УДК 517.518.23

А. Ю. Головко

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Мультипликативные неравенства типа Гальярдо–Ниренберга для областей с нерегулярной границей

Установлены мультипликативные неравенства типа Гальярдо–Ниренберга нерегулярных для областей с нерегулярной границей $G \in R^n$ с условием гибкого σ-конуса.

Ключевые слова: мультипликативное неравенство, обобщенные производные, область с нерегулярной границей.

1. Введение

Гальярдо и Ниренбергом в [1] и [2] в 1959 году для областей $G \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей было установлено неравенство

$$\sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_q(G)} \leqslant C \left(\|f\|^{1-\theta}_{L_r(G)} \left(\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_p(G)} \right)^\theta + \|f\|_{L_{\tilde{p}}(G)} \right), \tag{1}$$

где $1 \leqslant p, \tilde{p}, q, r < \infty$, $s \in N$, $l \in Z_+$, $l < s$, $\frac{l}{s} \leqslant \theta \leqslant 1$, при выполнении соотношения

$$l - \frac{n}{q} = \theta \left(s - \frac{n}{p} \right) + (1-\theta) \left(-\frac{n}{r} \right). \tag{2}$$

При этом последнее слагаемое в правой части (1) в случае неограниченной области с гладкой границей можно убрать и будет справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_q(G)} \leqslant C \|f\|^{1-\theta}_{L_r(G)} \left(\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_p(G)} \right)^\theta. \tag{3}$$

Ильин В. П. в работе [3] установил мультипликативное неравество типа Гальярдо–Ниренберга для областей с условием конуса в случае $1 \leqslant p, r \leqslant q < \infty$, $l = 0$. Мазья В. Г. в [4] доказал мультипликативные неравенства (3) при $l = 0$ для областей более общего вида, принадлежащих классам, определенным им в терминах емкостных неравенств.

В данной работе установливаются аналоги неравенства Гальярдо–Ниренберга для нерегулярных областей с условием гибкого σ-конуса, $\sigma > 1$.

2. Основные результаты

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G)$, где $G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $n \geqslant 2$, $\rho_1(x) = \min\{\rho(x), 1\}$,
$B(x, R) = \{y : |y - x| < R\}$, χ — характеристическая функция шара $B(0, 1)$.

Определение 1 (см. [5]). При $\sigma \geqslant 1$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ назовем *областью с условием гибкого σ-конуса*, если при некоторых $T^* > 0, \varkappa > 0$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь $\gamma : [0, T^*] \to G, \gamma(0) = x, |\gamma'| \leqslant 1$ почти всюду, и такой, что $\rho(\gamma(t)) \geqslant \varkappa t^\sigma$ при $0 < t \leqslant T^*$.

При этом при $\sigma = 1$ область называют *областью с условием гибкого конуса.*

Область G, не удовлетворяющую условию гибкого конуса, называют *нерегулярной.*

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство; $1 \leqslant m \leqslant n$, $i_0 = 0$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m = n$ — натуральные числа, $n_j = i_j - i_{j-1}$, $\chi_j : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0{,}1\}$,

$$\chi_j(i) = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad & i_{j-1} + 1 \leqslant i \leqslant i_j, \\ 0 \quad \text{при} \quad & 1 \leqslant i \leqslant i_{j-1} \quad \text{и при} \quad i_j + 1 \leqslant i \leqslant i_m = n. \end{cases}$$

При $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $\alpha^j := \chi_j \alpha = (0, \ldots, \alpha_{i_{j-1}+1}, \ldots, \alpha_{i_j}, 0, \ldots, 0)$, так что $\alpha = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha^j$. При $x \in \mathbb{R}^n$ положим $x = (x^1, \ldots, x^m)$, где $x^j = (x_{i_{j-1}+1}, \ldots x_{i_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$.

Теорема 1. *Пусть G — область с условием гибкого σ-конуса, $1 \leqslant p, q, r < \infty$, $s, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $l < s$, $0 < \theta < 1$, $p < q$, $r \leqslant q$, $p > 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Пусть $r < q$, если $l = 0$, $\sigma = 1$. Тогда мультипликативное неравенство типа Гальярдо–Ниренберга:*

$$\sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_q(G)} \leqslant C \left(\|f\|_{L_r(G)}^{1-\theta} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha=\alpha^j, |\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_p(G)} \right)^\theta + \|f\|_{L_r(G)} \right) \tag{4}$$

справедливо для функций f с конечной правой частью при выполнении соотношения

$$l - \frac{n}{q} = \theta \left(s - (s-1)(m-1)(\sigma-1) - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} \right) + (1-\theta) \left(-\frac{n\sigma}{r} - (\sigma-1)m(s-1) \right). \tag{5}$$

То есть для ограниченной области с условием гибкого конуса (в частности для области с гладкой границей) при выполнении соотношения (2) справедливо неравенство (4) при любом $m \in \{1, \ldots, n\}$. При $m = n$ в правой части (4) участвуют только несмешанные обобщенные частные производные порядка s, а при $m = 1$ неравенство (4) совпадает с неравенством Гальярдо–Ниренберга (с $\tilde{p} = r$).

