Предисловие редактора номера

А. М. Райгородский

Настоящий номер посвящен нескольким актуальным разделам дискретной математики. Разумеется, это лишь небольшая часть современного комбинаторного анализа. Номер состоит из четырех разделов, в каждом из которых мы публикуем статьи по определенной тематике. Так, первый раздел номера посвящен теории случайных графов и их приложениям; во втором разделе речь идет о классической проблеме Борсука в комбинаторной геометрии; в третьем разделе собраны статьи о проблемах, связанных с раскрасками метрических пространств и дистанционных графов; в четвертом разделе изучаются гиперграфы. Каждому разделу предпосылается краткий обзор, в котором отражена история и нынешнее состояние проблематики этого раздела. Таким образом, мы не только рассчитываем собрать вместе небольшое количество работ сотрудников и аспирантов нашей кафедры — кафедры Дискретной математики ФИВТ, — но еще и надеемся познакомить читателя с тем контекстом, в котором ведутся некоторые из наших исследований.

1. Случайные графы

В первом разделе номера представлены работы, которые посвящены такой важной и богатой приложениями области дискретной математики, как теория случайных графов.

По-видимому, идея применить вероятностную технику для решения задач теории графов, будучи весьма естественной, так или иначе возникла в работах классиков XVIII—XIX века. Однако серьезную самостоятельную математическую дисциплину на основе этой идеи начали строить лишь в конце 50-х годов XX столетия. Основоположниками этой дисциплины, которая и называется теперь теорией случайных графов, выступили П. Эрдеш и А. Реньи, опубликовавшие серию ключевых работ [1—3]. В этих работах Эрдеш и Реньи рассмотрели две близких модели случайного графа. Первую модель обозначают $G(n, M)$, вторую — $G(n, p)$.

В обеих моделях Эрдеша—Реньи речь идет о вероятностном пространстве, в котором элементарные исходы — это графы без петель, кратных ребер и ориентации, имеющие n вершин. В первом случае изучают только графы с M ребрами, и вероятность каждого из этих графов полагают равной $1/C_{C_n^2}^M$. Во втором случае число ребер у графов не фиксировано, но каждое ребро графа возникает независимо ото всех остальных ребер с вероятностью p.

За последние десятилетия появилось огромное количество литературы о случайных графах в моделях Эрдеша—Реньи. Укажем лишь несколько книг: [4—8]. Тем не менее, во многих приложениях эти модели мало применительны. А потому исследуются альтернативные модели, которые призваны описывать зарождение и рост тех или иных «реальных» структур. Например, речь может идти о больших сетях типа социальных, биологических, транспортных. Среди этих сетей особое место занимает Интернет. И построению адекватных моделей его развития посвящены многочисленные работы специалистов в данной области. Здесь стоит процитировать книги [4, 8—10] и обзорные статьи [11, 12].

Еще один важный раздел современной теории случайных графов составляют модели так называемых случайных геометрических графов. С одной стороны, рассматривают такую типичную ситуацию: в многомерном кубе выбирается n независимых равномерно распределенных случайных точек, и точки соединяются ребрами, если и только если расстояние между ними не превосходит некоторой наперед заданной величины. Подобные графы играют огромную роль как в комбинаторной геометрии, так и, опять же, в моделировании различных сетей (см. [13]).

Наконец, интерес представляют обобщения модели Эрдеша—Реньи, которые устроены следующим образом. Фиксируется некоторый граф $H = (V, E)$, а затем ребра этого графа удаляются независимо друг от друга с одной и той же вероятностью. Понятно, что если H — полный граф на n вершинах, то мы возвращаемся к классической модели. Иначе мы имеем более общую и на самом деле более естественную модель. Например, если H — некоторая «реальная» сеть — граф дорог, система телефонных линий, Интернет и пр.,— то удаление ребер в ней — это уничтожение связей, которое может разрушить сеть, и тогда вопрос о свойствах соответствующего случайного графа — это вопрос о том, как будет вести себя сеть в случае возникновения помех (скажем, вопрос о связности — это вопрос о надежности сети). Описанные случайные графы изучают и в ситуациях, когда исходные графы H, подвергаемые разрушению, имеют геометрическое происхождение. Это совсем другого типа случайные геометрические графы, нежели графы, о которых мы говорили выше. Тем не менее и они играют значительную роль в комбинаторной геометрии (см. [4, 8]).

