УДК 517.977.8

П.Е. Двуреченский, Г.Е. Иванов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Алгоритм построения оптимальной стратегии в нелинейной дифференциальной игре с использованием конволюты*

Разработан метод вычисления квазиоптимальных стратегий в нелинейной дифференциальной игре на фиксированном отрезке времени с целевым множеством. В двумерном случае игровые множества достижимости вычисляются с помощью алгоритма, близкого к алгоритму построения конволюты суммы Минковского двух многоугольников. Проведены детальные оценки погрешностей алгоритма.

Ключевые слова: дифференциальная игра, оптимальная стратегия.

Основы теории дифференциальных игр с нулевой суммой заложены в работах Р. Айзекса [1], Л.С. Понтрягина [2], Н.Н. Красовского [3] и др. В настоящее время разработаны различные алгоритмы, вычисляющие цену игры, и оптимальные стратегии управления [4–6]. Для линейных дифференциальных игр с выпуклым целевым множеством современные методы используют алгоритмы вычисления игровых множеств достижимости через опорные функции этих множеств. Если дифференциальная игра нелинейна, то игровые множества достижимости становятся невыпуклыми, аппарат опорных функций становится неприменимым. В работе [7] для нелинейной дифференциальной игры с липшицевой функцией платы предложен алгоритм построения квазиоптимальной стратегии управления с помощью пошагового минимакса.

В настоящей работе предлагается алгоритм построения квазиоптимальной (или ε-оптимальной) стратегии управления для нелинейной дифференциальной игры на фиксированном отрезке времени с целевым множеством. Алгоритм использует попятную конструкцию построения игровых множеств достижимости. В двумерном случае эти множества могут быть построены с помощью алгоритма, близкого к алгоритму построения конволюты суммы Минковского двух многоугольников [10, 11].

В силу чрезвычайно высокой вычислительной сложности алгоритмов, используемых в теории дифференциальных игр, и для анализа эффективности этих алгоритмов важно оценить погрешности алгоритмов. Оценкам погрешностей алгоритмов в теории дифференциальных игр посвящены работы [12, 14]. В настоящей работе получены оценки параметра ε, определяющего близость ε-оптимальной стратегии к оптимальной, в зависимости от параметров дискретизации алгоритма.

I. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = a(t, x(t), u(t)) + b(t, x(t), v(t)), \ t \in [0, \vartheta], \quad (1.1)$$

на фиксированном отрезке времени $[0, \vartheta]$, где t — время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, управление первого игрока $u(t)$ и второго игрока $v(t)$ подчинены ограничениям

$$u(t) \in P, \quad v(t) \in Q \quad \forall\, t \in [0, \vartheta]. \quad (1.2)$$

Предполагается, что заданы компактные множества P, Q и непрерывные функции $a : [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \to \mathbb{R}^n$ и $b : [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times Q \to \mathbb{R}^n$. Кроме того, вектограммы $a(t, x, P) = \{a(t, x, u) : u \in P\}$, $b(t, x, Q) = \{b(t, x, v) : v \in Q\}$ выпуклы при всех $t \in [0, \vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть также задано компактное множество $M \subset \mathbb{R}^n$, которое будем называть *целевым*, или *терминальным*.

Пусть для какой-то начальной позиции $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ и каких-то измеримых управлений u: $[0, \vartheta] \to P$, v: $[0, \vartheta] \to Q$ абсолютно непрерывная функция $x : [0, \vartheta] \to \mathbb{R}^n$ почти всюду на отрезке $[0, \vartheta]$ удовлетворяет уравнению (1.1). Если в конечный момент времени выполняется $x(\vartheta) \in M$, то будем говорить, что в игре имеет место поимка. Если в конечный момент времени выполняется $x(\vartheta) \notin M$, то будем говорить, что в игре имеет место уклонение. Цель первого игрока состоит в поимке, цель второго игрока — в уклонении.

Расстоянием от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\varrho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|. \quad (1.3)$$

Будем говорить, что в конечный момент времени имеет место *ε-поимка*, если $\varrho(x(\vartheta), M) \leqslant \varepsilon$.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00139а, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы».

Будем предполагать, что функции $a : [0,\vartheta] \times \times \mathbb{R}^n \times P \to \mathbb{R}^n$ и $b : [0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \times Q \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим условиям Липшица:

$$\|a(t_1,x_1,u_1) - a(t_2,x_2,u_2)\| \leqslant \leqslant L_a^t|t_1-t_2| + L_a^x\|x_1-x_2\| + L_a^u\|u_1-u_2\| \quad \forall\, t_1,t_2 \in [0,\vartheta],\quad x_1,x_2 \in \mathbb{R}^n,\quad u_1,u_2 \in P; \tag{1.4}$$

$$\|b(t_1,x_1,v_1) - b(t_2,x_2,v_2)\| \leqslant \leqslant L_b^t|t_1-t_2| + L_b^x\|x_1-x_2\| + L_b^v\|v_1-v_2\| \quad \forall\, t_1,t_2 \in [0,\vartheta],\quad x_1,x_2 \in \mathbb{R}^n,\quad v_1,v_2 \in Q; \tag{1.5}$$

$$\|a(t,x,u)\| \leqslant C_a \ \forall\, t \in [0,\vartheta],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in P; \tag{1.6}$$

$$\|b(t,x,v)\| \leqslant C_b \ \forall\, t \in [0,\vartheta],\ x \in \mathbb{R}^n,\ v \in Q. \tag{1.7}$$

Обозначим

$$C = C_a + C_b, \quad L = L_a^x + L_b^x. \tag{1.8}$$

II. Стратегии и законы управления

Пусть задано число $t_0 \in [0,\vartheta]$. Множеством $\mathcal{U}[t_0,\vartheta]$ *допустимых реализаций управления* первого игрока называется множество всех измеримых функций $u : [t_0,\vartheta] \to P$. Множеством $\mathcal{V}[t_0,\vartheta]$ допустимых реализаций управления второго игрока называется множество всех измеримых функций $v : [t_0,\vartheta] \to Q$.

