabla p \rangle_2^2}{\langle \nabla p \rangle_2^2}, \quad k_{12}^* = k_{21}^* = 0.$$

Рассмотрим теперь процедуру определения тензоров модифицированных ОФП для водной (k_{rw}^*) и нефтяной (k_{ro}^*) фаз с вязкостями μ_w и μ_o . Внутри крупной ячейки скорости фаз определяются на основе обобщенного закона Дарси:

$$u_l = -k \frac{k_{rl}(S_w)}{\mu_l} \nabla p \quad (l = w, o),$$

и решается следующая система уравнений двухфазной фильтрации [10]:

$$\operatorname{div} \left(k \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{ro}}{\mu_o} \right) \nabla p \right) = 0,$$

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \operatorname{div} \left(k \frac{k_{rw}}{\mu_w} \nabla p \right), \quad S_w + S_o = 1. \quad (8)$$

Система уравнений (8) кроме граничных условий для давления (5) дополняется граничными условиями для насыщенности одной из фаз (для воды). Эти условия задаются на границах, через которые происходит втекание жидкости в ячейку. Для вариантов 1 и 2 имеем

$$S_w(0, x_2, t) = S_{wb}(t),$$

$$S_w(x_2, 0, t) = S_{wb}(t),$$

где $S_{wb}(t)$ — зависимость водонасыщенности на границе от времени, которая должна выбираться из физических соображений или из приближенных решений. Кроме того, внутри крупной ячейки должны быть заданы начальные условия:

$$S_w(x_1, x_2, 0) = S_{w0}(x_1, x_2). \quad (9)$$

Далее в крупной ячейке рассчитываются средние скорости каждой из фаз:

$$\langle u_l \rangle^j = \frac{1}{V} \int_V u_l^j dV,$$

$$\langle \nabla p \rangle^j = \frac{1}{V} \int_V (\nabla p)^j dV \quad (l = w, o; j = 1, 2).$$

Компоненты симметричного тензора модифицированных ОФП l -й фазы ($l = w, o$):

$$k_{rl}^* = \begin{pmatrix} k_{rl11}^* & k_{rl12}^* \\ k_{rl21}^* & k_{rl22}^* \end{pmatrix}$$

определяются из следующей системы уравнений:

$$\langle u_l \rangle_1^1 = -\frac{1}{\mu_l} (k_{rl11}^* k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 + k_{rl12}^* k_{12}^* \langle \nabla p \rangle_2^1),$$

$$\langle u_l \rangle_2^1 = -\frac{1}{\mu_l} (k_{rl21}^* k_{21}^* \langle \nabla p \rangle_1^1 + k_{rl22}^* k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^1), \quad (10)$$

$$\langle u_l \rangle_1^2 = -\frac{1}{\mu_l} (k_{rl11}^* k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^2 + k_{rl12}^* k_{12}^* \langle \nabla p \rangle_2^2),$$

$$\langle u_l \rangle_2^2 = -\frac{1}{\mu_l} (k_{rl21}^* k_{21}^* \langle \nabla p \rangle_1^2 + k_{rl22}^* k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^2).$$

Здесь компоненты тензора k_{rl}^* рассчитываются аналогично (6)–(7). Уравнения (10) получены в результате осреднения скоростей фаз, определенных из обобщенного закона Дарси, по объему крупной ячейки.

Полный тензор модифицированных ОФП, как и полный тензор абсолютной проницаемости, может быть определен только для граничных условий типа а). Для граничных условий типа б) значения диагональных компонент усредненных ОФП определяются согласно следующим формулам:

$$k_{rl11}^* = \frac{\langle k_{rl} k_1^\nabla p \rangle_1^1}{k_{11}^* \langle \nabla p \rangle_1^1}, \quad k_{rl22}^* = \frac{\langle k_{rl} k_2^\nabla p \rangle_2^2}{k_{22}^* \langle \nabla p \rangle_2^2},$$

$$k_{rl12}^* = k_{rl21}^* = 0 \quad (l = w, o), \quad (11)$$

где значения k_{11}^* и k_{22}^* определяются из (5) при условии (7).