При $q > r$, а также при $q = r$ в случае $\sigma > 1$ или $l \in \mathbb{N}$ из соотношения (5) следует неравенство

$$s - l - (s-1)(m-1)(\sigma-1) - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{n}{q} > 0. \tag{6}$$

Ниже будет приведен пример области с условием гибкого $\sigma-$конуса, для которой при $1 \leqslant p, q, r < \infty$, $s, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $l < s$, $0 < \theta < 1$, $\sigma \geqslant 1$, $\frac{n}{q} < \frac{n}{r} + l$, $1 \leqslant m \leqslant n$ и

$$l - \frac{n}{q} > \theta \left(s - (s-1)(m-1)(\sigma-1) - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} \right) + (1-\theta) \left(-\frac{n}{r} \right) \tag{7}$$

мультипликативное неравенство (4) не имеет места.

Следствие 1. *При $\sigma > 1$ мультипликативное неравенство (4) при выполнении соотношений (2) и $\frac{n}{q} < \frac{n}{r} + l$ несправедливо ни при каких $1 \leqslant p, q, r < \infty$, $s, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $l < s$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$.*

Следствие 2. *Пусть $1 \leqslant m_1 < m_2 \leqslant n$, $\sigma > 1$. Тогда соотношение (5) для $m = m_1$ не является достаточным для выполнения мультипликативного неравенства (4) при $m = m_2$ при определенных $1 \leqslant p, q, r < \infty$, $s, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $l < s$, $0 < \theta < 1$, $\sigma \geqslant 1$, $\frac{n}{q} < \frac{n}{r} + l$.*

Возникает вопрос о справедливости мультипликативного неравенства

$$\sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_q(G)} \leqslant C \left(\|f\|_{L_r(G)} \right)^{1-\theta} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha=\alpha^j, |\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_p(G)} \right)^\theta \tag{8}$$

в случае нерегулярных неограниченных областей.

В случае $\sigma > 1$ вопрос решается отрицательно. Пусть существуют шары $B(x_R, R)$ произвольного радиуса $R > 0$, лежащие в области. Пусть $\xi \in C_0^\infty(B(0,1))$, $\xi \neq 0$. Рассмотрим функцию $\xi_R = \xi\left(\frac{x-x_R}{R}\right)$. Устремляя $R \to 0$ и $R \to \infty$, получаем, что неравенство (8) может быть справедливым только при выполнении соотношения (2). Следовательно, в силу следствия 1 для некоторых неограниченных областей с условием гибкого σ-конуса неравенство (8) не выполняется ни при каких $1 \leqslant p, q, r < \infty$, $s, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $l < s$, $0 < \theta < 1$, $\sigma \geqslant 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Определение 2. Область $G \subset R^n$ назовем *областью с условием бесконечного гибкого конуса,* если при некотором $\varkappa > 0$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь $\gamma : [0,\infty) \to G, \gamma(0) = x, |\gamma'| \leqslant 1$ почти всюду такой, что $\rho(\gamma(t)) \geqslant \varkappa t$ для любого $t > 0$.

Теорема 2. *Пусть G — область с условием бесконечного гибкого конуса, $1 \leqslant p, q, r < \infty$, $s, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $l < s$, $0 < \theta < 1$, $p < q$, $r \leqslant q$, $p > 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Пусть $r < q$ в случае $l = 0$. Тогда для функций f с конечной правой частью при выполнении соотношения* (2) *справедливо мультипликативное неравенство* (8).

Доказательства теорем будут приведены в разделах 7, 8.

3. Исправление путей

Лемма 1. *Пусть G — область с условием гибкого σ-конуса. Тогда при некоторых $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\varepsilon_0 \in (0,1), \tilde{\varkappa} > 0$, $C > 0$, $C_0 > 0$ для каждой точки $x \in G$ существует кусочно гладкий путь $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_x : [0, t_x] \to G$ и непрерывная кусочно гладкая функция $\tilde{r}_{\tilde{\gamma}} : [0, t_x] \to [0, \infty)$ такие, что*

$$\tilde{\gamma}(0) = x, \quad |\tilde{\gamma}'| \leqslant 1 \text{ п. в.}, \tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(t) \geqslant \tilde{\varkappa} t^\sigma, 0 < \tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(t) \leqslant \delta\rho_1(\tilde{\gamma}(t)),$$
$$\tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(t_x) \geqslant \delta^2, |\tilde{r}'_{\tilde{\gamma}}(t)| \leqslant C_0 \text{ п. в.},$$
$$\delta\tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(t') \leqslant \tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(t'') \qquad \text{при} \qquad B(\tilde{\gamma}(t'), \delta\tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(t')) \cap B(\tilde{\gamma}(t''), \delta\tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(t'')) \neq \emptyset, t', t'' \in [0, t_x], \tag{9}$$

$$\sup_{\tilde{\gamma}} \sup_{y \in G} \int_0^{t_x} \frac{1}{\tilde{r}_{\tilde{\gamma}(t)}} \chi\left(\frac{y - \tilde{\gamma}(t)}{\varepsilon_0 \tilde{r}_{\tilde{\gamma}(t)}}\right) dt \leqslant C.$$

Доказательство см., например, в [5] и [6].