Пусть заданы число $t_0 \in [0,\vartheta)$ и начальное состояние $x(t_0) = x_0$. Пусть $T = \{\tau_i\}_{i=0}^I$ — разбиение отрезка $[t_0,\vartheta] : t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_I = = \vartheta$. *Кусочно-постоянной стратегией* первого игрока, соответствующей разбиению T, будем называть набор функций $u_T^{\text{str}} = \{u_i^{\text{str}} : \mathbb{R}^n \to P\}_{i=0}^{I-1}$. *Движением*, соответствующим начальному состоянию $x(t_0) = x_0$, разбиению T, стратегии первого игрока u_T^{str} и допустимой реализации управления $v \in \mathcal{V}[t_0,\vartheta]$, будем называть функцию $x : [t_0,\vartheta] \to \to \mathbb{R}^n$, определяемую из пошагового уравнения

$$\dot{x}(t) = a(t,x(t),u_T^{\text{str}}(x(\tau_i))) + b(t,x(t),v(t)), \tag{2.9}$$

которое должно выполняться при почти всех $t \in \in [\tau_i,\tau_{i+1}]$ и всех $i \in \overline{0,I-1}$. При этом начальная позиция для отрезка $[\tau_0,\tau_1]$ равна x_0, а начальная позиция $x(\tau_i)$ для отрезка $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ совпадает с конечной позицией $x(\tau_i)$ отрезка $[\tau_{i-1},\tau_i]$.

В силу принятых предположений при заданных начальной позиции $x(t_0) = x_0$, разбиении T, стратегии первого игрока u_T^{str} и допустимой реализации управления $v \in \mathcal{V}[t_0,\vartheta]$ движение $x(\cdot)$ существует и единственно. Обозначим его следующим образом:

$$x_u^{\text{mot}}(t,t_0,x_0,T,u_T^{\text{str}},v) = x(t) \quad \forall\, t \in [t_0,\vartheta]. \tag{2.10}$$

Аналогично определяются кусочно-постоянная стратегия второго игрока v_T^{str}, соответствующая разбиению T, и движение $x_v^{\text{mot}}(t,t_0,x_0,T,u,v_T^{\text{str}})$, соответствующее начальной позиции $x(t_0) = x_0$, разбиению T, допустимой реализации управления первого игрока $u \in \mathcal{U}[t_0,\vartheta]$ и кусочно-постоянной стратегии второго игрока v_T^{str}.

Будем говорить, что кусочно-постоянная стратегия u_T^{str} *гарантирует ε-поимку* для начального состояния x_0, если для любой реализации управления $v \in \mathcal{V}[0,\vartheta]$ выполняется

$$\varrho\left(x_u^{\text{mot}}(\vartheta,0,x_0,T,u_T^{\text{str}},v),M\right) \leqslant \varepsilon. \tag{2.11}$$

Будем говорить, что кусочно-постоянная стратегия v_T^{str} *гарантирует уклонение* для начального состояния x_0, если для любой реализации управления $u \in \mathcal{U}[0,\vartheta]$ выполняется

$$x_v^{\text{mot}}(\vartheta,0,x_0,T,u,v_T^{\text{str}}) \notin M. \tag{2.12}$$

Пара кусочно-постоянных стратегий $(u_T^{\text{str}},v_T^{\text{str}})$ называется *ε-оптимальной*, если для любого начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ выполняется хотя бы одно из условий:
1) стратегия u_T^{str} гарантирует ε-поимку или
2) стратегия v_T^{str} гарантирует уклонение.

III. Алгоритм вычисления стратегии управления

Зафиксируем натуральное число I и рассмотрим равномерное разбиение $T = \{\tau_i\}_{i=0}^I$ отрезка $[0,\vartheta]$, где $\tau_i = i\tau$, $i \in \overline{0,I}$. Шаг $\tau = \vartheta/I$ разбиения T будем также называть *параметром дискретизации по времени.*

Для любого множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и любого индекса $i \in \overline{0,I-1}$ определим множества

$$A_iS = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, u \in P : x + \tau a(\tau_i,x,u) \in S\}, \tag{3.13}$$

$$B_iS = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall\, v \in Q : x + \tau b(\tau_i,x,v) \in S\}. \tag{3.14}$$

Таким образом, определены операторы A_i, B_i, которые будем называть *одношаговыми операторами достижимости.*

Суммой и *разностью Минковского* множеств $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ называются соответственно множества

$$\begin{aligned} X + Y &= \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}, \\ X \overset{*}{-} Y &= \{x \in \mathbb{R}^n :\ x + Y \subset X\}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Заметим, что если функции $a(t,x,u)$ и $b(t,x,v)$ не зависят от фазового вектора x, то одношаговые операторы достижимости выражаются через операции Минковского. Действительно, пусть $a(t,x,u) = a(t,u)$, $b(t,x,v) = b(t,v)$. Тогда согласно равенствам (3.13), (3.14) имеем

$$A_iS = S + (-\tau a(\tau_i,P)),\ B_iS = S \overset{*}{-} \tau b(\tau_i,Q). \tag{3.16}$$

Для любого числа $R > 0$ через $\mathfrak{B}_R$ обозначим замкнутый шар с центром в нуле и радиусом R:

$$\mathfrak{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \; \|x\| \leqslant R\}. \qquad (3.17)$$

Пусть Σ — класс множеств в $\mathbb{R}^n$, с которым работают алгоритмы. Примером класса Σ может служить класс многоугольников в $\mathbb{R}^2$.

