Московский физико-технический институт (ГУ)
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Набор зачётных задач №3

*Каждая задача оценивается исходя из **6** баллов. Набранные баллы суммируются с баллами за третью контрольную, но сумма за каждую задачу не может превышать 10. Каждая задача засчитывается, если на контрольной набрано меньше 8 баллов за задачу с тем же номером. Каждый пункт засчитывается не более чем k студентам из одной группы. (Значения k указаны отдельно для каждой задачи). Список «свободных» задач для каждой группы доступен по адресу* `http://bit.ly/TlLFqr`.

1. ($k = 1$) Не опираясь на теорему о полноте, докажите выводимость следующих формул в исчислении предикатов.

a) $\forall y \exists x(A(x) \wedge B(y)) \to \exists x \forall y(A(x) \wedge B(y))$;
b) $\forall y \exists x(A(x) \vee B(y)) \to \exists x \forall y(A(x) \vee B(y))$;
c) $\forall y \exists x(A(x) \to B(y)) \to \exists x \forall y(A(x) \to B(y))$;
d) $\forall x \exists y(A(x) \to B(y)) \to \exists y \forall x(A(x) \to B(y))$;
e) $(\forall x \phi \to \forall x \psi) \to \exists x(\phi \to \psi)$;
f) $(\forall x \phi \to \exists x \psi) \to \exists x(\phi \to \psi)$;
g) $(\exists x \phi \to \forall x \psi) \to \forall x(\phi \to \psi)$;
h) $\exists x(\phi \to \psi) \to (\forall x \phi \to \exists x \psi)$;
i) $(\forall x \phi \vee \forall x \psi) \to \forall x(\phi \vee \psi)$;
j) $(\exists x \phi \to \exists x \psi) \to (\exists x(\phi \to \psi) \vee \exists x(\psi \to \phi))$;
k) $\exists x(\phi \to \psi) \to (\exists x \neg \phi \vee \exists x \psi)$;
l) $(\forall x \phi \wedge \exists x \psi) \to \exists x(\phi \to \psi)$;
m) $(\exists x \neg \phi \vee \forall x \psi) \to \exists x(\phi \to \psi)$;
n) $\forall t \exists u \forall v A(t, u, v) \to \forall x \exists y A(x, y, x)$;
o) $\exists t \forall u A(t, u, t) \to \exists x \forall y \exists z A(x, y, z)$;
p) $\exists y \forall x A(x, x, y) \to \forall t \exists u \exists v A(t, u, v)$;
q) $\exists x \forall y \forall z A(x, y, z) \to \forall u \exists t A(t, t, u)$;
r) $(\forall x A(x) \to \exists y B(y)) \to \exists z(A(z) \to B(z))$;
s) $\exists x(\forall y(\exists z A(x, y, z) \to P(x, y)) \to \forall y P(x, y)) \to \exists x \forall y \exists z A(x, y, z)$;

2. ($k = 1$) Кто выигрывает в игре Эренфойхта для следующих пар упорядоченных множеств? Укажите выигрышную стратегию.

a) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} + \mathbb{Z}$;
b) $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} + \mathbb{N} + \mathbb{N}$;
c) $\langle \mathbb{Z}^2, \leqslant_{stand} \rangle + \langle \mathbb{Z}^2, \leqslant_{stand} \rangle$ и $\langle (\mathbb{Z} + \mathbb{Z})^2, \leqslant_{stand} \rangle$
d) $\mathbb{R}$ и $\langle \mathbb{R}^2, \leqslant_{lex} \rangle$;
e) $\langle \mathbb{R}^2, \leqslant_{stand} \rangle$ и $\langle \mathbb{R}^3, \leqslant_{stand} \rangle$;
f) $\langle [0, 1]^2, \leqslant_{stand} \rangle$ и $\langle$Круг с центром в 0 радиуса 1, $\leqslant_{stand} \rangle$;

