УДК 519.65

Е.А. Умнов, А.Е. Умнов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Метод параметрической линеаризации, использующий штрафные функции со всюду обратимой производной для решения пар двойственных задач

В статье рассматривается подход, базирующийся на методе гладких штрафных функций, предназначенный для решения двойственной пары задач линейного параметрического программирования. Приводится описание реализации вычислительной процедуры в виде двухуровневой схемы параметризации и набора иллюстративных задач.

Ключевые слова: математическое программирование, двухуровневая оптимизация, метод штрафных функций, двойственная пара задач линейного программирования.

Одним из основных затруднений, возникающих в практике решения задач нелинейного программирования, является проблема высокой размерности. Эта проблема, с которой пришлось столкнуться уже пользователям первых поколений ЭВМ, не утратила своей актуальности и сегодня, несмотря на внушительный рост доступных вычислительных ресурсов. Предложенные до настоящего времени методы преодоления данного затруднения основаны, как правило, на использовании особенностей постановки исходной задачи математического программирования, допускающих применение схем декомпозиции, распараллеливания вычислений и т. п. При этом возникают специфические проблемы, также требующие как теоретического анализа, так и разработки методов их практического разрешения (см., например, [1]).

В данной работе исследуется один из возможных вариантов декомпозиционной схемы — *метода параметрической линеаризации*, описанной в общем виде в [2], идея которой заключается в следующем.

Если исходная задача математического программирования такова, что из множества ее переменных можно выделить сравнительно небольшое подмножество переменных, при фиксации значений которых (то есть при их превращении в параметры) задача оказывается линейной относительно остальных переменных, то исходная задача декомпозируется на две: высокоразмерную линейную *задачу нижнего уровня* и нелинейную, но малоразмерную *задачу верхнего уровня*. При этом для решения первой задачи оказывается возможным использование высокоэффективных алгоритмов, в то время как решение второй задачи осложняется зависимостью ее условий от решений первой, получаемых для различных значений переменных, превращенных в параметры.

Приведем описание процедуры параметрической линеаризации. Пусть $x \in E^n$, $u \in E^k$ и $\|x\| = \|\xi_1\xi_2\,\ldots\,\xi_n\|^{\mathrm{T}}$, $\|u\| = \|\nu_1\nu_2\,\ldots\,\nu_k\|^{\mathrm{T}}$, а исходная задача математического программирования имеет вид:
максимизировать по x и u функцию $F(x,u)$ при условиях

$$x \geqslant o, \qquad u \in \Omega \subseteq E^k, \qquad f_i(x,u) \leqslant 0 \quad \forall\, i = [1,m], \tag{1}$$

которая в координатной форме записывается так:
максимизировать по x, u:

$$F(x,u) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(u)\xi_j$$

$$\text{при условиях } \xi_j \geqslant 0 \quad \forall\, j = [1,n], \ u \in \Omega, \tag{2}$$

$$f_i(x,u) = -\beta_i(u) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(u)\xi_j \leqslant 0 \quad \forall\, i = [1,m].$$

При фиксированном u задача (2) принимает вид:
максимизировать по $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$:

$$F(x,u) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j\xi_j,$$

$$\text{при условиях} \quad \xi_j \geqslant 0 \quad \forall\, j = [1,n], \tag{3}$$

$$f_i(x,u) = -\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_j \leqslant 0 \quad \forall\, i = [1,m].$$

Это — *задача нижнего уровня*, она линейна по переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Пусть ее решение $x^*(u)$, тогда *задача верхнего уровня* запишется так:
максимизировать по u $F(x^*(u),u) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j(u)\xi_j^*(u)$ при условии $u \in \Omega$.

