Программа курса «Дискретные структуры: 1 семестр»

1. Основные правила комбинаторики: правило сложения, правило умножения, принцип Дирихле, формула включений и исключений.
2. Размещения, перестановки и сочетания. Бином Ньютона, полиномиальная формула. Тождества: 6 знакопостоянных со следствиями про суммы степеней натуральных чисел и 2 знакопеременных.
3. Оценки для факториалов и биномиальных коэффициентов. Формула Стирлинга (б/д). Запись $\left(c+o(1)\right)^n$. Оценки биномиальных коэффициентов вида $C_n^{[an]}, a \in (0,1)$. Аналогичные результаты для полиномиальных коэффициентов. Асимптотика для C_n^k при $k^2 = o(n)$. Оценки той же величины при бóльших k. Асимптотики для $\frac{C_n^{n/2}}{C_n^{n/2-x}}$.
4. Функция Мёбиуса. Формула обращения Мёбиуса. Применение формулы обращения Мёбиуса для подсчета числа циклических последовательностей.
5. Общая теория обращения Мёбиуса. Формула обращения Мёбиуса и формула включения и исключения как частные случаи.
6. Задачи о разбиениях чисел на слагаемые. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Рекуррентные формулы. Число всех упорядоченных разбиений. Диаграммы Юнга. Теоремы Эйлера о равенстве количеств неупорядоченных разбиений. Бесконечное произведение $(1-x)(1-x^2)\ldots$ и его связь с задачами о неупорядоченных разбиениях (б/д). Формула Харди—Рамануджана (б/д).
7. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Соотношения 2ого порядка — с доказательством, соотношения большего порядка — только формулировка.
8. Степенные ряды и производящие функции. Пример тождества, доказываемого с помощью степенных рядов. Теоремы о сходимости степенных рядов (б/д). Числа Фибоначчи и Каталана. Нахождение сумм с участием биномиальных коэффициентов, чисел Фибоначчи и т.д. Меандры.
9. Определение графа, орграфа, мультиграфа, псевдографа и т.д. Маршруты в графах, степени вершин. Изоморфизм графов. Планарность графа. Критерий Куратовского (б/д). Эйлеровость графа (критерий).

10. Эквивалентные определения дерева. Формула Кэли. Унициклические графы. Точная формула для числа различных унициклических графов (надо уметь доказывать лемму о количестве лесов) и асимптотика. Обзор результатов о числе связных графов с данным количеством вершин и ребер.
11. Последовательности и графы де Брёйна. Правило «ноль лучше единицы».
12. Случайные графы. Неравенства Маркова и Чебышёва (лучше помнить д-ва). Моменты и факториальные моменты. Теорема о пуассоновской аппроксимации (б/д). Комментарий в терминах моментов пуассоновской случайной величины. Треугольники в случайных графах (фазовый переход). «Внутри фазового перехода» — б/д. Связность случайного графа: формулировка теоремы о фазовом переходе (3 ситуации), д-во в случае $p > \frac{3 \ln n}{n}$. Теорема о гигантской компоненте (б/д). Теорема о древесных компонентах: 5 ситуаций, 3-я — б/д.
13. Хроматическое число, число независимости, кликовое число и соотношения между ними. Сравнение оценок хроматического числа через кликовое число и число независимости в терминах случайных графов: одна «почти всегда» значительно лучше другой (распределение кликового числа и числа независимости).
14. Гиперграфы. Теорема Эрдеша—Ко—Радо (максимальное число ребер в 1-пересекающемся гиперграфе). t-пересекающиеся гиперграфы, величина $f(n,k,t)$. Пример, когда нижняя оценка $f(n,k,t) \geq C_{n-t}^{k-t}$ заведомо не точна. История последовательных продвижений в задаче: теорема Эрдеша—Ко—Радо (общий случай), теорема Франкла, теорема Уилсона, теорема Алсведе—Хачатряна (все б/д, но с подробными комментариями). Граф пересечений для полного однородного гиперграфа. Его кликовое число и число независимости.
15. Кнезеровский граф (граф непересечений для полного однородного гиперграфа). Верхняя оценка его хроматического числа. Простые нижние оценки. Примеры конкретных кнезеровских графов. Теорема Ловаса о хроматическом числе кнезеровского графа (здесь теорема Борсука—Улама—Люстерника—Шнирельмана в разных формулировках, но с доказательством только в случае плоскости и трехмерного пространства).

16. Теорема Франкла—Уилсона для гиперграфов (линейно-алгебраический метод). «Пафос» теоремы. «Точность» теоремы (сверху и снизу $\left(1.754\ldots+o(1)\right)^n$). Величина $m(n,k,t)$.
17. Хроматические числа пространств. Историческая справка. Нижняя оценка хроматического числа пространства с помощью теоремы Франкла—Уилсона. Уточнения (развитие линейно-алгебраического метода).
18. Проблема Борсука. Историческая справка. Связь с теоремой Борсука—Улама—Люстерника—Шнирельмана. Контрпримеры к гипотезе Борсука (история). Нижняя оценка числа Борсука с помощью теоремы Франкла—Уилсона. Уточнения.