В параграфе V будут рассмотрены алгоритмы, которые для каждого множества $S \in \Sigma$ и для каждого индекса $i \in \overline{0, I-1}$ с некоторыми погрешностями вычисляют множества $A_i S$, $B_i S$. Учитывая эти погрешности, будем предполагать, что реально для каждого множества $S \in \Sigma$ вычисляются множества $\tilde{A}_i S$, $\tilde{B}_i S$ класса Σ, удовлетворяющие условиям

$$A_i(S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{\varepsilon_A}) \subset \tilde{A}_i S \subset A_i(S + \mathfrak{B}_{\varepsilon_A}), \qquad (3.18)$$

$$B_i(S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{\varepsilon_B}) \subset \tilde{B}_i S \subset B_i(S + \mathfrak{B}_{\varepsilon_B}), \qquad (3.19)$$

где числа ε_A, ε_B определяют погрешности этих алгоритмов.

Опишем метод, который для любых множества $S \subset \Sigma$, индекса $i \in \overline{0, I-1}$ и вектора $x \in \tilde{A}_i S$ позволяет определить вектор $\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(x, S) \in P$ такой, что

$$x + \tau a(\tau_i, x, \tilde{u}_i) \in S + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u}. \qquad (3.20)$$

Зафиксируем номер $i \in \overline{0, I-1}$ и точку $x \in \tilde{A}_i S$. Тогда в силу соотношения (3.18) имеем $x \in A_i(S + \mathfrak{B}_{\varepsilon_A})$. Поэтому согласно равенству (3.13) существует такой вектор $u \in P$, что $x + \tau a(\tau_i, x, u) \in S + \mathfrak{B}_{\varepsilon_A}$. Это означает, что

$$(S + \mathfrak{B}_{\varepsilon_A} - x) \cap (\tau a(\tau_i, x, P)) \neq \varnothing.$$

Аппроксимируем множество $\tau a(\tau_i, x, P)$ многогранником $\widehat{P}$ таким, что $\widehat{P} \subset \tau a(\tau_i, x, P) \subset \widehat{P} + \mathfrak{B}_{\delta_P}$. Приблизим шар $\mathfrak{B}_{\varepsilon_u}$ вписанным в него многогранником $\widehat{\mathfrak{B}}_{\varepsilon_u}$. Задача нахождения управления при этом сведется к поиску пересечения двух многогранников $S + \widehat{\mathfrak{B}}_{\varepsilon_u} - x$ и $\widehat{P}$, что легко осуществить алгоритмически. Число $\varepsilon_u > \varepsilon_A$ подберем таким образом, чтобы пересечение этих двух многогранников было заведомо непусто. Это возможно, так как реальные множества $S + \mathfrak{B}_{\varepsilon_A} - x$ и $\tau a(\tau_i, x, P)$ имеют непустое пересечение, а погрешность, вносимую приближениями шара и вектограммы, мы компенсируем увеличением радиуса шара $\mathfrak{B}_{\varepsilon_u}$, прибавляемого к множеству S.

Аналогичным методом для любых множества $S \subset \Sigma$, индекса $i \in \overline{0, I-1}$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n \setminus (\tilde{B}_i S)$ найдем вектор $\tilde{v}_i = \tilde{v}_i(x, S) \in Q$ такой, что

$$x + \tau b(\tau_i, x, \tilde{v}_i) \in (\mathbb{R}^n \setminus S) + \mathfrak{B}_{\varepsilon_v}. \qquad (3.21)$$

Здесь числа ε_u и ε_v определяют погрешности соответствующих алгоритмов.

Зафиксируем некоторые векторы $u_* \in P$, $v_* \in Q$ и положим $\tilde{u}_i(x, S) = u_*$ при $x \notin \tilde{A}_i S$, $\tilde{v}_i(x, S) = v_*$ при $x \in \tilde{B}_i S$. Тем самым при всех $i \in \overline{0, I-1}$ определены функции

$$\tilde{u}_i : \mathbb{R}^n \times \Sigma \to P, \qquad \tilde{v}_i : \mathbb{R}^n \times \Sigma \to Q. \qquad (3.22)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_u^0 &= \tau^2 \left(\frac{LC}{2} + L_b^x C_a + \frac{L_b^t}{2} \right), \\ \Delta_v^0 &= \tau^2 \left(\frac{LC}{2} + L_a^x C_b + \frac{L_a^t}{2} \right), \end{aligned} \qquad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta_u &= \Delta_u^0 + \varepsilon_B + (1 + \tau L_b^x)\varepsilon_u, \\ \Delta_v &= \Delta_v^0 + \varepsilon_A + (1 + \tau L_a^x)\varepsilon_v. \end{aligned} \qquad (3.24)$$

Пусть имеются алгоритмы, которые для любого множества $S \in \Sigma$ вычисляют множества $D_u S \in \Sigma$, $D_v S \in \Sigma$ такие, что

$$\begin{aligned} S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u + \varepsilon_D} \subset D_u S \subset S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u}, \\ S + \mathfrak{B}_{\Delta_v} \subset D_v S \subset S + \mathfrak{B}_{\Delta_v + \varepsilon_D}, \end{aligned} \qquad (3.25)$$

где число ε_D определяет погрешность этих алгоритмов.

Зафиксируем положительное число ε.

Определим множества $M_I^u \in \Sigma$, $M_I^v \in \Sigma$ так, что

$$M + \mathfrak{B}_{\varepsilon - \varepsilon_M} \subset M_I^u \subset M + \mathfrak{B}_{\varepsilon}, \qquad (3.26)$$

$$M \subset M_I^v \subset M + \mathfrak{B}_{\varepsilon_M}. \qquad (3.27)$$

Здесь число $\varepsilon_M \in (0, \varepsilon)$ определяет погрешность начальной аппроксимации.