Тот факт, что зависимость $x^*(u)$ входит в условие этой задачи, может в значительной степени осложнить процедуру решения. Действительно, пусть начальное приближение к ее решению есть u^0, а последующее определяется для каждого шага t стандартным итерационным соотношением

$$u^{t+1} = u^t + \rho_t w^t, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где w^t — локальное улучшающее $F(x^*(u),u)$ направление в E^k, а ρ_t — величина шага по этому направлению. Тогда, например, в результате «неудачного» выбора величины шага может оказаться, что задача (3) несовместна для u^{t+1}, то есть $x^*(u)$ не будет определена. В другом случае может оказаться, что задача (3) совместна, но имеет неограниченный целевой функционал или же неединственное решение. То есть зависимость $x^*(u)$ может не быть определенной для всех $u \in \Omega$. Но даже, если она и определена, то в силу неоднозначности может не быть функциональной. Наконец, даже при тех u, для которых зависимость $x^*(u)$ определена и однозначна, она практически всегда оказывается «негладкой», что делает невозможным использование тейлоровских аппроксимаций для поиска локально улучшающих $F(x^*(u), u)$ направлений.

В [3,4] был предложен подход, в котором отмеченные (за исключением одного) затруднения удается единообразно преодолеть при помощи использования *метода гладких штрафных функций* [5,8]. В этом подходе зависимости $x^*(u)$ заменяются достаточно гладкими вектор-функциями $\tilde{x}(\tau, u)$, которые являются точкой максимума вспомогательной функции

$$A_p(\tau, x, u) = F(x, u) - \sum_{i=1}^{m} P\left(\tau, -f_i(x, u)\right) \qquad (5)$$

задачи нижнего уровня при фиксированных τ и u. Иначе говоря, $\tilde{x}(\tau, u) = \operatorname*{argmax}_x A_p(\tau, x, u)$.

Потребуем дополнительно, чтобы штрафные функции $P(\tau, s)$ были непрерывны вместе со своими производными до второго порядка включительно для всех s и любых $\tau > 0$, а также удовлетворяли условиям[1]:

$$\lim_{\tau \to +0} P(\tau, s) = \begin{bmatrix} 0, & s > 0, \\ +\infty, & s < 0 \end{bmatrix}$$

и, кроме того, $\dfrac{\partial P}{\partial s} < 0$ и $\dfrac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0$,

причем $\frac{\partial P}{\partial s} = \Phi\left(\frac{s}{\tau}\right)$, то есть зависит только от отношения $\frac{s}{\tau}$. Последнее условие (как показано в [8]) гарантирует дифференцируемость функции $\tilde{x}(\tau, u)$ по τ при $\tau \to +0$,

Зависимость $\tilde{x}(\tau, u)$ будет определяться из условия стационарности вспомогательной функции

$$\operatorname{grad}_x A_p(\tau, \tilde{x}(\tau, u), u) = o. \qquad (6)$$

Требуемые от $\tilde{x}(\tau, u)$ однозначная определенность и достаточная гладкость обеспечиваются свойствами вспомогательной функции (5), в первую очередь применимостью теоремы о неявных функциях [6] к условию (6). А предельное соотношение

$$\lim_{\tau \to +0} A_p(\tau, \tilde{x}(\tau, u), u) = F(x^*(u), u)$$

для тех u, при которых $x^*(u)$ существует, позволяет использовать схему (4) для приближенного решения задачи верхнего уровня.

Вместе с тем данный подход не позволяет построить сглаженную аппроксимацию зависимости $x^*(u)$ в случае неограниченности целевой функции задачи (3) на допустимом множестве ее аргументов, поскольку при этом уравнение (6) не имеет решений. Преодолеть это затруднение оказывается возможным, использовав в качестве сглаживающей аппроксимации зависимость, получаемую при решении методом гладких штрафных функций *пары двойственных задач нижнего уровня*: задачи (3) и двойственной ей задачи, имеющей вид:

минимизировать по $\Lambda \in E^m$ с координатами $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ функцию $G(\Lambda, u) = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i$

при условиях

$$\lambda_i \geqslant 0 \quad \forall\, i = [1, m],$$
$$g_j(x, u) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall\, j = [1, n]. \qquad (7)$$

Пусть $\Lambda^*(u)$ — решение задачи (7) при некотором фиксированном u, тогда для вспомогательной функции этой задачи

$$A_d(\tau, \Lambda, u) = G(x, u) + \sum_{j=1}^{n} P\left(\tau, g_j(\Lambda, u)\right) \qquad (8)$$