g) $\langle [0,1]^2, \leqslant_{stand}\rangle$ и $\langle$Ромб с вершинами $(0,0),(1,2),(2,1),(3,3), \leqslant_{stand}\rangle$;
h) $\langle$Ромб с вершинами $(0,0),(1,3),(3,1),(4,4), \leqslant_{stand}\rangle$ и
$\langle$Ромб с вершинами $(0,0),(1,2),(2,1),(3,3), \leqslant_{stand}\rangle$;
i) $\langle \mathbb{N}\setminus\{0\}, |\rangle$ и $\langle$Множество всех конечных подмножеств $\mathbb{N}, \subset\rangle$;
j) $\langle \{a,b\}^\infty, \leqslant_{lex}\rangle$ и $\langle \{a,b,c\}^\infty, \leqslant_{lex}\rangle$;

Кто выигрывает в игре Эренфойхта для следующих алгебраических структур? Укажите выигрышную стратегию.

k) $\langle \mathbb{Z}, +, =\rangle$ и $\langle \mathbb{Q}, +, =\rangle$;
l) $\langle \mathbb{R}_+, \cdot, =\rangle$ и $\langle \mathbb{Q}_+, \cdot, =\rangle$ ($\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{Q}+$ обозначают неотрицательные действительные и неотрицательные рациональные числа соответственно);
m) $\langle \mathbb{R}, \cdot, =\rangle$ и $\langle \mathbb{Q}, \cdot, =\rangle$;
n) $\langle \mathbb{Q}, +, =\rangle$ и $\langle \mathbb{Q}^2, +, =\rangle$;
o) $\langle \mathbb{Z}, +, =\rangle$ и $\langle \mathbb{Z}^2, +, =\rangle$;
p) $\langle \mathbb{R}_{>10}, +, =\rangle$ и $\langle \mathbb{R}_{>10}, \cdot, =\rangle$ ($\mathbb{R}_{>a}$ — действительные числа, бóльшие a);
q) $\langle \mathbb{R}_{>1}, +, =\rangle$ и $\langle \mathbb{R}_{>1}, \cdot, =\rangle$;
r) $\langle \mathbb{Z}_{>10}, +, =\rangle$ и $\langle \mathbb{Q}_{>10}, +, =\rangle$;
s) $\langle \mathbb{Z}_{>10}, +, =\rangle$ и $\langle \mathbb{Z}_{>10}, \cdot, =\rangle$.

3. ($k=2$) Напоминание: шкалой Крипке называется пара (W,R), где W — множество «миров», R — отношение достижимости на W. Моделью Крипке называется тройка (W,R,V), где отображение V сопоставляет каждому миру w множество переменных, истинных в этом мире. Ниже приведены пары, состоящие из модальной формулы и свойства шкалы. Нужно указать, следует ли из указанного свойства общезначимость формулы на этой шкале, и следует ли из общезначимости формулы на некоторой шкале указанное свойство.

a) $\Box\Box A \to \Box A$; плотность $(wRu \to \exists v(wRv \wedge vRu))$;
b) $\Diamond\Diamond A \to \Box\Box A$; R — частичная функция из W в W;
c) $\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Box\Box A$; R — функция из W в W;
d) $\Diamond A \to \Box\Diamond A$; евклидовость $((wRu \wedge wRv) \to uRv)$;
e) $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$; транзитивность;
f) $(\Box A \wedge \Box B) \to (\Box\Box A \vee \Box\Box B)$; транзитивность;
g) $\Box(\Box(A \to \Box A) \to A) \to A$; рефлексивность и транзитивность;
h) $\Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$; «квазиевклидовость» $((wRu \wedge wRv) \to (uRv \vee vRu))$;
i) $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$; $(wRu \wedge wRv) \to \exists x(uRx \wedge vRx)$;

4. ($k=1$) В какую сторону следующие классические эквивалентности верны в интуиционизме? Выведите их в истинную сторону и предложите контрмодель Крипке в ложную.