Двигаясь в сторону уменьшения индекса i и используя алгоритмы параграфа V, вычислим наборы *игровых множеств достижимости* $\{M_i^u\}_{i=0}^{I-1}$, $\{M_i^v\}_{i=0}^{I-1}$:

$$M_i^u = \tilde{A}_i \tilde{B}_i D_u M_{i+1}^u, \qquad (3.28)$$

$$M_i^v = \tilde{B}_i \tilde{A}_i D_v M_{i+1}^v. \qquad (3.29)$$

Для любых $i \in \overline{0, I-1}$ и $x \in \mathbb{R}^n$, используя функции (3.22) и игровые множества достижимости M_i^u, M_i^v, вычисленные алгоритмами параграфа V, определим

$$u_i(x) = \tilde{u}_i(x, \tilde{B}_i D_u M_{i+1}^u), \qquad (3.30)$$

$$v_i(x) = \tilde{v}_i(x, \tilde{A}_i D_v M_{i+1}^v). \qquad (3.31)$$

Теорема 3.1. Пусть $x_0 \in M_0^u$, стратегия $u_T^{\text{str}} = \{u_i\}_{i=0}^{I-1}$ определена соотношением (3.30). Тогда стратегия u_T^{str} гарантирует ε-поимку на отрезке $[0, \vartheta]$ для начального состояния $x(0) = x_0$. □

Теорема 3.2. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M_0^v$, стратегия $v_T^{\text{str}} = \{v_i\}_{i=0}^{I-1}$ определена соотношением (3.31). Тогда стратегия v_T^{str} гарантирует уклонение на отрезке $[0, \vartheta]$ для начального состояния $x(0) = x_0$. □

Определим числа

$C_1 = 2C_b +$

$$+ \vartheta \left(LC + L_a^x C_b + L_b^x C_a + \frac{1}{2} L_a^t + \frac{3}{2} L_b^t \right), \quad (3.32)$$

$$\varepsilon_0 = (C_1 \tau + 2\varepsilon_M + \\ + (3\varepsilon_A + 3\varepsilon_B + 2\varepsilon_D + 2\varepsilon_u + 2\varepsilon_v) I). \quad (3.33)$$

Теорема 3.3. Пусть $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$. Тогда пара кусочно-постоянных стратегий $(u_T^{\mathrm{str}}, v_T^{\mathrm{str}})$ является ε-оптимальной. □

IV. Доказательство теорем 3.1–3.3

Лемма 4.1. Для любых множества $S \subset \subset \mathbb{R}^n$, индекса $i \in \overline{0, I-1}$ и числа $\delta > 0$ операторы (3.13), (3.14) удовлетворяют соотношениям

$$A_i S + \mathfrak{B}_\delta \subset A_i (S + \mathfrak{B}_{(1+\tau L_a^x)\delta}), \quad (4.34)$$

$$B_i S + \mathfrak{B}_\delta \subset B_i (S + \mathfrak{B}_{(1+\tau L_b^x)\delta}). \quad (4.35)$$

□

Доказательство. Пусть $x \in A_i S + \mathfrak{B}_\delta$. Тогда существует вектор $y \in A_i S$ такой, что $\|y - x\| \leqslant \leqslant \delta$. В силу равенства (3.13) существует вектор $u \in P$ такой, что $y + \tau a(\tau_i, y, u) \in S$. Отсюда в силу соотношения (1.4) получаем включение $x + + \tau a(\tau_i, x, u) \in S + \mathfrak{B}_{(1+\tau L_a^x)\delta}$. Следовательно, $x \in A_i(S + \mathfrak{B}_{(1+\tau L_a^x)\delta})$, что доказывает включение (4.34). Включение (4.35) доказывается аналогично. ■

Для любых $t_0 \in [0, \vartheta], t_1 \in [t_0, \vartheta], x_0 \in \mathbb{R}^n, u \in \in \mathcal{U}[t_0, t_1], v \in \mathcal{V}[t_0, t_1]$ обозначим

$$\chi(t, t_0, x_0, u, v) = x(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (4.36)$$

где $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ — решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = a(t, x(t), u(t)) + b(t, x(t), v(t)), \ t \in [0, \vartheta], \quad (4.37)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Проводя рассуждения, близкие к доказательству леммы 5.1 из [8], получаем следующую лемму.

Лемма 4.2. Пусть заданы числа $\tau \in (0, \vartheta)$, $t_0 \in [0, \vartheta - \tau]$, вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и функции $u \in \in \mathcal{U}[t_0, t_0 + \tau], v \in \mathcal{V}[t_0, t_0 + \tau]$. Пусть

$$x_u = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} a(t_0, x_0, u(t))\, dt, \quad (4.38)$$

$$x_1 = \chi(t_0 + \tau, t_0, x_0, u, v). \quad (4.39)$$

Тогда существует вектор $v_0 \in Q$ такой, что вектор

$$x_{uv} = x_u + \tau b(t_0, x_u, v_0) \quad (4.40)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|x_{uv} - x_1\| \leqslant \Delta_u^0, \quad (4.41)$$

где число Δ_u^0 определено равенством (3.23). □

Лемма 4.3. Пусть стратегия первого игрока $u_T^{\mathrm{str}} = \{u_i\}_{i=0}^{I-1}$ определяется соотношением (3.30), $i \in \overline{0, I-1}$, $x_0 \in M_i^u$, $v \in \mathcal{V}[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $x_1 = = x_u^{\mathrm{mot}}(\tau_i, \tau_{i+1}, x_0, T, u_T^{\mathrm{str}}, v)$. Тогда $x_1 \in M_{i+1}^u$. □

Доказательство. Определим функцию $u \in \in \mathcal{U}[\tau_i, \tau_{i+1}]$ формулой

$$u(t) = u_i(x_0) \quad \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]. \quad (4.42)$$

Тогда справедливо равенство (4.39), где $t_0 = \tau_i$.