будет справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\tau \to +0} A_d(\tau, \tilde{\Lambda}(\tau, u), u) = G(\Lambda^*(u), u),$$

где $\tilde{\Lambda}(\tau, u) = \operatorname*{argmin}_{\Lambda} A_d(\tau, \Lambda, u)$, а также выполнено условие стационарности

$$\operatorname{grad}_{\Lambda} A_d(\tau, \tilde{\Lambda}(\tau, u), u) = o. \qquad (9)$$

Кроме того, в случае однозначной разрешимости задач (3) и (7) будут иметь место равенства

$$\lim_{\tau \to +0} \tilde{x}(\tau, u) = x^*(u) \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \to +0} \tilde{\Lambda}(\tau, u) = \Lambda^*(u).$$

Однако, в случае, когда задачи (3) и (7) несовместны, имеют неединственное решение или же решение, неограниченное в допустимой области, оказывается возможным получать сглаженные аппроксимации зависимостей $x^*(u)$ и $\Lambda^*(u)$ путем построения некоторой специальной системы уравнений. Как будет показано ниже, такая система позволяет одновременно находить аппроксимации независимо от того, являются задачи (3) и (7) регулярными или нет и без использования какой-либо схемы регуляризации.

Рассматриваемый подход основан на справедливых для задач (3) и (7) соотношениях

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\partial P}{\partial f_i}\left(\tau, -f_i(\tilde{x}(\tau, u))\right) = -\lambda_i^*(u) \quad \forall\, i = [1, m],$$

[1] Следует отметить, что достаточно часто используемые в вычислительной практике «барьерные» штрафные функции с $P(\tau, s) = +\infty$ при $s \leqslant 0$ или «внешние» штрафные функции, для которых $P(\tau, s) = 0$ при $s \geqslant 0$, этим условиям не удовлетворяют.

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\partial P}{\partial g_j}\,(\tau, g_j(\tilde\Lambda(\tau,u))) = -\xi_j^*(u) \quad \forall\, j=[1,n]$$

в случае, когда их решения существуют и единственны [7]. В этом подходе предлагается вместо сглаживающих аппроксимаций $\tilde x(\tau,u)$ и $\tilde\Lambda(\tau,u)$ использовать аппроксимации $\bar x(\tau,u)$ и $\bar\Lambda(\tau,u)$ такие, что

$$\lim_{\tau\to+0}\bar x(\tau,u) = x^*(u),$$
$$\lim_{\tau\to+0}\bar\Lambda(\tau,u) = \Lambda^*(u)$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial f_i}\,(\tau, -f_i(\bar x(\tau,u))) = -\bar\lambda_i(u) & \forall\, i=[1,m],\\ \dfrac{\partial P}{\partial g_j}\,(\tau, g_j(\bar\Lambda(\tau,u))) = -\bar\xi_j(u) & \forall\, j=[1,n] \end{cases} \tag{10}$$

$\forall\,\tau\in(0,T)$ для некоторого фиксированного $T>0$.

Поскольку $\dfrac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0\ \forall\, s$ и $\forall\,\tau>0$, то функция $\left(-\dfrac{\partial P}{\partial s}\right)$ по s строго монотонна и потому [6] имеет обратную, которую обозначим как $Q(\tau,s)$. Это позволяет записать систему (10) в ином, более удобном для использования, виде:

$$\begin{cases} -f_i(\bar x(\tau,u)) = Q(\tau,\bar\lambda_i) & \forall\, i=[1,m],\\ g_j(\bar\Lambda(\tau,u)) = Q(\tau,\bar\xi_j) & \forall\, j=[1,n]. \end{cases}$$

Или, окончательно,

$$\begin{cases} \beta_i(u) - \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(u)\bar\xi_j = Q(\tau,\bar\lambda_i) & \forall\, i=[1,m],\\ \sigma_j(u) - \sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ij}(u)\bar\lambda_i = -Q(\tau,\bar\xi_j) & \forall\, j=[1,n]. \end{cases} \tag{11}$$

Прежде чем обсуждать свойства системы (11), проиллюстрируем специфику ее решений при фиксированных u и τ на примере пары двойственных задач следующего вида.