Статьи, которые мы публикуем в этом разделе номера, посвящены всем указанным направлениям теории случайных графов.

В первой статье исследуется вопрос о связности случайного дистанционного графа, который является частным случаем геометрического графа «второго типа». Мотивировкой для рассмотрения именно такого графа служат задачи Борсука и Нелсона—Эрдеша—Хадвигера. Это основополагающие задачи комбинаторной геометрии и теории геометрических графов, о которых мы подробнее скажем в разделах «Проблема Борсука» и «Хроматические числа пространств» этого номера.

Вторая статья связана с классическими графами Эрдеша—Реньи. В ней изучено свойство случайного графа содержать большие подграфы, которые изоморфны тем или иным графам диаметров на плоскости. Опять же, мотивировка для работы — это проблема Борсука, которая, по сути, связана как раз с раскрасками графов диаметров в пространствах.

Последние три статьи раздела относятся к теории случайных веб-графов, т.е. графов, призванных изображать Интернет (веб). Здесь изучены так называемые k-е входящие степени вершин веб-графа, его r-диаметр и некоторые арифметические свойства вторых степеней. Все это сделано для модели Боллобаша—Риордана (см. [4, 8—12]).

2. Проблема Борсука

Проблема Борсука, которой посвящен второй раздел номера, — это одна из самых важных проблем современной комбинаторной геометрии. Речь идет об отыскании величины $f(n)$, равной минимальному количеству частей меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное множество диаметра 1 в пространстве $\mathbb{R}^n$. Проблема была поставлена К. Борсуком в 1933 году (см. [14]). Борсук тогда спросил: *верно ли, что* $f(n) = n+1$*?* Основания для вопроса были достаточно вескими. Во-первых, Борсук знал, что ответ на этот вопрос положителен при $n \leqslant 2$. Во-вторых, он также знал, что $f(n) \geqslant n + 1$. С одной стороны, это неравенство очевидно (достаточно взять множество вершин правильного n-мерного симплекса и сослаться на принцип Дирихле). С другой стороны, то же неравенство получается с помощью рассмотрения шара. Правда, тут доказательство основано на топологическом методе (см. [15, 16]), но зато нетрудно разбить шар на $n + 1$ часть меньшего диаметра, а это означает, что для шара $n + 1$ и есть минимальное число частей меньшего диаметра, на которые он разбивается (ра́вно, впрочем, как и для симплекса).

Короче, все эти обстоятельства привели Борсука к постановке вопроса, а многочисленных специалистов, которые вслед за ним занялись задачей, — к переименованию этого вопроса в «гипотезу Борсука». И вера в справедливость гипотезы была очень сильна (см., например, [17]).

Однако в 1993 году гипотеза была опровергнута. Первые контрпримеры построили Дж. Кан и Г. Калаи (см. [18]) во всех размерностях, начиная с $n = 2015$. При этом они показали, что $f(n) \geqslant (1.203\ldots + o(1))^{\sqrt{n}}$. Сейчас известно, что гипотеза верна при всех $n \leqslant 3$ (см. [19]) и неверна при всех $n \geqslant 298$ (см. [20]). Кроме того,

$$(1.2255\ldots + o(1))^{\sqrt{n}} \leqslant f(n) \leqslant (1.224\ldots + o(1))^{n}.$$

Здесь нижняя оценка получена в [21], а верхняя — в [22] и [23].

Также известны различные частные результаты. Например, доказано, что любое множество диаметра 1, имеющее гладкую границу, разбивается на $n+1$ часть меньшего диаметра (см. [24]). Аналогичные результаты получены для центрально-симметричных множеств и для множеств, которые инвариантны относительно действия группы симметрий правильного n-мерного симплекса (см. [25]).