Лемма 2. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\hat{\gamma}(t) = x_0 + t\vec{e}$ при $t \in [0, t^*]$, где $|\vec{e}| = 1$. Пусть $\hat{r}_{\hat{\gamma}}(t) = ct + c_0$, где $c, c_0 \geqslant 0$. Пусть $\frac{c}{\varepsilon_0} > 1$. Тогда*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_0^{t^*} \frac{1}{r_{\hat{\gamma}}(t)} \chi\left(\frac{y - \hat{\gamma}(t)}{\varepsilon_0 \hat{r}_{\hat{\gamma}}(t)}\right) dt \leqslant C = C(c, \varepsilon_0),$$

где C зависит лишь от c, ε_0.

Доказательство очевидно.

Лемма 3. *Пусть G — область с условием гибкого σ-конуса. Тогда при некоторых $\varepsilon_0 \in (0,1)$, $\varkappa_0 > 0$, $T_0 > 0$, $c > 0$, $C > 0$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь $\Gamma = \Gamma(t,x) : [0, T_0] \to G, \Gamma(0) = x, |\Gamma'| \leqslant 1$ почти всюду и непрерывная кусочно гладкая функция $r = r_\Gamma : [0, T_0] \to [0, \infty) : r(t) > 0$ при $t > 0, r(0) = 0, |r'(t)| \leqslant c$ для п. в. t, $r(t) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{dist}(\Gamma(t,x), \partial G)$, $ct \geqslant r(t) \geqslant \varkappa_0 t^\sigma$ при $0 < t \leqslant T_0$ и*

$$\sup_{\Gamma} \sup_{y \in G} \int_0^{T_0} \frac{1}{r_\Gamma(t)} \chi\left(\frac{y - \Gamma(t,x)}{\varepsilon_0 r_\Gamma(t)}\right) dt \leqslant C. \tag{10}$$

Доказательство.

Для произвольной точки $x \in G$ рассмотрим путь $\tilde{\gamma}$ и функцию $\tilde{r}_{\tilde{\gamma}}$ из леммы 1. Тогда путь

$$\Gamma(t,x) = \begin{cases} x + (t, 0, \ldots, 0) & \text{при} \quad t \in [0, \frac{\tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(0)}{2}], \\ x + (\tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(0) - t, 0, \ldots, 0) & \text{при} \quad t \in [\frac{\tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(0)}{2}, \tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(0)], \\ \tilde{\gamma}(t - \tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(0)) & \text{при} \quad t \in [\tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(0), t_x + \tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(0)] \end{cases}$$

и кусочно гладкая функция

$$r(t)=\begin{cases}t & \text{при} \quad t\in[0,\tilde r_{\tilde\gamma}(0)],\\ \tilde r_{\tilde\gamma}(t-\tilde r_{\tilde\gamma}(0)) & \text{при} \quad t\in[\tilde r_{\tilde\gamma}(0),t_x+\tilde r_{\tilde\gamma}(0)]\end{cases}$$

удовлетворяют утверждению леммы.

В самом деле, условие $|r'(t)|\leqslant c$, очевидно, выполнено, откуда в силу оценки $\tilde r_{\tilde\gamma}(t_x)\geqslant\delta^2$ следует, что существует число T_0 такое, что $t_x+\tilde r_{\tilde\gamma}(0)\geqslant T_0$ для любого $x\in G$.

Соотношение $r(t)\leqslant\frac12\mathrm{dist}(\Gamma(t,x),\partial G)$ следует из леммы 1.

$\tilde r_{\tilde\gamma}(0)\leqslant 1$, откуда $r(t)\geqslant t^\sigma$ при $t\in(0,\tilde r_{\tilde\gamma}(0)]$. Из соотношения (9) следует, что $\tilde r_{\tilde\gamma}(t)\geqslant\delta\tilde r_{\tilde\gamma}(0)$ при $t\in[0,\delta\tilde r_{\tilde\gamma}(0)]$. Отсюда $r(t)\geqslant\delta\tilde r_{\tilde\gamma}(0)\geqslant\delta\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\sigma t^\sigma$ при $t\in[\tilde r_{\tilde\gamma}(0),(1+\delta)\tilde r_{\tilde\gamma}(0)]$.

$r(t)\geqslant\tilde\varkappa(t-\tilde r_{\tilde\gamma}(0))^\sigma\geqslant\tilde\varkappa\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^\sigma t^\sigma$ при $t\geqslant(1+\delta)\tilde r_{\tilde\gamma}(0)$. Таким образом, существует $\varkappa_0>0$ такое, что $r(t)\geqslant\varkappa_0t^\sigma$ при $t\in(0,T_0]$.