Определение зависимости модифицированных ОФП от водонасыщенности осуществляется следующим образом. Внутри крупной ячейки при заданных начальных (9) и граничных (5) условиях на основе системы уравнений (8) решается задача нестационарной двухфазной фильтрации. При этом в каждой точке крупной ячейки и в каждый момент времени рассчитываются насыщенности фаз и давление смеси. Далее согласно (1) вычисляются средние насыщенности фаз по объему крупной ячейки $S_l^* = S_l^*(t)$, средние значения скоростей и градиентов давления, и согласно (10) или (11) — модифицированные ОФП $k_{rl}^* = k_{rl}^*(t)$. При

каждом t значения S_l^* и k_{rl}^* ставятся в соответствие друг другу. В результате получаем искомые зависимости:

$$k_{rl}^* = k_{rl}^*(S_w^*) \quad (l = w, o).$$

Предложенную выше методику можно легко обобщить на трёхмерный случай. В этом случае для определения тензоров k^* и k_{rl}^* необходимо решить три задачи с тремя компонентами скоростей фаз и градиентов давления и с тремя вариантами граничных условий. Всего, таким образом, можно определить девять компонент тензоров абсолютной и относительных фазовых проницаемостей трёхмерной крупной ячейки. Методика может быть обобщена также на случай, когда в состав крупных ячеек входят мелкие ячейки, вскрытые скважинами.

Обсуждение полученных результатов.

Рассмотрим некоторые следствия из полученных выше решений для модифицированных ОФП. Эквивалентная абсолютная и относительные фазовые проницаемости могут быть тензорами, даже если для мелких ячеек они являются скалярами. Это свойство ОФП есть следствие неоднородности параметров мелких ячеек. Тензор модифицированных ОФП не является функцией только параметров мелких ячеек, а зависит от параметров жидкостей (например, отношения вязкостей фаз), времени и от конкретных условий рассматриваемой задачи, то есть начальных и граничных условий. Модифицированные ОФП также зависят от количества мелких ячеек, включенных в крупные ячейки, то есть от степени укрупнения ячеек. Поэтому универсального метода up-scaling'a (когда эквивалентные параметры крупных ячеек зависели бы только от параметров мелких ячеек) как для абсолютной проницаемости, так и для относительных проницаемостей не существует. Поскольку эквивалентные параметры крупных ячеек зависят от решения на мелкой сетке, то для получения приемлемого результата необходимо делать предположение об этом решении или использовать приближённые решения.

Обратимся к результатам расчётов эквивалентных ОФП в некоторых распространенных ситуациях. В качестве примера рассмотрим два случая: 1 — вытеснение нефти водой и 2 — вытеснение нефти нефтью. Первый случай имеет место вблизи скважин, а второй — в чисто нефтяной зоне. Во избежание громоздкости выкладок и для наглядности представления результатов исследование проводилось для двумерной расчётной области в координатах x_1 и x_2 . Для мелких ячеек ОФП задавались согласно модели «разноцветных жидкостей», когда k_{rl} линейно зависят от S_{rl} , а вязкости фаз одинаковы. Численное решение задачи двухфазной фильтрации (то есть уравнения для водонасыщенности) проводилось методом линий тока [11], обладающим высокой точностью, а

также возможностью наглядного представления фильтрационных потоков.

Для давления задавались граничные условия типа а), при которых тензор модифицированных ОФП является диагональным. Для водонасыщенности задавались следующие варианты граничных и начальных условий:

$$S_{wb}(t) = S_{w, \max}^*, \quad S_{w0}(x_1, x_2) = S_{w, \min}^*, \quad (12)$$

$$S_{wb}(t) = S_{w, \min}^*, \quad S_{w0}(x_1, x_2) = S_{w, \min}^*. \quad (13)$$

Для исходных ОФП $S_{w, \min}^* = S_{wc}$ и $S_{w, \max}^* = 1 - S_{or}$, где S_{wc} и S_{or} — значения критических насыщенных, при которых соответствующая фаза теряет подвижность. При граничных условиях (12) средняя водонасыщенность в крупной ячейке S_w^* с течением времени может изменяться во всем подвижном диапазоне от S_{wc} до $1 - S_{or}$. В расчётах вязкости фаз полагались равными 1 спз; значения критических насыщенных S_{wc} и S_{or} для мелких ячеек-коллекторов — 0,2; проницаемость изотропной пористой среды — 100 мД, пористость — 0,2. Для ячеек-неколлекторов эти параметры равны нулю. Во всех ячейках-коллекторах задавался одинаковый вид ОФП.

