Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2011
Задачи про формулы первого порядка

1. Какие переменные входят свободно, а какие связанно в следующие формулы:

a) $\forall x \exists z A(x, y, z)$;
b) $\forall x (A(x, y) \vee \exists y B(x, y))$;
c) $\forall x (A(x, y) \vee \exists x B(x, y))$;
d) $\forall x A(x, y) \vee \exists y B(x, y)$;
e) $\forall y (A(x, y) \wedge (\exists x (B(x, y)) \vee \forall y C(y, z)))$.

2. Как написать в языке первого порядка квантор существования и единственности? (Указание: нужно использовать символ равенства в его стандартном смысле).

3. Перепишите по правилам языка первого порядка следующие формулы из математического анализа. В каждом случае укажите сигнатуру, в которой написаны формулы, и интерпретацию, при которой они получают стандартный смысл.

a) Определение предела последовательности: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall n > N \, |x_n - x| < \varepsilon$.
b) Определение непрерывности функции в точке: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y \, (|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$.
c) Определение равномерной непрерывности функции на отрезке: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in I \, (|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon)$.

4. Являются ли эквивалентными следующие формулы (одна из другой получена заменой имён переменных):

a) $\forall x A(x)$ и $\forall y A(y)$;
b) $\exists x A(x)$ и $\exists y A(y)$;
c) $\forall x B(x, y)$ и $\forall y B(y, y)$;
d) $\exists x B(x, y)$ и $\exists y B(y, y)$;
e) $\forall x B(x, y)$ и $\forall x B(x, z)$;
f) $\exists x B(x, y)$ и $\exists z B(z, y)$;
g) $\forall x B(x, y)$ и $\forall z B(z, y)$;
h) $\exists x B(x, y)$ и $\exists y B(y, x)$?

5. Докажите общезначимость следующих формул. Буквами φ и ψ обозначены произвольные формулы первого порядка.

a) $\forall x \varphi \to \exists x \varphi$;
b) $\forall x \forall y \varphi \leftrightarrow \forall y \forall x \varphi$;
c) $\exists x \exists y \varphi \leftrightarrow \exists y \exists x \varphi$;
d) $\exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$;
e) $\neg \forall x \varphi \leftrightarrow \exists x \neg \varphi$;

f) $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
g) $(\forall x\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$, где x не является параметром формулы ψ;
h) $(\exists x\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$, где x не является параметром формулы ψ;
i) $(\forall x\varphi \wedge \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$;
j) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$;
k) $(\forall x\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \vee \psi)$, где x не является параметром формулы ψ;
l) $(\exists x\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \vee \psi)$, где x не является параметром формулы ψ;
m) $(\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \vee \psi)$;
n) $(\forall x\varphi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$;
o) $(\forall x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$, где x не является параметром формулы ψ;
p) $(\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$, где x не является параметром формулы ψ;
q) $(\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$, где x не является параметром формулы ψ;
r) $(\varphi \to \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$, где x не является параметром формулы ψ;
s) $(\forall x\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$;
t) $(\exists x\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$;
u) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
v) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$.

6. Являются ли общезначимыми следующие формулы:

a) $\forall x\exists y\forall z A(x,y,z) \to \exists x\forall y\exists z A(x,y,z)$;
b) $\forall x\exists y\forall z A(x,y,z) \to \exists z\forall x\exists y A(x,y,z)$;
c) $\forall y\exists x(A(x) \wedge B(y)) \to \exists x\forall y(A(x) \wedge B(y))$;
d) $\forall x(A(x) \to \neg B(x)) \to \neg(\exists x A(x) \wedge \forall x B(x))$;
e) $(\forall x A(x) \to \forall x B(x)) \to \exists x(A(x) \to B(x))$;
f) $\exists x\forall y\exists z A(x,y,z) \leftrightarrow \exists x(\forall y(\exists z A(x,y,z) \to P(x,y)) \to \forall y P(x,y))$?

7. Приведите следующие формулы к предварённой нормальной форме:

a) $\exists x\forall y P(x,y,z,t) \to \exists z\forall t P(x,y,z,t)$;
b) $\exists x(A(x) \vee \forall y B(x,y)) \to \neg\forall y(C(y) \wedge \exists z D(y,z))$;
c) $(\exists x A(x,y) \to \forall z B(z)) \wedge (C(z) \to \neg\exists t\forall y D(y,t))$;
d) $\neg((\neg\exists y\forall z C(y,z) \wedge \exists z D(y,z)) \to (\exists x A(x,y) \to \forall x B(x,y)))$.