Далее, важный кусок современных исследований связан с тем, что практически все контрпримеры к гипотезе Борсука получены с помощью многогранников с вершинами в $\{0,1\}^n$ и в $\{-1,0,1\}^n$. С одной стороны, разбиением таких многогранников в малых размерностях занималась группа Г. М. Циглера в Германии, и им удалось показать, что при $n \leqslant 9$ контрпримеров с вершинами в $\{0,1\}^n$ нет (см. [26]). С другой стороны, в растущей размерности верхние оценки для минимального числа частей в разбиениях многогранников даже более общего вида (так называемых решетчатых многогранников) получал А. М. Райгородский (см., например, [27]).

Наконец, к гипотезе Борсука очень тесно примыкает следующая важная деятельность. Обозначим через

$$d\left(\Phi, k\right) = \inf\left\{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_k, \quad \forall\, i \quad \operatorname{diam} \Phi_i \leqslant x\right\}$$

точную нижнюю грань множества тех чисел x, для которых существует разбиение данного множества $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ на k частей с диаметрами, не превосходящими x. Положим также

$$d'\left(\Phi, k\right) = \inf\left\{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_k, \quad \forall\, i \quad \forall\, X, Y \in \Phi_i \quad \rho(X,Y) \neq x\right\}.$$

Последняя величина мотивирована, скорее, задачей о хроматическом числе пространства, которая будет обсуждаться в разделе III номера, но здесь ее рассмотрение куда более уместно.

Положим

$$d(k,n) = \sup\, d\left(\Phi, k\right), \quad d'(k,n) = \sup\, d'\left(\Phi, k\right),$$

где супремумы берутся по всем множествам $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ диаметра 1.

Даже при $n = 2$ задача отыскания величин $d(k,n), d'(k,n)$ крайне нетривиальна. Изначально ее поставил Х. Ленц (см. [28]), но большинство наилучших результатов в ней принадлежало до последнего времени В. П. Филимонову (см. [29]). Недавно был достигнут значительный прогресс в проблематике. Во-первых, В. В. Буланкина применила нетривиальное обобщение техники так назывемых универсальных покрывающих систем, предложенной в работах [30] и [31], и получила серьезное улучшение известных верхних оценок для $d'(5,2)$ и $d'(6,2)$. Во-вторых, дальнейшего улучшения добился Е. Ю. Воронецкий. В-третьих, Д. А. Белов и Н. А. Александров существенно уточнили прежние верхние оценки для $d(6,2)$. И первые три статьи второго раздела — это как раз статьи Буланкиной, Воронецкого и Александрова–Белова.

Стоит отметить, что, когда речь идет о разбиениях на части конечных множеств точек, разумно использовать теоретико-графовую терминологию. А именно, само множество интерпретируют как множество вершин графа, ребра которого — пары точек, отстоящих друг от друга на максимальное расстояние в множестве. Наукой о свойствах получающихся таким образом графов (так называемых графов диаметров) очень много занимались (см. [32]). И с этой наукой связана вторая статья первого раздела.

Другие аспекты проблематики можно найти в [17, 19, 25, 33—38].

Итак, первые три статьи второго раздела связаны с разбиениями множеств на части заданного диаметра и без данного расстояния. В четвертой статье обсуждаются интересные обобщения проблемы Борсука на случай, когда вместо обычного вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ рассматривается его рациональное подпространство $\mathbb{Q}^n$ с той же евклидовой метрикой. А в пятой статье изучена проблема Борсука для многогранников с вершинами в $\{0,1\}^n$ и в $\{-1,0,1\}^n$. Новым способом передоказаны результаты Циглера и получены принципиально новые результаты для случая $\{-1,0,1\}^n$.

3. Хроматические числа пространств

Этот раздел посвящен еще одной классической проблеме комбинаторной геометрии — проблеме, не менее актуальной, нежели проблема Борсука, о которой шла речь в предыдущем разделе. В 1950 году Э. Нелсон предложил посчитать величину $\chi(\mathbb{R}^n)$, называемую сейчас *хроматическим числом пространства* и равную минимальному количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1. Несколько раньше Хадвигер занимался очень близкой проблематикой (см. [39]). Поэтому проблема отыскания хроматического числа пространства носит имена обоих математиков.

Относительно проблемы Нелсона–Хадвигера имеется огромное количество результатов (см. [32, 35, 37, 40—45]). Перечислим лишь основные аспекты данной науки, отсылая заинтересованного читателя к указанным источникам.