Лемма 4. *Пусть G — область с условием бесконечного гибкого конуса. Тогда при некоторых $\varepsilon_0\in(0,1),\varkappa_0>0,c>0,C>0$ для любого $x\in G$ существует кусочно гладкий путь $\Gamma=\Gamma(t,x):[0,\infty)\to G,\Gamma(0,x)=x,|\Gamma'|\leqslant1$ почти всюду и непрерывная кусочно гладкая функция $r=r_\Gamma:[0,\infty)\to[0,\infty):r(t)>0$ при $t>0,r(0)=0,|r'(t)|\leqslant c$ для п. в. t, $r(t)\leqslant\frac12\mathrm{dist}(\Gamma(t,x),\partial G)$, $ct\geqslant r(t)\geqslant\varkappa_0t$ при $0<t<\infty$,*

$$\sup_\Gamma\sup_{y\in G}\int_0^\infty\frac{1}{r_\Gamma(t)}\chi\left(\frac{y-\Gamma(t,x)}{\varepsilon_0r_\Gamma(t)}\right)dt\leqslant C.$$

Доказательство отличается от доказательства леммы 3 лишь построением бесконечного пути $\tilde\gamma:[0,\infty)\to G$. Положим $r_\gamma=\hat\rho(\gamma(t))$, где γ — бесконечный путь из определения 2, $\hat\rho(x)$ — регуляризованное расстояние от x до $\mathbb{R}^n\setminus G$ (см., например, [7]), то есть $\hat\rho$ — бесконечно дифференцируемая функция на G и при некотором $N\geqslant1$:

$$\frac1N\rho(x)\leqslant\hat\rho(x)\leqslant\rho(x),\qquad|\mathrm{grad}\hat\rho|\leqslant N\qquad(x\in G).$$

Тогда при некотором $\delta\in(0,1)$

$$\delta r_\gamma(t')\leqslant r_\gamma(t'')\qquad\text{при}\qquad B(\gamma(t'),\delta r_\gamma(t'))\cap B(\gamma(t''),\delta r_\gamma(t''))\neq\emptyset,t',t''\in[0,\infty].\tag{11}$$

Зафиксируем $\varepsilon\in(0,\frac\delta2)$.

Путь $\tilde\gamma$ — вписаннная в γ бесконечная ломаная с вершинами $\gamma(t_i),0=t_0<t_1<\ldots<t_i<\ldots$, где при $i\in\mathbb{N}$

$$t_i=\sup\{t\in(t_{i-1},\infty):B(\gamma(t),\varepsilon r_\gamma(t)\cap B(\gamma(t_{i-1}),\varepsilon r_\gamma(t_{i-1})\neq\emptyset\}$$

($t_i<\infty$ в силу соотношения (11)).

Через $\tilde\gamma:[0,\infty)\to G$ обозначим путь, состоящий из отрезков, последовательно соединяющих точки $\gamma(t_i)$, и параметризованный с помощью длины дуги, отсчитываемой от $x=\gamma(0)=\hat\gamma(0)$. Пусть при этом $\{\tau_i\}_0^\infty$ — значения параметров последовательных вершин $\tilde\gamma$, так что $\tilde\gamma(\tau_i)=\gamma(t_i)$ при $i\in Z_+$.

Через $\tilde r_{\tilde\gamma}:[0,\infty)\to(0,\infty)$ обозначим непрерывную функцию, принимающую значания $\tilde r_{\tilde\gamma}(\tau_i)=\varepsilon r_\gamma(t_i)(i\in Z_+)$ и линейную на каждом отрезке $[\tau_{i-1},\tau_i]$.

Свойства путей $\tilde\gamma$ и функций $\tilde r_{\tilde\gamma}$ (аналогичные свойствам путей $\tilde\gamma$ и функций $\tilde r_{\tilde\gamma}$ из леммы 1) устанавливаются так же, как и в работе [5].

4. Интегральное представление

Воспользуемся усреднением из [8] для $0 < t \leqslant T_0$ (в случае области с условие бесконечного конуса $0 < t < \infty$):

$$\left(D^\beta f\right)_t(x) = \int \prod_{j=1}^{m} K_{n_j}\left(y^j, \frac{r(t)}{\sqrt{m}}, \Gamma^j(t,x) - x^j\right) D^\beta f(x+y)dy =$$

$$= (-1)^{|\beta|} \int \prod_{j=1}^{m} K_{n_j}^{(\beta^j)}\left(y^j, \frac{r(t)}{\sqrt{m}}, \Gamma^j(t,x) - x^j\right) f(x+y)dy, \tag{12}$$

где $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| < s$, $r(t) = r_\Gamma(t)$, а множители ядра усреднения удовлетворяют соотношениям (см. [8])

$$K_{n_j}\left(\cdot, \frac{r(t)}{\sqrt{m}}, \Gamma^j(t,x) - x^j\right) \in C_0^\infty\left(B\left(\Gamma^j(t,x) - x^j, \frac{r(t)}{\sqrt{m}}\right)\right),$$

$$K_{n_j}^{(\beta^j)}\left(y^j, \frac{r(t)}{\sqrt{m}}, \Gamma^j(t,x) - x^j\right) = D_y^{\beta^j} K_{n_j}\left(y^j, \frac{r(t)}{\sqrt{m}}, \Gamma^j(t,x) - x^j\right),$$