Поскольку начальные условия для случаев (12) и (13) совпадают, то при $t = 0$ совпадают и ОФП. Таким образом, ОФП для случая (13) можно определить в процессе определения для случая (12). Поэтому в дальнейшем рассматривается только случай (12).

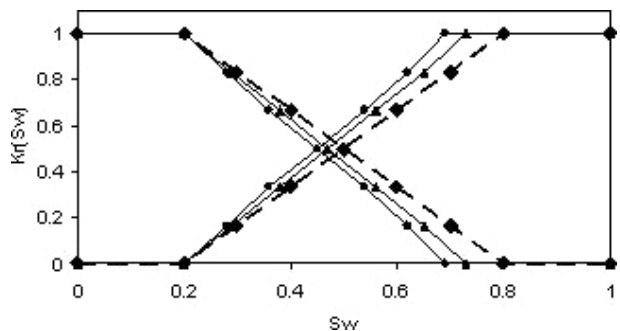
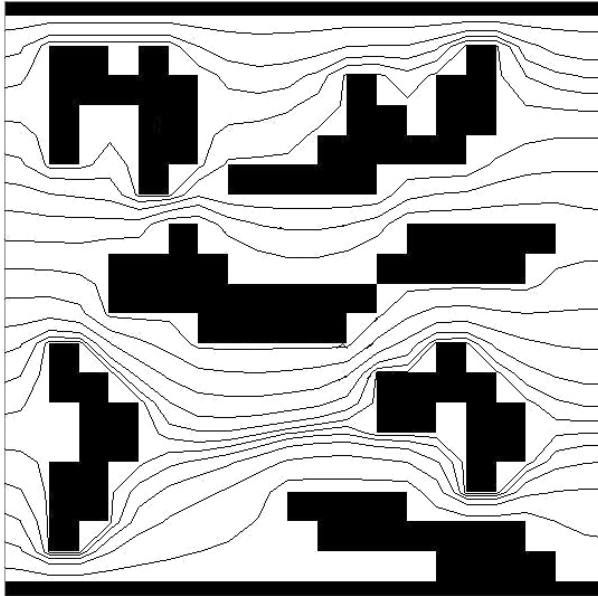