Из включения $x_0 \in M_i^u$ и равенства (3.28) получаем $x_0 \in \tilde{A}_i \tilde{B}_i D_u M_{i+1}^u$. Отсюда и из соотношений (3.20), (3.30) следует включение $x_0 + + \tau a(\tau_i, x_0, u_i(x_0)) \in \tilde{B}_i D_u M_{i+1}^u + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u}$. Поэтому согласно равенству (4.42) получаем, что вектор x_u, определяемый формулой (4.38), удовлетворяет включению

$$x_u \in \tilde{B}_i D_u M_{i+1}^u + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u}. \quad (4.43)$$

Так как согласно включениям (3.25) имеем $D_u M_{i+1}^u \subset M_{i+1}^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u}$, то $\tilde{B}_i D_u M_{i+1}^u \subset \subset \tilde{B}_i (M_{i+1}^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u})$ и в силу включений (3.19) получаем $\tilde{B}_i D_u M_{i+1}^u \subset B_i (M_{i+1}^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u} + \mathfrak{B}_{\varepsilon_B})$. Используя соотношение (4.35), (4.43), получаем

$$x_u \in \tilde{B}_i D_u M_{i+1}^u + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u} \subset \\ \subset B_i (M_{i+1}^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u} + \mathfrak{B}_{\varepsilon_B}) + \mathfrak{B}_{\varepsilon_u} \subset B_i S, \quad (4.44)$$

где

$$S = M_{i+1}^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u} + \mathfrak{B}_{\varepsilon_B} + \mathfrak{B}_{(1+\tau L_b^x)\varepsilon_u}. \quad (4.45)$$

В силу леммы 4.2 существует вектор $v_0 \in Q$ такой, что для вектора $x_{uv} = x_u + \tau b(\tau_i, x_u, v_0)$ справедливо неравенство (4.41). Из соотношений (3.14), (4.44) следует включение $x_{uv} \in \in S$. Отсюда в силу неравенства (4.41) и равенства (4.45) получаем включение $x_1 \in S + \mathfrak{B}_{\Delta_u^0} = = M_{i+1}^u \overset{*}{-} \mathfrak{B}_{\Delta_u} + \mathfrak{B}_{\varepsilon_B + (1+\tau L_b^x)\varepsilon_u + \Delta_u^0}$. Поэтому согласно равенству (3.24) справедливо включение $x_1 \in M_{i+1}^u$. ■

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 4.3, получаем следующую лемму.

Лемма 4.4. Пусть стратегия второго игрока $v_T^{\mathrm{str}} = \{v_i\}_{i=0}^{I-1}$ определяется соотношением (3.31), $i \in \overline{0, I-1}$, $x_0 \notin M_i^v$, $u \in \mathcal{U}[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $x_1 = = x_v^{\mathrm{mot}}(\tau_i, \tau_{i+1}, x_0, T, u, v_T^{\mathrm{str}})$. Тогда $x_1 \notin M_{i+1}^v$. □

Доказательство теоремы 3.1. Используя лемму 4.3, индукцией по индексу $i \in \overline{0, I-1}$ получаем включения $x_u^{\mathrm{mot}}(t_0, \tau_i, x_0, T, u_T^{\mathrm{str}}, v) \in \in M_i^u$. Отсюда в силу соотношения (3.26) имеем $x_u^{\mathrm{mot}}(t_0, \vartheta, x_0, T, u_T^{\mathrm{str}}, v) \in M + \mathfrak{B}_\varepsilon$. Следовательно, выполнено неравенство (2.11). ■

Доказательство теоремы 3.2. Используя лемму 4.4, индукцией по индексу $i \in \overline{0, I-1}$ получаем включения $x_v^{\mathrm{mot}}(t_0, \tau_i, x_0, T, u, v_T^{\mathrm{str}}) \in \mathbb{R}^n \setminus M_i^v$. Отсюда в силу соотношения (3.27) приходим к соотношению (2.12). ■

Доказательство теоремы 3.3. Используя неравенство $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$ и повторяя с некоторыми изменениями доказательство теоремы 3 из [8], получаем включение $M_0^v \subset M_0^u$, которое вместе с теоремами 3.1, 3.2 доказывает ε-оптимальность пары стратегий $(u_T^{\text{str}}, v_T^{\text{str}})$.

V. Алгоритм вычисления одношаговых операторов достижимости в двумерном случае

Для любых $i \in \overline{0, I-1}$, $S \subset \mathbb{R}^n$ определим множество
$$\overline{A_i}S = \bigcup_{x \in S} (x - \tau a(\tau_i, x, P)). \tag{5.46}$$

Лемма 5.5. Пусть выполнено неравенство $\tau L_a^x < 1$. Тогда для любого множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и любого индекса $i \in \overline{0, I-1}$ справедливы включения
$$\overline{A_i}S \subset A_i(S + \mathfrak{B}_{L_a^x C_a \tau^2}), \tag{5.47}$$
$$A_i S \subset \overline{A_i}(S + \mathfrak{B}_{L_a^x C_a \tau^2}). \tag{5.48}$$
□

Доказательство. Зафиксируем множество $S \subset \mathbb{R}^n$ и индекс $i \in \overline{0, I-1}$. Пусть $x \in \overline{A_i}S$. Тогда существуют векторы $y \in S$, $u \in P$ такие, что $x = y - \tau a(\tau_i, y, u)$. Следовательно, $\|y - x\| \leqslant C_a \tau$, $\|x + \tau a(\tau_i, x, u) - y\| = \tau \|a(\tau_i, x, u) - a(\tau_i, y, u)\| \leqslant L_a^x C_a \tau^2$, т.е. $x \in A_i(S + \mathfrak{B}_{L_a^x C_a \tau^2})$, что доказывает включение (5.47).