при $\alpha_j = 0$ или $\alpha^j = \beta^j$

$$\left|K_{n_j}^{(\alpha^j)}\left(y^j, \frac{r(t)}{\sqrt{m}}, \Gamma^j(t,x) - x^j\right)\right| \leqslant C\chi\left(\frac{y^j - \Gamma^j(t,x) + x^j}{\frac{r(t)}{\sqrt{m}}}\right) r(t)^{-s+1-n_j} t^{s-|\alpha^j|-1}, \tag{13}$$

$$\int K_{n_j}\left(y^j, \frac{r(t)}{\sqrt{m}}, \Gamma^j(t,x) - x^j\right) dy = 1.$$

Определение 3 (см. [7]). Семейство измеримых подмножеств F в $\mathbb{R}^n$ называется *регулярным*, если существует константа $c > 0$ такая, что для любого $S \in F$ существует открытый шар $B \supset S$ с центром в начале координат такой, что $\operatorname{mes}(S) \geqslant c \operatorname{mes}(B)$.

Лемма 5 (см. [7]). *Если семейство F является регулярным, то для любой локально суммируемой функций f почти всюду*

$$\lim_{\substack{S \in F, \\ \operatorname{mes}(S) \to 0}} \frac{1}{\operatorname{mes}(S)} \int_S |f(x-y) - f(x)|dy = 0.$$

Заметим, что семество $\left\{\bigotimes_{j=1}^{m} B\left(\Gamma^j - x^j, \frac{r(t)}{\sqrt{m}}\right), \qquad t \in [0, \tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(0)]\right\}$ является регулярным.

Из соотношения (13) при некоторой $\hat{C} > 0$

$$\left|\prod_{j=1}^{m} K_{n_j}\left(y^j, \frac{r(t)}{\sqrt{m}}, \Gamma^j(t,x) - x^j\right)\right| \leqslant \frac{\hat{C}}{\operatorname{mes}\left(\operatorname{supp} \prod_{j=1}^{m} K_{n_j}\left(y^j, \frac{r(t)}{\sqrt{m}}, \Gamma^j(t,x) - x^j\right)\right)}$$

при $t \in [0, \tilde{r}_{\tilde{\gamma}}(0)]$. Функция $D^\beta f$ локально суммируема в силу теоремы вложения (см., например, [8]). Тогда из леммы 5 следует, что $\lim\limits_{t \to +0} \left(D^\beta f\right)_t = D^\beta f(t)$ почти всюду.

Таким образом, из формулы Ньютона—Лейбница почти всюду справедливо неравенство

$$\left|D^\beta f(x)\right| \leqslant \int_0^T \left|\frac{\partial}{\partial t}\left(D^\beta f\right)_t(x)\right| dt + \left|\left(D^\beta f\right)_T(x)\right| \tag{14}$$

при $0 < T \leqslant T_0$.

В [8] показано, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(D^{\beta}f\right)_t(x)\right| \leqslant Ct^{(s-1)m-|\beta|}r(t)^{-n-(s-1)(m-1)}\times$$

$$\times\int\prod_{j=1}^{m}\chi\left(\frac{y^j-\Gamma^j(t,x)}{\frac{r(t)}{\sqrt{m}}}\right)\sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=\alpha^i,|\alpha|=s}|D^{\alpha}f(y)|\,dy. \tag{15}$$

Из соотношений (13) — (15) следует, что

$$\left|D^{\beta}f(x)\right| \leqslant C\left(A_0f(x)+A_1g(x)\right), \tag{16}$$

где $g(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{\alpha=\alpha^j,|\alpha|=s}|D^{\alpha}f(x)|$,

$$A_0f(x)=r(T)^{(-s+1)m-n}T^{(s-1)m-|\beta|-1}\int_{|y-\Gamma(T,x)|<r(T)}|f(x+y)|\,dy, \tag{17}$$

$$A_1g(x)=\int_0^T t^{(s-1)m-|\beta|}r(t)^{-n-(s-1)(m-1)}\int_{|y-\Gamma(t,x)|<r(t)}g(y)dydt. \tag{18}$$

5. Оценка нормы оператора A_0

Мы будем пользоваться неравенством Йенсена:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}b_i,\ \text{где } r\geqslant 1,\ b_i\geqslant 0.$$

Введем кубическую сетку $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ с шагом T ($Q_i=a^i+[0,T]^n$, где $a^i=Tz^i$, где в свою очередь z^i — последовательность всех n-мерных целочисленных векторов). Пусть $G_i=G\cap Q_i$. Тогда $\operatorname{mes}(G_i)\leqslant\operatorname{mes}(Q_i)=T^n$.