Пример 1. Прямая задача:
максимизировать в E^2 функцию $F = 2\xi_1 + 3\xi_2$ при условиях $\xi_1 \geqslant 0$, $\xi_2 \geqslant 0$ и

$$\xi_1 + 2\xi_2 \leqslant 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 \leqslant 6.$$

Двойственная задача: минимизировать в E^2 функцию $G = 6\lambda_1 + 6\lambda_2$ при условиях $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$ и

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \geqslant 2,$$
$$2\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 3. \qquad \square$$

Легко видеть, что обе эти задачи имеют единственные решения

$$\xi_1^* = 2, \quad \xi_2^* = 2, \quad F^* = 10$$

и соответственно $\quad \lambda_1^* = \dfrac{4}{3}, \quad \lambda_2^* = \dfrac{1}{3}, \quad G^* = 10.$

В качестве штрафной функции используем предложенную в [8] $P(\tau,s) = \tau\exp(-\frac{s}{\tau})$, удовлетворяющую всем сформулированным выше условиям и для которой $Q(\tau,s) = -\tau\ln s$. Тогда вспомогательные функции двойственной пары задач примера 1 будут

$$A_p(\tau,\xi_1,\xi_2) = 2\xi_1 + 3\xi_2 - \\ - \tau\exp\left(\frac{\xi_1+2\xi_2-6}{\tau}\right) - \tau\exp\left(\frac{2\xi_1+\xi_2-6}{\tau}\right),$$

$$A_d(\tau,\lambda_1,\lambda_2) = 6\lambda_1 + 6\lambda_2 + \\ + \tau\exp\left(\frac{2-\lambda_1-2\lambda_2}{\tau}\right) + \tau\exp\left(\frac{3-2\lambda_1-\lambda_2}{\tau}\right),$$

а их условия стационарности (6) и (9) соответственно

$$\begin{cases} 2 - \exp\left(\dfrac{\tilde\xi_1+2\tilde\xi_2-6}{\tau}\right) - 2\exp\left(\dfrac{2\tilde\xi_1+\tilde\xi_2-6}{\tau}\right) = 0,\\ 3 - 2\exp\left(\dfrac{\tilde\xi_1+2\tilde\xi_2-6}{\tau}\right) - \exp\left(\dfrac{2\tilde\xi_1+\tilde\xi_2-6}{\tau}\right) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

и

$$\begin{cases} 6 - \exp\left(\dfrac{2-\tilde\lambda_1-2\tilde\lambda_2}{\tau}\right) - 2\exp\left(\dfrac{3-2\tilde\lambda_1-\tilde\lambda_2}{\tau}\right) = 0,\\ 6 - 2\exp\left(\dfrac{2-\tilde\lambda_1-2\tilde\lambda_2}{\tau}\right) - \exp\left(\dfrac{3-2\tilde\lambda_1-\tilde\lambda_2}{\tau}\right) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Наконец, система уравнений (11) будет иметь вид

$$\begin{cases} 6 - \bar\xi_1 - 2\bar\xi_2 + \tau\ln\bar\lambda_1 = 0,\\ 6 - 2\bar\xi_1 - \bar\xi_2 + \tau\ln\bar\lambda_2 = 0,\\ 2 - \bar\lambda_1 - 2\bar\lambda_2 - \tau\ln\bar\xi_1 = 0,\\ 3 - 2\bar\lambda_1 - \bar\lambda_2 - \tau\ln\bar\xi_2 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Приведем решения как систем (12) – (13), так и системы (14), полученные при помощи программного средства MathCAD для значения параметра штрафа $\tau = 0.01$, в удобной для сравнения результатов таблице 1.