Докажем включение (5.48). Пусть $x \in A_i S$. Тогда согласно равенству (3.13) существует вектор $u \in P$ такой, что $x + \tau a(\tau_i, x, u) \in S$. В силу неравенства $\tau L_a^x < 1$ отображение $F(y) = x + \tau a(\tau_i, y, u)$ является сжимающим и, значит, имеет неподвижную точку $y_0 \in \mathbb{R}^n$: $y_0 = F(y_0)$, т.е. $y_0 = x + \tau a(\tau_i, y_0, u)$. Следовательно, $\|y_0 - x\| \leqslant C_a \tau$, $\|x + \tau a(\tau_i, x, u) - y_0\| = \tau \|a(\tau_i, x, u) - a(\tau_i, y_0, u)\| \leqslant L_a^x C_a \tau^2$. Поэтому $y_0 \in S + \mathfrak{B}_{L_a^x C_a \tau^2}$, $x = y_0 - \tau a(\tau_i, y_0, u) \in \overline{A_i}(S + \mathfrak{B}_{L_a^x C_a \tau^2})$. ■

Далее будем предполагать, что размерность фазового вектора $n = 2$ и для любых $t \in [0, \vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^2$ вектограммы $a(t, x, P)$ и $b(t, x, Q)$ являются выпуклыми многоугольниками или отрезками. Будем также предполагать, что игровые множества достижимости и дополнения к ним связны. В качестве класса множеств Σ, с которым работают алгоритмы, будем рассматривать множество многоугольников с длинами сторон, не превосходящими заданного числа h, которое будем называть *параметром дискретизации по пространству.*

Напомним определения. Пусть задан набор точек $a_k \in \mathbb{R}^2$, $k = \overline{1, m}$, причем $a_{k+1} \neq a_k$ для любого $k \in \overline{1, m-1}$. Упорядоченный набор отрезков $\{[a_1, a_2], [a_2, a_3], \ldots, [a_{m-1}, a_m]\}$ называется *ломаной* $\Gamma(a_1, \ldots, a_m)$, точки a_k называются *вершинами*, а отрезки $[a_k, a_{k+1}]$ — *звеньями* этой ломаной. Для одной точки $a \in \mathbb{R}^2$ положим $\Gamma(a) = \{a\}$. Ломаная $\Gamma(a_1, \ldots, a_m)$ называется *замкнутой*, если $a_m = a_1$. Ломаная $\Gamma(a_1, \ldots, a_m)$ называется *простой замкнутой*, если $m > 1$, $a_m = a_1$ и из того, что $z \in [a_j, a_{j+1}] \cap [a_k, a_{k+1}]$, $1 \leqslant j < k < m$ следует, что $k = j + 1$ и $z = a_k$. *Многоугольником* называется ограниченное замкнутое связное множество $S \subset \mathbb{R}^2$ такое, что его границей ∂S является простая замкнутая ломаная. *Вершинами многоугольника* S называются вершины ломаной ∂S.

Заметим, что для любой замкнутой ломаной $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ее дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ состоит из конечного числа непересекающихся областей, одна из которых неограничена. Дополнение к этой неограниченной области называется *доменом* γ и обозначается $\operatorname{domain}\gamma$. Легко видеть, что домен любой замкнутой ломаной $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ является замкнутым ограниченным связным множеством, причем $\gamma \subset \operatorname{domain}\gamma$ и $\partial(\operatorname{domain}\gamma) \subset \gamma$. Граница домена замкнутой ломаной γ называется *внешним контуром* γ и обозначается $\operatorname{ext}\gamma$: $\operatorname{ext}\gamma = \partial(\operatorname{domain}\gamma)$.

Алгоритм вычисления внешнего контура замкнутой ломаной $\gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_k, x_1)$ состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Найдем вершину x_{i_0} $(1 \leqslant i_0 \leqslant k)$, наименьшую в смысле лексикографического порядка; положим $i = i_0$.

Шаг 2. Если на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ нет точек пересечения с другими звеньями ломаной γ (кроме соответствующих концов соседних звеньев), то добавляем отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ в контур $\operatorname{ext}\gamma$ и увеличиваем индекс i на 1 (по модулю k). Иначе находим z — точку самопересечения γ, лежащую на $[x_i, x_{i+1}]$, ближайшую к точке x_i. Добавляем отрезок $[x_i, z]$ в контур $\operatorname{ext}\gamma$. Находим V — множество концов всех звеньев ломаной γ, проходящих через точку z. Среди всех вершин $x_j \in V \setminus \{x_i, z\}$ находим ту, для которой угол между векторами $x_i - z$ и $x_j - z$, отсчитываемый против часовой стрелки, минимален. Добавляем отрезок $[z, x_j]$ в контур $\operatorname{ext}\gamma$. Полагаем $i = j$.

Шаг 3. Если $i = i_0$, выход. Иначе переходим к шагу 2.

Направлением ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^2$ называется единичный вектор $\frac{x}{\|x\|}$. *Правым перпендикуляром* для ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^2$ называется единичный вектор $x^{\perp}$, полученный путем поворота по часовой стрелке направления вектора x на угол $\frac{\pi}{2}$. Для любых двух ненулевых векторов $a \in \mathbb{R}^2$ и $b \in \mathbb{R}^2$ через $\operatorname{angle}(a, b)$ обозначим множество всех ненулевых векторов, направления которых получаются путем вращения единичного вектора против часовой стрелки от направления a до направления b. Через $\langle a, b\rangle$ будем обозначать *скалярное произведение* векторов $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$: $\langle a, b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2$. ***Нормальным конусом*** выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^2$ в точке $x_0 \in \partial X$ называется множество

$$N(x_0, X) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \langle p, x\rangle \leqslant \langle p, x_0\rangle \quad \forall\, x \in X\}.$$

В силу леммы 5.5 для вычисления одношаговых операторов достижимости A_i достаточно с заданной точностью вычислять множества $\overline{A_i}S$, определяемые формулами (5.46). Рассмотрим алгоритм приближенного вычисления множеств $\overline{A_i}S$, использующий конволюту.