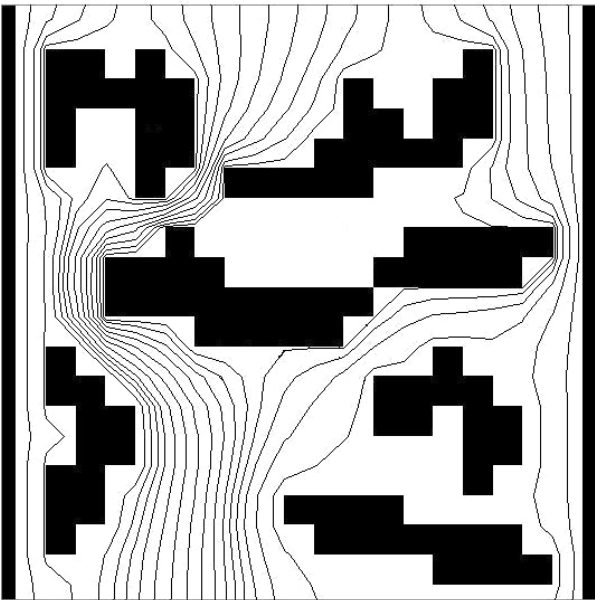
Рис. 2

На рис. 2 сплошными линиями нанесены расчётные зависимости составляющих тензора модифицированных ОФП k_{rl11}^* и k_{rl22}^* ($l = w, o$) от средней водонасыщенности крупной ячейки S_w^* (отмечены знаками соответственно \blacktriangle и \bullet), а на рис. 3а, рис. 3б — соответствующие картины линий тока и распределение проницаемости, имитирующее глинистые включения в песчанике (отмечены чёрным цветом). Штриховыми линиями на рис. 2 для сравнения нанесены ОФП мелких ячеек-коллекторов. Как следует из рис. 2, модифицированные ОФП также имеют критические насыщенные $S_{w, \min}^*$ и $S_{w, \max}^*$. Видно, что значения $S_{w, \min}^*$ и $S_{w, \max}^*$ для ОФП крупных ячеек ближе друг к другу, чем для ОФП мелких ячеек. Это смещение критических насыщенных обусловлено наличием застойных

зон, через которые не проходят линии тока. Величина смещения зависит от основного направления фильтрации.



а)



б)

Рис. 3

Критические насыщенности для модифицированных ОФП можно получить из следующих соображений. Объем V крупной ячейки равен сумме объемов коллектора и неколлектора. В свою очередь объем коллектора V_c разделяется на подвижный V_{cd} и неподвижный V_{cs} . При этом V_{cd} и V_{cs} являются тензорами и зависят от граничных условий, а V_c — скаляр. Находящаяся в коллекторе нефть также разделяется на подвижную и неподвижную. Учитывая, что пористость неколлектора равна нулю, выражения (1) можно пред-

ставить в виде

$$\begin{aligned}\varphi^* &= \frac{1}{V} \int_V \varphi dV = \alpha \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \varphi dV, \\ \varphi^* S_l^* &= \frac{1}{V} \int_V S_l \varphi dV = \alpha \frac{1}{V_c} \int_{V_c} S_l \varphi dV = \\ &= \alpha \frac{1}{V_{cd}} \int_{V_{cd}} S_l \varphi dV + \alpha \frac{1}{V_{cs}} \int_{V_{cs}} S_l \varphi dV.\end{aligned}$$

Здесь первое и второе слагаемые в правой части выражения для $\varphi^* S_l^*$ — соответственно подвижная и неподвижная часть порового объема, занятого l -й фазой; $\alpha = \frac{V_c}{V}$ — коэффициент песчанности. После несложных преобразований это выражение можно привести к следующему виду:

$$S_l^* = \alpha_{cd} \langle S_l \rangle_d + (1 - \alpha_{cd}) \langle S_l \rangle_s, \quad (14)$$

где α_{cd} — доля подвижного порового объема коллектора, $\langle S_l \rangle_d$ и $\langle S_l \rangle_s$ — средние насыщенности l -й фазы соответственно в подвижной и неподвижной частях коллектора. Тензорные величины α_{cd} , $\langle S_l \rangle_d$ и $\langle S_l \rangle_s$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\alpha_{cd} &= \frac{\int_{V_{cd}} \varphi dV}{\int_{V_c} \varphi dV}, \\ \langle S_l \rangle_d &= \frac{\int_{V_{cd}} S_l \varphi dV}{\int_{V_{cd}} \varphi dV}, \\ \langle S_l \rangle_s &= \frac{\int_{V_{cs}} S_l \varphi dV}{\int_{V_{cs}} \varphi dV}.\end{aligned} \quad (15)$$

Значения критических насыщенностей $S_{w, \min}^*$ и $S_{w, \max}^*$ определяются из (14) соответственно при $\langle S_w \rangle_d = \langle S_{w, \min} \rangle_d$ и $\langle S_w \rangle_d = \langle S_{w, \max} \rangle_d$. Учитывая, что при постоянных граничных условиях $\langle S_w \rangle_s = \langle S_w(0) \rangle_s = \langle S_{w, \min} \rangle_s = \langle S_{w, \max} \rangle_s = \text{const}$, выражения для $S_{w, \min}^*$ и $S_{w, \max}^*$ принимают вид

$$\begin{aligned}S_{w, \min}^* &= \alpha_{cd} \langle S_{w, \min} \rangle_d + (1 - \alpha_{cd}) \langle S_w \rangle_s, \\ S_{w, \max}^* &= \alpha_{cd} \langle S_{w, \max} \rangle_d + (1 - \alpha_{cd}) \langle S_w \rangle_s,\end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\langle S_{w, \min} \rangle_d &= \frac{\int_{V_{cd}} S_{w, \min} \varphi dV}{\int_{V_{cd}} \varphi dV}, \\ \langle S_{w, \max} \rangle_d &= \frac{\int_{V_{cd}} S_{w, \max} \varphi dV}{\int_{V_{cd}} \varphi dV}.\end{aligned}$$