Во-первых, практически ни одного точного значения величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ не известно. Мы знаем лишь, что $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$, и это все! Существует большое количество работ о хроматическом числе плоскости (см.]45]) и о хроматических числах других пространств небольшой размерности. Наилучшие на сегодняшний день нижние и верхние оценки таких хроматических чисел приведены в статьях [35] и [37].

Во-вторых, изучались оценки хроматических чисел в растущей размерности. Наилучшие из них таковы:

$$(1.239\ldots + o(1))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n.$$

Нижняя оценка получена в работе [46], а верхняя в работе [47].

В-третьих, много внимания было уделено и продолжает уделяться обобщениям понятия хроматического числа пространства. С одной стороны, вместо $\mathbb{R}^n$ рассматривали произвольные метрические пространства. С другой стороны, одноцветным точкам запрещали отстоять друг от друга не только на расстояние 1, но и на каждое расстояние, величина которого принадлежит прозвольному множеству положительных вещественных чисел. Обо всем этом можно почитать в обзорах [35] и [44].

Далее, как и проблема Борсука, задача Нелсона–Хадвигера тесно связана с теорией графов. Назовем *графом расстояний* или *дистанционным графом* любой граф $G = (V, E)$, у которого $V \subseteq \mathbb{R}^n$, а E — это множество пар точек, отстоящих друг от друга на расстояние 1. Разумеется, аналогичное определение можно дать в случае любого метрического пространства и множества «запрещенных» расстояний. Ясно, что $\chi(\mathbb{R}^n) = \max\limits_G \chi(G)$, где максимум берется по всем графам расстояний в $\mathbb{R}^n$, а $\chi(G)$ — это *хроматическое число* графа, равное наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить его вершины, чтобы одноцветные вершины не были соединены ребрами. Более того, максимум достигается на некотором конечном дистанционном графе, коль скоро мы принимаем аксиому выбора (см. [48]). В итоге свойства графов расстояний столь же интересны, как и свойства графов диаметров из раздела II. О них можно узнать, например, из книги [32].

Наконец, изучаются аналоги хроматических чисел в ситуациях, когда на множества одноцветных точек в раскраске накладываются некоторые ограничения (помимо отсутствия в них точек на данном расстоянии). Главное из таких ограничений — измеримость по Лебегу. О нем говорится, например, в книге [32] и обзорах [35, 44].

В этом разделе сборника представлены три статьи. Первая из них связана с отысканием больших измеримых множеств в пространствах размерности $\leqslant 8$, которые свободны от расстояния 1. Во второй статье строятся графы расстояний, у которых одновременно большое хроматическое число и нет клик большого размера. Третья статья посвящена хроматическому числу пространства $\mathbb{Q}^n$ и его нетривиальным аналогам.

4. Раскраски гиперграфов

Наука о раскрасках гиперграфов, которой посвящен четвертый раздел, необозрима и исключительно важна как для теории, так и для приложений. Здесь мы дадим лишь основные определения и сформулируем ту конкретную задачу, которую решают авторы статей, публикуемых в разделе.

Прежде всего напомним, что *гиперграфом* называется пара $H = (V, E)$, где V — некоторое (как правило, конечное) множество, называемое *множеством вершин* гиперграфа, а $E = E(H)$ — произвольная совокупность подмножеств множества V, называемых *ребрами* гиперграфа. Гиперграф является *n-однородным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин. Частным случаем однородного гиперграфа служит, разумеется, обыкновенный граф (без петель, кратных ребер и ориентации).

Раскраска множества вершин $V(H)$ гиперграфа H называется *правильной*, если в этой раскраске все ребра из $E(H)$ неодноцветны (содержат вершины обоих цветов). *Хроматическим числом* гиперграфа H называется минимальное число $\chi(H)$ цветов, требуемое для правильной раскраски вершин этого гиперграфа.