a) $(A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee B)$;
b) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$;
c) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$;
d) $(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(\neg A \to B)$

e) $(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$;
f) $(A \vee \neg B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge B)$;
g) $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \to B)$;
h) $(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \to B)$;
i) $(\neg A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \to \neg B)$;
j) $(A \vee \neg B) \leftrightarrow (\neg A \to \neg B)$;
k) $\neg(A \to B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee B)$;
l) $(\neg A \to \neg(A \to B)) \leftrightarrow A$;
m) $(\neg A \to (B \to A)) \leftrightarrow (B \to A)$;
n) $((A \to B) \to C) \leftrightarrow ((B \to C) \wedge (A \vee C))$;
o) $((A \wedge B) \to \neg C) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$;
p) $(A \to \neg(B \wedge C)) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$;
q) $(\neg A \to \neg(B \wedge C)) \leftrightarrow (A \vee \neg B \vee \neg C)$;

5. $(k = 2)$ Спектром теории с равенством называется множество мощностей всех её конечных моделей. Придумайте теорию, спектр которой равен:

a) $\{n \mid n > 7, n \vdots 3\}$;
b) $\{n \mid n \equiv 1 \mod 6\}$;
c) $\{n \mid n \equiv 5 \mod 6\}$;
d) $\{p \mid p$ простое$\}$;
e) $\{p \mid p$ — степень простого числа$\}$;
f) $\{p \mid p$ составное$\}$;
g) $\{n \mid n = k^2\}$ (множество полных квадратов);
h) $\{n \mid n = 2k^2\}$ (множество удвоенных полных квадратов);
i) $\{n \mid n = 2^k\}$ (множество степеней двойки);
j) $\{n \mid n = 4^k\}$ (множество степеней четвёрки);
k) $\{n \mid n = \phi_k\}$ (множество чисел Фибоначчи).

6. $(k = 2)$

a) Придумайте совместную теорию с одноместными предикатами, все модели которой состоят хотя бы из 6 элементов. Какое минимальное количество предикатов вам понадобится?

b) Пусть $B = \exists x_1 \ldots \exists x_n A$, где A — бескванторная формула, не содержащая функциональных символов. Докажите, что если B выполнима, то она имеет конечную модель мощности не выше n.

c) Придумайте две неэквивалентные формулы ϕ и ψ, такие что формулы $\forall x \phi$ и $\forall x \psi$ эквивалентны. (Эквивалентность понимается как общезначимость эквиваленции, на аксиомы равенства и конкретные интерпретации опираться нельзя.)

d) Придумайте две неэквивалентные формулы ϕ и ψ, такие что формулы $\exists x \phi$ и $\exists x \psi$ эквивалентны. (Эквивалентность понимается как общезначимость эквиваленции, на аксиомы равенства и конкретные интерпретации опираться нельзя.)

e) Докажите, что абелевы группы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_k$ при различных k попарно не элементарно эквивалентны, но любая замкнутая формула, истинная в $\mathbb{Z}$, истинна в $\mathbb{Z}_k$ при всех достаточно больших k.

f) Пусть V — множество вершин некоторого графа, двуместный предикат e означает, что вершины соединены ребром. Докажите, что не существует замкнутой формулы, верной для всех связных графов и неверных для всех несвязных.

g) Пусть V — множество вершин некоторого графа, двуместный предикат e означает, что вершины соединены ребром. Существует ли замкнутая формула, верная для всех двудольных графов и неверная для всех недвудольных?

h) Пусть V — множество вершин некоторого графа, двуместный предикат e означает, что вершины соединены ребром. Существует ли замкнутая формула, верная для всех ациклических графов и неверная для всех содержащих циклы?

i) Пусть V — множество вершин некоторого графа, двуместный предикат e означает, что вершины соединены ребром. Существует ли замкнутая формула, верная для всех деревьев и неверная для всех остальных графов?

j) Пусть теории Γ_1 и Γ_2 таковы, что теория $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ несовместна. Докажите, что найдётся замкнутая формула A, такая что $\Gamma_1 \vdash A$ и $\Gamma_2 \vdash \neg A$.