Таким образом, видно, что $S_{w, \min}^*$ и $S_{w, \max}^*$ зависят от начальных условий. Они зависят также и от граничных условий, поскольку согласно (15) от

них зависит подвижный объём. Однако они не зависят от вязкостей фаз. Для каждого направления значения S_{wc}^* и S_{or}^* могут быть различными. Необходимо отметить, что при «открытых» граничных условиях S_{wc}^* и S_{or}^* принимают меньшие значения, чем при «закрытых».

Подставляя (14) и (15) в (16) при начальных и граничных условиях соответственно (1) и $S_o(x_1, x_2, 0) = 1 - S_{wc}$, с учётом того, что $S_o(\infty) = S_{or}$, для критических насыщенных имеем следующие выражения:

$$S_{w, \min}^* = \alpha_{cd} \langle S_{wc} \rangle_d + (1 - \alpha_{cd}) \langle S_w \rangle_s,$$

$$S_{w, \max}^* = \alpha_{cd} (1 - \langle S_{or} \rangle_d) + (1 - \alpha_{cd}) \langle S_w \rangle_s,$$

$$\langle S_{wc} \rangle_d = \frac{\int_{V_{cd}} S_{wc} \varphi dV}{\int_{V_{cd}} \varphi dV},$$

$$\langle S_{or} \rangle_d = \frac{\int_{V_{cd}} S_{or} \varphi dV}{\int_{V_{cd}} \varphi dV}.$$

Отсюда следует, что при отмеченных условиях значения критической насыщенности воды для исходных и модифицированных ОФП одинаковы $S_{w, \min}^* = S_{w, \min}$. Это подтверждается также приведёнными на рис. 2 численными расчётами.

В плане практического применения описанной выше методики можно отметить следующее. В коммерческих программных продуктах (Tempest MORE, ECLIPSE и др.) используются только изотропные ОФП. Для расширения области применения в этих программах можно производить масштабирование ОФП с использованием нормированной водонасыщенности:

$$\bar{S}_w = \bar{S}_w(S_w) = \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}},$$

то есть наряду с $k_{rw} = k_{rw}(S_w)$ можно производить расчёты и с $k_{rw} = k_{rw}(\bar{S}_w)$. Например, зависимости ОФП от водонасыщенности, полученные в результате исследований ячеек, часто представляются функциями вида

$$k_{rw} = a_w (\bar{S}_w)^{b_w}, \quad k_{ro} = a_o (1 - \bar{S}_w)^{b_o}$$

$$(a_l, b_l = \text{const}; l = w, o). \quad (17)$$

Для того чтобы в указанных выше программах учесть эффект смещения критических насыщенных, из тензоров k_{rl}^* , S_{wc}^* и S_{or}^* необходимо выделить шаровую часть:

$$k_{rl}^* = \frac{1}{2} (k_{rl,11}^* + k_{rl,22}^*), \quad S_{or}^* = \frac{1}{2} (S_{or,11}^* + S_{or,22}^*),$$

$$S_{wc}^* = \frac{1}{2} (S_{wc,11}^* + S_{wc,22}^*),$$

а затем применить масштабирование к модифицированным ОФП. Изотропные модифицированные нормированные ОФП и водонасыщенность

(то есть шаровые части соответствующих тензоров) определяются следующим образом:

$$k_{rw}^* = k_{rw}^*(\bar{S}_w^*), \quad k_{ro}^* = k_{ro}^*(\bar{S}_w^*),$$

$$\bar{S}_w^* = \frac{S_w^* - S_{wc}^*}{1 - S_{wc}^* - S_{or}^*}.$$

С помощью масштабирования можно получить неплохое приближение для реальных ОФП, что можно видеть из рис. 2 на примере линейных ОФП.