Понятие конволюты многоугольников введено в [9] и состоит в следующем. Пусть имеются два многоугольника: X с вершинами x_i и Y с вершинами y_j, пронумерованными против часовой стрелки. Конволютой многоугольников X и Y называется упорядоченный набор отрезков вида $[x_i + y_j, x_{i+1} + y_j]$, где $x_{i+1} - x_i \in \operatorname{angle}((y_j - y_{j-1}), (y_{j+1} - y_j))$, а также отрезков вида $[x_i + y_j, x_i + y_{j+1}]$, где вектор $y_{j+1} - y_j \in \operatorname{angle}((x_i - x_{i-1}), (x_{i+1} - x_i))$. В [10], [11] описан алгоритм, позволяющий построить конволюту двух многоугольников и извлечь из нее сумму Минковского этих многоугольников. Заметим, что если функция $a(t, x, u)$ не зависит от x, то согласно формуле (5.46) множество $\overline{A_i}S$ является суммой Минковского (см. (3.16)). Адаптируем алгоритм из [10] к задаче приближенного вычисления множеств $\overline{A_i}S$ в предположении связности рассматриваемых множеств и их дополнений.

Зафиксируем произвольный индекс $i \in \overline{0, I-1}$. Для любого $x \in \mathbb{R}^2$ обозначим $G(x) = -\tau a(\tau_i, x, P)$. Пусть многоугольник S с длинами сторон $\leqslant h$ задан набором вершин $x_1, \ldots, x_s$, пронумерованных против часовой стрелки. Границей многоугольника S является простая замкнутая ломаная $\partial S = \Gamma(x_1, \ldots, x_s, x_{s+1})$, где $x_{s+1} = x_1$, $\max\limits_{j\in\overline{1,s}} \|x_{j+1} - x_j\| \leqslant h$. Для любого $j \in \overline{1, s}$ обозначим $n_j = (x_{j+1} - x_j)^{\perp}$ — правый перпендикуляр к j-му звену ломаной ∂S, положим $n_0 = n_s$. Для каждого $j \in \overline{1, s}$ рассмотрим $g_1^j, \ldots, g_{m_j}^j$ — пронумерованные против часовой стрелки все вершины многоугольника $G(x_j)$ такие, что

$$N(g_m^j, G(x_j)) \cap \operatorname{angle}(n_{j-1}, n_j) \neq \varnothing, \quad m \in \overline{1, m_j}.$$

Конволютой для задачи (5.46) будем называть замкнутую ломаную

$$\mathcal{C}(S, G) = \Gamma(x_1 + g_1^1, \ldots, x_1 + g_{m_1}^1, x_2 + g_1^2, \ldots, x_2 + g_{m_2}^2, \ldots, x_s + g_1^s, \ldots, x_s + g_{m_s}^s, x_1 + g_1^1).$$

Определим многоугольник $\tilde{A}_iS$ как домен конволюты $\mathcal{C}(S, G)$:

$$\tilde{A}_iS = \operatorname{domain}(\mathcal{C}(S, G)).$$

Используя описанный выше алгоритм вычисления внешнего контура, найдем границу многоугольника $\tilde{A}_iS$: $\partial(\tilde{A}_iS) = \operatorname{ext}(\mathcal{C}(S, G))$. Тем самым мы определим вершины многоугольника $\tilde{A}_iS$.

Лемма 5.6. Пусть выполнено неравенство $\tau L_a^x < 1$. Тогда для любого $i \in \overline{0, I-1}$ справедливы включения

$$\partial(\tilde{A}_iS) \subset \overline{A_i}S + \mathfrak{B}_{2h}, \quad \partial(\overline{A_i}S) \subset \tilde{A}_iS + \mathfrak{B}_{2h}. \ \square$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $i \in \overline{0, I-1}$ и $y \in \partial(\tilde{A}_iS)$. Пусть отрезок $[y_0, y_1]$ является звеном конволюты, содержащим точку y. Поскольку y_0 и y_1 — соседние вершины конволюты, то согласно ее определению существуют x_0 и x_1 — совпадающие или соседние вершины многоугольника S такие, что $y_j \in x_j + G(x_j)$, $j = \overline{0, 1}$. Так как $G(x) = -\tau a(\tau_i, x, P)$, то существуют векторы $u_0, u_1 \in P$ такие, что $y_j = x_j - \tau a(\tau_i, x_j, u_j)$, $j = \overline{0, 1}$. Поскольку $\|x_0 - x_1\| \leqslant h$, то согласно соотношению (1.4) вектор $y_2 = x_0 - \tau a(\tau_i, x_0, u_1)$ удовлетворяет неравенствам $\|y_1 - y_2\| \leqslant h(1 + \tau L_a^x) < 2h$. Так как векторы y_0 и y_2 содержатся в выпуклом множестве $x_0 + G(x_0)$, то в этом множестве содержится весь отрезок $[y_0, y_2]$. Отсюда из включения $y \in [y_0, y_1]$ и неравенства $\|y_1 - y_2\| < 2h$ следует, что $y \in x_0 + G(x_0) + \mathfrak{B}_{2h} \subset \overline{A_i}S + \mathfrak{B}_{2h}$. Таким образом, получено первое из доказываемых включений. Доказательство второго включения опускаем в силу его громоздкости. ■

Лемма 5.7. Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы ограниченные множества S_1 и S_2, $\partial S_1 \subset S_2 + \mathfrak{B}_\delta$, пусть число $\delta > 0$ таково, что множество $\mathbb{R}^n \setminus (S_2 + \mathfrak{B}_\delta)$ связно. Тогда $S_1 \subset S_2 + \mathfrak{B}_\delta$. □

Доказательство. Так как множества S_1 и S_2 ограничены, то существует точка $z \in \mathbb{R}^n$: $z \notin (S_1 \cup S_2) + \mathfrak{B}_\delta$. Предположим, что доказываемое включение не выполнено. Тогда существует точка $x \in S_1 \setminus (S_2 + \mathfrak{B}_\delta)$. Поскольку множество $\mathbb{R}^n \setminus (S_2 + \mathfrak{B}_\delta)$ связно и содержит точки $x \in S_1$ и $z \notin S_1$, то существует точка $y \in (\partial S_1) \setminus (S_2 + \mathfrak{B}_\delta)$, что противоречит условию $\partial S_1 \subset S_2 + \mathfrak{B}_\delta$. ■

Замечание. Условие связности множества $\mathbb{R}^n \setminus (S_2 + \mathfrak{B}_\delta)$ в лемме 5.7 существенно. Действительно, рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ множества

$$S_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$
$$S_2 = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) : \varphi \in [0; 2\pi - \delta]\}.$$

Тогда при $\delta \in (0; 1)$ все условия леммы 5.7 кроме связности множества $\mathbb{R}^n \setminus (S_2 + \mathfrak{B}_\delta)$ выполнены, но включение $S_1 \subset S_2 + \mathfrak{B}_\delta$ не справедливо.