Нетрудно понять, что если при данном n количество ребер в n-однородном гиперграфе достаточно мало, то такой гиперграф заведомо двудолен (т.е. его хроматическое число равно двум). Исходя из этого простого соображения, П. Эрдеш и А. Хайнал в 1961 году (см. [49]) предложили найти величину $m(n)$, равную минимальному числу ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом, большим двух. Иными словами,

$$m(n) = \min \{|E(H)| : \ H - n\text{-однородный гиперграф}, \ \chi(H) > 2\}.$$

Естественное обобщение задачи Эрдеша–Хайнала было предложено в 1972 году М. Херцогом и Й. Шёнхаймом (см. [50]), которые определили величину $m(n, r)$, равную минимальному числу ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом, большим r. Иначе говоря,

$$m(n, r) = \min \{|E(H)| : \ H - n\text{-однородный гиперграф}, \ \chi(H) > r\}.$$

Ясно, что $m(n) = m(n, 2)$.

Многочисленные известные результаты, касающиеся величины $m(n, r)$ и ее разнообразных обобщений, а также большое число смежных задач можно найти в обзорах [51] и [52].

Первая статья этого раздела посвящена доказательству нового достаточного условия того, что для неоднородного гиперграфа H выполнено неравенство $\chi(H) \leqslant r$. Во второй статье ищутся новые рекуррентные верхние оценки для классической величины $m(n)$ при малых n. Наконец, в третьей статье рассматриваются так называемые гиперграфы-клики, т.е. гиперграфы, у которых ребра попарно пересекаются.

Заметим, что о гиперграфах можно почитать, в частности, в статьях и книгах [53—56].

Литература

1. *Erdős P., Rényi A.* On random graphs I // Publ. Math. Debrecen.— 1959.— V. 6.— P. 290—297.
2. *Erdős P., Rényi A.* On the evolution of random graphs // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.— 1960.— V. 5.— P. 17—61.
3. *Erdős P., Rényi A.* On the evolution of random graphs // Bull. Inst. Int. Statist. Tokyo.— 1961.— V. 38.— P. 343—347.
4. *Bollobás B.* Random Graphs.— Cambridge Univ. Press, 2001.
5. *Alon N., Spencer J.* The probabilistic method // Wiley-Interscience Series in Discrete Math. and Optimization, 2000.
6. *Janson S.*, *Łuczak T.*, *Ruciński A.* Random graphs.— New York: Wiley, 2000.
7. *Колчин В. Ф.* Случайные графы.— М.: Физматлит, 2002.
8. *Райгородский А. М.* Модели случайных графов.— М.: МЦНМО, 2011.
9. *Райгородский А. М.* Экстремальные задачи теории графов и анализ данных.— М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
10. *Durrett R.* Random graph dynamics.— Cambridge, 2007.
11. *Bollobás B.*, *Riordan O. M.* Mathematical results on scale-free random graphs. Handbook of graphs and networks.— Wiley-VCH, Weinheim, 2003.— P. 1–34.
12. *Райгородский А. М.* Модели случайных графов // Труды МФТИ. — 2010.— Т. 2, № 4 (8).— С. 130—140.
13. *Penrose M.* Random Geometric Graphs.— Oxford Studies in Probability, 2003.
14. *Borsuk K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Math.— 1933.— V. 20.— P. 177—190.
15. *Matoušek J.* Using the Borsuk—Ulam theorem.— Berlin: Springer, 2003.
16. *Райгородский А. М.* Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2011.
17. *Болтянский В. Г.*, *Гохберг И. Ц.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М: Наука, 1965.
18. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk's conjecture // Bulletin (new series) of the AMS. — 1933. — V. 29, N 1. — P. 60–62.
19. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // УМН. — 2001.— Т. 56, вып. 1. — С. 107–146.

20. *Hinrichs A.* Spherical codes and Borsuk's conjecture // Discr. Math. — 2002. — V. 243. — P. 253–256.

21. *Райгородский А. М.* Об одной оценке в проблеме Борсука // УМН. — 1999. — Т. 54, вып. 2. — С. 185–186.

22. *Schramm O.* Illuminating sets of constant width // Mathematika. — 1988. — V. 35. — P. 180–189.

23. *Bourgain J., Lindenstrauss J.* On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter // Lecture Notes in Math. — 1991. — V. 1469. — P. 138–144.

24. *Hadwiger H.* Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Comm. Math. Helv. — 1945/46. — V. 18. — P. 73–75.

25. *Райгородский А. М.* Вокруг гипотезы Борсука // Итоги науки и техники.— Сер. «Современная математика». — 2007. — Т. 23. — С. 147–164.