Замечание. Объединение шаров $\bigcup\limits_{x\in G_j}B(\Gamma(T,x),r(T))$ (при фиксированном j) может пересекаться не более чем с конечным числом G_i, не зависящим от j.

Тогда из (17) с помощью неравенств Гельдера и Йенсена и замечания получим, что

$$\|A_0f\|_{L_q(G)}\leqslant C_1r(T)^{(-s+1)m-n}T^{(s-1)m-|\beta|-1}r(T)^{\frac{n}{r'}}\left(\int_G\|f\|^q_{L_r(B(\Gamma(T,x),r(T)))}dx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant\widetilde{C}r(T)^{(-s+1)m-n\left(1-\frac{1}{r'}\right)}T^{(s-1)m-|\beta|}\left(\sum_{G_i}\int_{G_i}\|f\|^q_{L_r(G_i)}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant\widetilde{\widetilde{C}}T^{\sigma(-(s-1)m-\frac{n}{r})+(s-1)m-|\beta|}T^{\frac{n}{q}}\|f\|_{L_r(G)}=\widetilde{\widetilde{C}}T^{-(\sigma-1)(s-1)m+\frac{n}{q}-\frac{n\sigma}{r}-|\beta|}\|f\|_{L_r(G)}. \tag{19}$$

6. Оценка нормы оператора A_1

Говорят, что оператор A *имеет сильный тип* (p,q), где $1\leqslant p\leqslant q<\infty$, если

$$\|Af\|_{L_q(G)}\leqslant C\|f\|_{L_p(G)}\qquad\forall\ f\in L_p(G),$$

и что A *имеет слабый тип* (p,q), если

$$\sup_{\lambda>0}\lambda\left(\operatorname{mes}\{x\in G:|Af(x)|>\lambda\}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\|f\|_{L_p(G)}\ \forall\ f\in L_p(G),$$

причем в обоих случаях наименьшую возможную постоянную C называют нормой (сильной или слабой соответственно) оператора A.

Теорема Марцинкевича (см., например, [9]). *Пусть* $1 \leqslant p_i \leqslant q_i < \infty$ $(i = 1, 2)$, $q_1 \neq q_2$, $0 < \tau < 1$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\tau}{p_1} + \frac{\tau}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\tau}{q_1} + \frac{\tau}{q_2}$. *Если линейный оператор A имеет одновременно слабый тип (p_1, q_1) и (p_2, q_2) со слабыми нормами K_1 и K_2 соответственно, то оператор A имеет сильный тип (p, q) и*

$$\|Af\|_{L_q(G)} \leqslant MK_1^{1-\tau}K_2^{\tau}\|f\|_{L_p(G)}, \tag{20}$$

где $M = M(\tau, p_1, q_1, p_2, q_2)$ не зависит от функции f и линейного оператора A.

Повторяя выкладки работы [5], используя условие (10) и соотношение $p < q$, получаем, что

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \left(\operatorname{mes}\{x \in G : |A_1 f(x)| > \lambda\}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{x\in G}\sup_{R>0} \left\{\int_0^T \chi\left(\frac{R}{|\Gamma(t,x) - \Gamma(0,x)| + r_\Gamma(t)}\right) t^{((s-1)m-|\beta|)p'} r_\Gamma(t)^{(-(s-1)(m-1)+\frac{1-n}{p})p'} dt\right\}^{\frac{1}{p'}} \times$$

$$\times \operatorname{mes}(B(x,R))^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L_p(G)} \tag{21}$$

и убеждаемся, что в (21) можно выбрать постоянную C, не зависящую от $T \in (0, T_0]$.

Пусть $I(x,R) = \left\{\int_0^T \chi\left(\frac{R}{|\Gamma(t,x)-\Gamma(0,x)|+r_\Gamma(t)}\right) t^{((s-1)m-|\beta|)p'} r_\Gamma(t)^{(-(s-1)(m-1)+\frac{1-n}{p})p'} dt\right\}^{\frac{1}{p'}} \times$ $\times \operatorname{mes}(B(x,R))^{\frac{1}{q}}$ при $x \in G, R > 0$.

При выполнении соотношения $r(t) \leqslant ct$ при $0 < t < T$ $I(x,R) \leqslant$ $\leqslant \left(\int_0^T \chi\left(\frac{R}{(c+1)t}\right) t^{((s-1)m-|\beta|)p'} r_\Gamma(t)^{(-(s-1)(m-1)+\frac{1-n}{p})p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \operatorname{mes}(B(x,R))^{\frac{1}{q}}$, откуда $I(x,R) = 0$ при $R \geqslant (c+1)T$ и $I(x,R) \leqslant \left(\int_{\frac{R}{c+1}}^T t^{(s-|\beta|-(s-1)(m-1)(\sigma-1)-1)p'} r_\Gamma(t)^{\frac{(1-n)p'}{p}} dt\right)^{\frac{1}{p'}} R^{\frac{n}{q}}$ при $R < (c+1)T$.