Лемма 5.8. Пусть S — многоугольник с длинами сторон, не превосходящими числа h, $i \in \overline{0, I-1}$, множества $\mathbb{R}^2 \setminus (\overline{A_i}S + \mathfrak{B}_{2h})$ и $\mathbb{R}^2 \setminus (\tilde{A}_i(S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{4h}) + \mathfrak{B}_{2h})$ связны и пусть выполнено неравенство $\tau L_a^x < 1$. Тогда справедливы включения (3.18) при $\varepsilon_A = 4h + L_a^x C_a \tau^2$. □

Доказательство. В силу лемм 5.6, 5.7 справедливы включения

$$\tilde{A}_i S \subset \overline{A_i} S + \mathfrak{B}_{2h}, \qquad (5.49)$$

$$\overline{A_i}(S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{4h}) \subset \tilde{A}_i(S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{4h}) + \mathfrak{B}_{2h}. \qquad (5.50)$$

Используя включения (4.34), (5.49) и лемму 5.5, получаем

$$\tilde{A}_i S \subset A_i(S + \mathfrak{B}_{L_a^x C_a \tau^2}) + \mathfrak{B}_{2h} \subset$$
$$\subset A_i(S + \mathfrak{B}_{L_a^x C_a \tau^2 + 2h(1+\tau L_a^x)}) \subset A_i(S + \mathfrak{B}_{\varepsilon_A}). \quad (5.51)$$

Аналогично включению (4.34) для любого множества $S \subset \mathbb{R}^2$ и любого числа $\delta > 0$ имеем

$$\tilde{A}_i S + \mathfrak{B}_\delta \subset \tilde{A}_i(S + \mathfrak{B}_{(1+\tau L_a^x)\delta}).$$

Следовательно,

$$\tilde{A}_i(S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{4h}) + \mathfrak{B}_{2h} \subset$$
$$\subset \tilde{A}_i(S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{4h} + \mathfrak{B}_{2h(1+\tau L_a^x)}) \subset \tilde{A}_i S.$$

Отсюда, используя включение (5.50) и лемму 5.5, приходим к соотношениям

$$A_i(S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{\varepsilon_A}) = A_i(S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{4h + L_a^x C_a \tau^2}) \subset$$
$$\subset \overline{A_i}(S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{4h + L_a^x C_a \tau^2} + \mathfrak{B}_{L_a^x C_a \tau^2}) \subset$$
$$\subset \overline{A_i}(S \stackrel{*}{-} \mathfrak{B}_{4h}) \subset \tilde{A}_i S. \quad (5.52)$$

Включения (5.51), (5.52) дают (3.18). ■

Алгоритм, аналогичный описанному выше, позволяет вычислить множества $\tilde{B}_i S$, приближающие множества $B_i S$. Повторяя с некоторыми изменениями рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 5.8, получаем, что в предположении связности соответствующих множеств справедливы включения (3.19) при $\varepsilon_B = 4h + L_b^x C_b \tau^2$. Подставляя эти выражения для ε_A, ε_B в формулу (3.33), находим теоретическую оценку общей погрешности алгоритма. Полученная оценка показывает, что параметр дискретизации по пространству h должен быть выбран существенно меньше параметра дискретизации по времени τ.

Литература

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967.

2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. – М.: Наука, 1985.

3. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сборник. – 1980. – Т. 112, N 3. – С. 307–330.

4. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / под ред. А.И. Субботин, В.С. Пацко. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984.

5. *Patsko V.S., Botkin N.D., Kein V.M., Turova V.L., Zarkh M.A.* Control of an aircraft landing in windshear // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1994. – V. 83, N 2. – P. 237–267.

6. *Patsko V.S., Turova V.L.* Numerical solution of two-dimensional differential games. – Preprint. Ekaterinburg. – IMM UrO RAN, 1995. – 78 p.

7. *Иванов Г.Е., Казеев В.А.* Минимаксный алгоритм построения оптимальной стратегии управления в дифференциальной игре с липшицевой платой // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 4. – С. 594–619.

8. *Иванов Г.Е.* Алгоритм решения нелинейной игровой задачи быстродействия // Фундаментальные и прикладные задачи современной математики: сб. науч. трудов. – М.: МФТИ, 2011. – С. 49–76.

9. *L.J. Guibas, L. Ramshaw, J. Stolfi.* A kinetic framework for computational geometry // Proc. of the 24th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'83). Tucson, Arizona. – 1983. – P. 100–111.

10. *R. Wein.* Exact and efficient construction of planar Minkowski sums using the convolution method // Proc. 14th European Symposium on Algorithms (ESA), LNCS. – 2006. – V. 4186. – P. 829–840.

11. *E. Flato.* Robust and efficient construction of planar Minkowski sums // Master's thesis. School of Computer Science. – Tel-Aviv University, 2000.

12. *Пономарев А.П.* Оценка погрешности численного метода построения альтернированного интеграла Понтрягина // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем., кибернетика. – 1978. – № 4. – С. 37–43.

13. *Botkin N.D.* Evaluation of numerical construction error in differential game with fixed terminal time // Problems of Control and Information Theory. – 1982. – V. 11, N 4. – P. 283–295.

14. *Половинкин Е.С., Иванов Г.Е., Балашов М.В., Константинов Р.В., Хорев А.В.* Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр // Матем. сборник. – 2001. – Т. 192, № 10. – С. 95–122.

Поступила в редакцию 21.01.2011