Результаты, приведенные в таблице 1, демонстрируют, во-первых, факт близости полученных оценок к точному решению (что обусловлено использованием метода гладких штрафных функций в качестве базового алгоритма), и, во-вторых, несовпадение оценок $\{\tilde x(\tau,u);\ \tilde\Lambda(\tau,u)\}$ и $\{\bar x(\tau,u);\ \bar\Lambda(\tau,u)\}$ в случае, когда значение τ не является бесконечно малым.

Таблица 1

	ξ_1	ξ_2	F	λ_1	λ_2	G
Система (12)	1.99172	2.00558	10.00017			
Система (13)				1.33102	0.33103	9.97229
Система (14)	1.99168	2.00559	10.00013	1.33099	0.33106	9.97230

Исследуем теперь свойства системы (11). В первую очередь, естественно, возникает вопрос о содержательном смысле условий (11), ответ на который дают нижеследующие теоремы.

Рассмотрим функцию $U(\tau, x, \Lambda, u)$, заданную при фиксированных τ и u на прямом произведении пространств E^n и E^m, значения которой находятся по формуле

$$U(\tau, x, \Lambda, u) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sigma_j(u)\xi_j + R(\tau, \xi_j)\Big) + \\ + \sum_{i=1}^{m}\Big(\beta_i(u)\lambda_i - R(\tau, \lambda_i)\Big) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}(u)\xi_j\lambda_i, \quad (15)$$

где $R(\tau, s) = \int\limits_a^s Q(\tau, t)\,dt$, а $\|\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n\|^{\mathrm{T}}$ и $\|\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_m\|^{\mathrm{T}}$ — соответственно координатные представления векторов $x \in E^n$ и $\Lambda \in E^m$.

Теорема 1. Если $\bar{x}(\tau, u)$ и $\bar{\Lambda}(\tau, u)$ — решения системы (11), то $\{\bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u)\}$ — стационарный вектор функции $U(\tau, x, \Lambda, u)$ в $E^n \times E^m$. $\square$

Доказательство. Дифференцируя функцию (15) по ξ_1, ξ_2, …, ξ_n и λ_1, λ_2, …, λ_m, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_j} = \sigma_j(u) - \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}(u)\lambda_i + Q(\tau, \xi_j) \quad \forall\, j = [1, n],$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = \beta_i(u) - \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(u)\xi_j - Q(\tau, \lambda_i) \quad \forall\, i = [1, m],$$

что в силу соотношений (11) дает

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_j}\left(\bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u)\right) = 0 \quad \forall\, j = [1, n],$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i}\left(\bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u)\right) = 0 \quad \forall\, i = [1, m].$$

Теорема 2. Если $\bar{x}(\tau, u)$ и $\bar{\Lambda}(\tau, u)$ — решения системы (11), то $\{\bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u)\}$ — седловая точка функции $U(\tau, x, \Lambda, u)$ в $E^n \times E^m$. $\square$

Доказательство. Рассмотрим зависимость функции $U(\tau, x, \Lambda, u)$ от x при фиксированных значениях τ, Λ и u. Из соотношений (11) получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_j \partial \xi_k} = \frac{\partial Q}{\partial \xi_j}\cdot\delta_{jk} \quad \forall\, j, k = [1, n]$$

(где δ_{jk} — символ Кронекера), что означает диагональность матрицы Гессе функции $U(\tau, x, \Lambda, u)$ по компонентам x.

Покажем, что эта матрица отрицательно определенная. Действительно, значения ее главных миноров вида

$$\det\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi_1 \partial \xi_k} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi_2 \partial \xi_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi_k \partial \xi_1} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi_k \partial \xi_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi_k^2} \end{Vmatrix} \quad \forall\, k = [1, n]$$

определяются по формулам

$$\prod_{j=1}^{k}\frac{\partial Q}{\partial \xi_j} \quad \forall\, k = [1, n].$$

Числа $\dfrac{\partial Q}{\partial \xi_j}$ отрицательные, так как в силу связи между производными взаимно обратных функций [6] и условия $\dfrac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0$:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{1}{-\dfrac{\partial^2 P}{\partial s^2}} < 0.$$

Таким образом, все миноры нечетного порядка отрицательны, четного — положительны, и, согласно критерию Сильвестра, матрица Гессе функции $U(\tau, x, \Lambda, u)$ по компонентам x отрицательно определена, а сама функции $U(\tau, x, \Lambda, u)$ по компонентам x имеет максимум в стационарной точке.