Таким образом, используя соотношение (6) при $|\beta| = l$

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \left(\operatorname{mes}\{x \in G : |A_1 f(x)| > \lambda\}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \widehat{C} T^{s-|\beta|-(s-1)(m-1)(\sigma-1)-\frac{\sigma(n-1)+1}{p}+\frac{n}{q}} \|f\|_{L_p(G)}, \tag{22}$$

где $\widehat{C}$ не зависит от $f \in L_p(G)$ и $T \in (0, T_0]$.

Соотношение (22) при $|\beta| = l$ выполняется также при замене в нем пары (p, q) на каждую из пар (p_1, q_1), (p_2, q_2), удовлетворяющих соотношению (6), где $1 < p_1 < p < p_2 < q_2 < \infty$, $p_1 < q_1 < q < q_2 < \infty$ (p_1, p_2 близки к p, а q_1, q_2 близки к q) и

$$\frac{1}{2p_1} + \frac{1}{2p_2} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{1}{2q_1} + \frac{1}{2q_2} = \frac{1}{q}.$$

Тогда в силу интерполяционной теоремы Марцинкевича

$$\|A_1 f\|_{L_q(G)} \leqslant M(p_1, p_2, q_1, q_2)\widehat{C} T^{\frac{1}{2}\left(s-|\beta|-(s-1)(m-1)(\sigma-1)-\frac{\sigma(n-1)+1}{p_1}+\frac{n}{q_1}\right)} \times$$

$$\times T^{\frac{1}{2}\left(s-|\beta|-(s-1)(m-1)(\sigma-1)-\frac{\sigma(n-1)+1}{p_2}+\frac{n}{q_2}\right)} \|f\|_{L_p(G)} =$$

$$= \widehat{\widehat{C}} T^{s-|\beta|-(s-1)(m-1)(\sigma-1)-\frac{\sigma(n-1)+1}{p}+\frac{n}{q}} \|f\|_{L_p(G)}, \tag{23}$$

где $\widehat{\widehat{C}}$ не зависит от $T \in (0, T_0]$ и $f \in L_p(G)$.

7. Доказательство мультипликативных неравенств

Введем обозначения

$$E = \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_q(G)}, \qquad A = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha=\alpha_j, |\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_p(G)}, \qquad B = \|f\|_{L_r(G)}.$$

Положим $\varepsilon = T^{\theta\left(s-l-(s-1)(m-1)(\sigma-1)-\frac{\sigma(n-1)+1}{p}+\frac{n}{q}\right)}$. Тогда в силу соотношения (5) будут справедливы соотношения:

$$\varepsilon^{-\frac{1}{1-\theta}} = T^{-(s-1)m(\sigma-1)-\frac{\sigma n}{r}+\frac{n}{q}-l}, \tag{24}$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{\theta}} = T^{s-l-(s-1)(m-1)(\sigma-1)-\frac{\sigma(n-1)+1}{p}+\frac{n}{q}}. \tag{25}$$

Если область удовлетворяет условию гибкого σ-конуса, то из соотношений (6), (16), (19), (23), (24), (25) следует, что

$$E \leqslant C\left(\varepsilon^{\frac{1}{\theta}} A + \varepsilon^{-\frac{1}{1-\theta}} B\right) \tag{26}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = T_0^{\theta\left(s-l-(s-1)(m-1)(\sigma-1)-\frac{\sigma(n-1)+1}{p}+\frac{n}{q}\right)}$, где C не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и f.

Рассмотрим 2 случая:

1) $\varepsilon_0^{\frac{1}{\theta}} A \geqslant \varepsilon_0^{-\frac{1}{1-\theta}} B$. Тогда $\exists \tilde\varepsilon \in (0, \varepsilon_0] : \tilde\varepsilon^{\frac{1}{\theta}} A = \tilde\varepsilon^{-\frac{1}{1-\theta}} B$, откуда следует, что

$$E \leqslant C\left(\tilde\varepsilon^{\frac{1}{\theta}} A + \tilde\varepsilon^{-\frac{1}{1-\theta}} B\right) = 2C\left(\tilde\varepsilon^{\frac{1}{\theta}} A\right)^{\theta}\left(\tilde\varepsilon^{-\frac{1}{1-\theta}} B\right)^{1-\theta} = 2CA^\theta B^{1-\theta}. \tag{27}$$

2) $\varepsilon_0^{\frac{1}{\theta}} A < \varepsilon_0^{-\frac{1}{1-\theta}} B$. Тогда

$$E \leqslant C\left(\varepsilon_0^{\frac{1}{\theta}} A + \varepsilon_0^{-\frac{1}{1-\theta}} B\right) \leqslant 2C\varepsilon_0^{-\frac{1}{1-\theta}} B \tag{28}$$

Из соотношений (27), (28) следует неравенство

$$E \leqslant 2\max\left\{C, C\varepsilon_0^{-\frac{1}{1-\theta}}\right\}\left(A^\theta B^{1-\theta} + B\right),$$

совпадающее с мультипликативным неравенством(4).

Если область удовлетворяет условию бесконечного гибкого конуса, то неравенство (26) справедливо для любого $\varepsilon > 0$, откуда следует(как и при доказательстве неравенства (27)) мультипликативное неравенство (8).