При адаптации гидродинамических моделей к истории разработки обычно варьируют параметры ОФП a_l и b_l ($l = w, o$) из (17). Ввиду сложной зависимости критических насыщенных от многих отмеченных выше достаточно неопределённых факторов они обладают значительной степенью неопределённости. Поэтому при адаптации гидродинамических моделей, для которых up'scaling уже выполнен, необходимо оценивать и варьировать также и критические насыщенности S_{wc}^* и S_{or}^* . Их нижней оценкой являются величины

$$\langle S_{wc} \rangle = \frac{1}{\varphi^* V} \int_V \varphi S_{wc} dV, \quad \langle S_{or} \rangle = \frac{1}{\varphi^* V} \int_V \varphi S_{or} dV.$$

Выводы. На основе развитой методики определения модифицированных ОФП установлено, что в неоднородном пласте при объединении мелких ячеек геологической сетки в крупные ячейки гидродинамической сетки (up'scaling) модифицированные ОФП являются тензорами, даже если ОФП мелких ячеек — скаляры.

Модифицированные ОФП крупных ячеек зависят не только от фильтрационно-ёмкостных параметров входящих в их состав мелких ячеек, но и от начального распределения насыщенных фаз и направления фильтрационного потока в крупных ячейках, а также от условий на их границах. В частности, значения критических насыщенных при «открытых» граничных условиях меньше, чем при «закрытых».

Использование модифицированных ОФП позволит избежать существующей в практике гидродинамического моделирования зависимости конечного КИН от степени огрубления геологической модели. Это может быть учтено изменением критических насыщенных модифицированных ОФП, которые при адаптации модели к истории разработки в определённом диапазоне можно рассматривать в качестве свободных параметров.

Литература

1. Durlafsky L.J. Upscaling and Gridding of Fine Scale Geological Models for Flow Simulation. Department of Petroleum Engineering. — Stanford: Stanford University, CA 94305-22220 USA, 2005.
2. Chen Y., Durlafsky L.J., Gerritsen M., Wen X.H. A Coupled Local-Global Upscaling Approach for Simulating Flow in Highly Heterogeneous Formations // Appearing in

Advances in Water Resources. — 2003. — V. 26, N. 10. — P. 1041–1060.

3. *Закиров Э.С.* Трехмерные многофазные задачи прогнозирования, анализа и регулирования разработки месторождений нефти и газа. — М.: Изд-во «Грааль», 2001. — 303 с.

4. *Каневская Р.Д.* Асимптотический анализ влияния капиллярных и гравитационных сил на двумерный фильтрационный перенос двухфазных систем // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1988. — № 4. — С. 88–95.

5. *Jacks H.H., Smith O.J., Mattax C.C.* The modeling of a three-dimensional reservoir with a two-dimensional reservoir simulator. The use of dynamic pseudo functions // SPEJ. — 1973. — 13, N. 3. — P. 175–185.

6. *Kyte J.R., Berry D.W.* New pseudofunctions to control numerical dispersion // SPE Journal. — 1975. — V. 15, N. 3. — P. 269–276.

7. *Stone H.L.* Rigorous black-oil pseudofunctions // Paper SPE 21207. — 1991.

8. *Barker J.W., Thibeau S.* A Critical Review of the Use of Pseudo Relative Permeabilities for Upscaling, Paper SPE 35491 presented at European 3-D Reservoir Modeling Conference held in Stavanger. — Norway, April 16–17, 1996.

9. *Christie M.A.* Upscaling for reservoir simulation // J. Petrol.-Technol. — 1996. — V. 48, N. 11. — P. 1004–1010.

10. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика: учебник. — М.: Недра, 1993.

11. *Batycky R.P.* A Three-Dimensional Two-Phase Field Scale Streamline Simulator. — PhD dissertation, January 1997.

12. *Закиров С.Н.* Анализ проблемы «Плотность сетки скважин. — нефтеотдача». — М.: ИД «Грааль», 2002. — 314 с.

Поступила в редакцию 03.03.2009.