26. *Ziegler G. M.* Coloring Hamming graphs, optimal binary codes, and the 0/1-Borsuk problem in low dimensions // Lect. Notes Comput. Sci. — 2001. — V. 2122. — P. 159–171.

27. *Райгородский А. М.* Проблемы Борсука и Грюнбаума для решетчатых многогранников // Известия РАН. — 2005. — Т. 69, № 3. — С. 81–108.

28. *Lenz H.* Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von moglichst kleineren Durchmesser // Jahresbericht d. DMV Bd. — 1956. — V. 58. — P. 87–97.

29. *Филимонов В. П.* О покрытии плоских множеств // Матем. сборник. — 2010. — Т. 201, № 8. — С. 127–160.

30. *Райгородский А. М., Калнишкан Ю. А.* О проблеме Борсука в $\mathbb{R}^3$ // Матем. заметки. — 2003. — Т. 74, № 1. — С. 149–151.

31. *Купавский А. Б., Райгородский А. М.* О разбиении трехмерных множеств на пять частей меньшего диаметра // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 2. — С. 208–219.

32. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. — Berlin: Springer, 2005.

33. *Raigorodskii A. M.* Three lectures on the Borsuk partition problem // London Mathematical Society Lecture Note Series. — 2007. — V. 347. — P. 202–248.

34. *Raigorodskii A. M.* The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary // Math. Intelligencer. — 2004. — V. 26, N 3. — P. 4–12.

35. *Raigorodskii A. M.* Coloring distance graphs and graphs of diameters // in a collection of papers, ed. J. Pach, 2012.

36. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука. — М.: МЦНМО, 2006.

37. *Райгородский А. М.* Избранные задачи комбинаторной геометрии и теории графов // Труды МФТИ. — 2011.— Т. 3, № 4.— С. 127—139.

38. *Boltyanski V. G., Martini H., Soltan P. S..* Excursions into combinatorial geometry. — Berlin: Springer, 1997.

39. *Hadwiger H.* Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // Portugaliae Math. — 1944. — V. 4. — P. 140–144.

40. *Райгородский А. М.* Хроматические числа. — М.: МЦНМО, 2003.

41. *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2007.

42. *Agarwal P. K.*, *Pach J.* Combinatorial geometry. — New York: John Wiley and Sons Inc., 1995.

43. *Klee V.*, *Wagon S.* Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory. — Math. Association of America, 1991.

44. *Székely L. A.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // J. Bolyai Math. Soc. — 2002. — V. 11. — P. 649–666.

45. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. — Springer, 2009.

46. *Райгородский А. М.* О хроматическом числе пространства // УМН. — 2000. — Т. 55, вып. 2. — С. 147–148.

47. *Larman D. G.*, *Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. — 1972. — V. 19. — P. 1–24.

48. *de Bruijn N. G.*, *Erdős P.* A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet. Ser. A. — 1951. — V. 54, N 5. — P. 371–373.

49. *Erdős P.*, *Hajnal A.* On a property of families of sets // Acta Mathematica of the Academy of Sciences, Hungary.— 1961.— V. 12, N 1—2.— P. 87–123.

50. *Herzog M.*, *Schönheim J.* The B_r property and chromatic numbers of generalized graphs // J. Combinatorial Theory, Series B. — 1972.— V. 12.— P. 41–49.

51. *Kostochka A. V.* Color-Critical Graphs and Hypergraphs with Few Edges: A Survey // More Sets, Graphs and Numbers. Bolyai Society Mathematical Studies, eds. E. Győri, G. O. H. Katona, L. Lovász.— V. 15.— Springer, 2006.— P. 175–198.

52. *Райгородский А. М.*, *Шабанов Д. А.* Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы // УМН. — 2011.— Т. 66, вып. 5.— С. 109–182.

53. *Зыков А. А.* Гиперграфы // УМН. — 1974.— Т. 29, вып. 6.— С. 89–154.

54. *Berge C.* Graphes et hypergraphes.— Paris: Dunod, 1970.

55. *Bollobás B.* Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability. — Cambridge Univ. Press, 1986.

56. *Gross J. L.*, *Yellen J.* Handbook of Graph Theory.— CRC Press, 2004.