Неравенства (4) и (8) в условиях теорем 1 и 2 доказаны.

8. Случаи несправедливости мультипликативных неравенств

Рассмотрим специальную область $\widetilde{G}$, удоветворяющую условию гибкого σ-конуса, «грибную поляну» $\widetilde{G} = \bigcup_{k=0}^{\infty} G^k$. Здесь

$$G^0 = (-1,1)^{n-1} \times (-1,0),$$

$$G^k = (\tau_k, 0, \ldots, 0) + \left((-r_k, r_k)^{n-1} \times (r_k, 2r_k)\right) \cup \left((-r_k^\sigma, r_k^\sigma)^{n-1} \times (-1, 2r_k)\right),$$

где последовательности $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что $1 > r_k > 0$, $1 > \tau_k > 0$, $r_k \downarrow 0$, $\tau_k \downarrow 0$, выбраны таким образом, что $\overline{G^k} \cap \overline{G^{k+1}} = \emptyset$ при $k \in N$.

При $m = 1$ на области $\widetilde{G}$ рассмотрим следующую последовательность функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad \widetilde{G} \setminus G^k, \\ x_n^{s-1}\eta\left(\frac{x_n}{r_k}\right) & \text{при} \quad x \in G^k, \end{cases}$$

где $\eta \in C^{\infty}$, $\eta(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $\eta(t) = 1$ при $t \geqslant 1$.

Легко убедиться в том, что при $k \to \infty$

$$\|f_k\|_{L_r(G)} \sim r_k^{s-1+\frac{n}{r}},$$

$$\sum_{|\alpha|=l} \|D^{\alpha} f_k\|_{L_q(G)} \sim r_k^{s-1-l+\frac{n}{q}},$$

$$\sum_{|\alpha|=s} \|D^{\alpha} f_k\|_{L_p(G)} \leqslant \check{C} r_k^{-1+\frac{\sigma(n-1)+1}{p}}.$$

При $m \geqslant 2$ на области $\widetilde{G}$ рассмотрим следующую последовательность функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad \widetilde{G} \setminus G^k, \\ (x_1 - \tau_k)^{s-1} \prod_{j=2}^{m-1} x_{i_{j-1}+1}^{s-1} \eta\left(\frac{x_n}{r_k}\right) & \text{при} \quad x \in G^k, \end{cases}$$

где $\eta \in C^{\infty}$, $\eta(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $\eta(t) = 1$ при $t \geqslant 1$.

Легко убедиться в том, что при $k \to \infty$

$$\|f_k\|_{L_r(G)} \sim r_k^{(s-1)(m-1)+\frac{n}{r}},$$

$$\sum_{|\alpha|=l} \|D^{\alpha} f_k\|_{L_q(G)} \sim r_k^{-l+(s-1)(m-1)+\frac{n}{q}},$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha=\alpha^j, |\alpha|=s} \|D^{\alpha} f_k\|_{L_p(G)} \leqslant \check{C} r_k^{-s+\sigma(s-1)(m-1)+\frac{\sigma(n-1)+1}{p}}.$$

Устремляя $k \to \infty$, в силу соотношения $\frac{n}{q} < \frac{n}{p} + l$ при $1 \leqslant m \leqslant n$ получаем, что при выполнении соотношения (7) мультипликативное неравенство (4) несправедливо.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00744).

Литература

1. *Gagliardo E.* Ulterori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili // Ric. mat. — 1959. — V. 8. — P. 24–51.
2. *Nirenberg L.* On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa. Ser. III. — 1959. — V. 13. Fasc II. — P. 115–162.
3. *Ильин В.П.* Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных процессов // Труды МИАН СССР. — 1959. — Т. 53. — С. 64–127.
4. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
5. *Бесов О.В.* Теорема вложения Соболева для областей с нерегулярной границей // Матем. сб. — 2001. — Т. 192, вып. 3. — С. 3–26; англ. пер.: *Besov O.V.* Sobolev's embedding theorem for a domain with irregular boundary // Sb. Math. — 2001. — V. 192, N 3. — P. 323–346.

6. *Kilpeläinen T., Malý J.* Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries // Z. Anal. Anwendungen. — 2000. — V. 19, N 2. — P. 369–380.

7. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973 / пер с англ. *Ellas M. Stein.* Singular integrals and disfferentiability properties of function. — Princeton univ. press, 1970.

8. *Бесов О.В.* Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях // Матем. сб. — 2010. — Т. 201, № 12. — С. 69–82; англ. пер.: *Besov O.V.* Integral estimates for differentiable functions on irregular domains // Sb. Math. — 2010. — V. 201, N 12. — P. 1777–1790.

9. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1996 / англ. пер.: *Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M.* Integral representations of functions and imbedding theorems. — V.H. Winston & Sons, Washington, DC; J. Wiley & Sons, New York, 1978, 1979. — V. 1, 2.

Поступила в редакцию 24.02.2012.