Аналогично доказывается, что функция $U(\tau, x, \Lambda, u)$ по компонентам Λ имеет минимум при фиксированных τ, x и u. Окончательно получаем, что при фиксированных τ и u точка $\{\bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u)\}$ является седловой для функции $U(\tau, x, \Lambda, u)$ в $E^n \times E^m$.

Лемма 1. Для любого фиксированного $s > 0$ $\lim\limits_{\tau\to+0} R(\tau, s) = 0$. $\square$

Доказательство. Поскольку $\frac{\partial P}{\partial s} = \Phi\left(\frac{s}{\tau}\right)$, а функция $\Phi\left(\frac{s}{\tau}\right)$ имеет монотонную обратную, то вид зависимости $Q(\tau, s)$ определяется соотношениями

$$s = \Phi\left(\frac{Q}{\tau}\right) \Rightarrow \frac{Q}{\tau} = \Phi^{-1}(s) \Rightarrow Q(\tau, s) = \tau\cdot\Phi^{-1}(s),$$

что в сочетании с условием $R(\tau, s) = \int\limits_a^s Q(\tau, t)\,dt$ доказывает лемму.

Теорема 3. Для любого фиксированного $s > 0$:

$$\lim_{\tau\to+0} U(\tau, x, \Lambda, u) = L(x, \Lambda, u),$$

где $L(x, \Lambda, u)$ — функция Лагранжа задачи (3). $\square$

Доказательство. Функция Лагранжа задачи (3) имеет вид

$$L(x, \Lambda, u) = \sum_{j=1}^{n}\sigma_j\xi_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Big(-\beta_i + \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\Big),$$

или

$$L(x, \Lambda, u) = \sum_{j=1}^{n}\sigma_j\xi_j + \sum_{i=1}^{m}\beta_i\lambda_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\lambda_i.$$

Теперь очевидно, что применение леммы 1 к формуле (15) позволяет сделать заключение о справедливости утверждения данной теоремы.

Теорема 4. В случае регулярности (существования и единственности) решения пары двойственных задач (3) – (7) справедливы соотношения

$$\lim_{\tau\to+0}\bar{x}(\tau, u) = x^*(u), \quad \lim_{\tau\to+0}\bar{\Lambda}(\tau, u) = \Lambda^*(u),$$

Т а б л и ц а 2

τ	0.1	0.02	0.003	0.001	0.0005	0.0001
$\bar\xi_1 = \bar\xi_2$	0.536192	0.506999	0.501041	0.500347	0.500173	0.500035
$\bar\lambda_1$	2.062326	2.013585	2.002073	2.000693	2.000346	2.000069

где $\bar x(\tau, u)$ и $\bar\Lambda(\tau, u)$ — решения системы (11) при фиксированном u.

Доказательство. Функция Лагранжа задачи (3) в регулярном случае при фиксированном u имеет единственную седловую точку $\{x^*(u), \Lambda^*(u)\}$. Функция $U(\tau, x, \Lambda, u)$ всегда имеет единственную седловую точку при фиксированных τ, u. Тогда в силу утверждения теоремы 3 получаем, что для регулярной исходной задачи (3):

$$\lim_{\tau\to+0} \bar x(\tau, u) = x^*(u), \quad \lim_{\tau\to+0} \bar\Lambda(\tau, u) = \Lambda^*(u).$$

Рассмотрим теперь нерегулярную задачу (3). В этом случае возможны: неединственность решения задачи (3), несовместность задачи (3) и неограниченность целевой функции задачи (3) в ее допустимой области. Продемонстрируем особенности применения рассматриваемой схемы для этих случаев, сравнивая решения системы (11) с результатами, получаемыми из уравнений (6) и (9).

Пример 2 (случай неединственности). Прямая задача: максимизировать в E^2 функцию $F = 2\xi_1 + 2\xi_2$ при условиях $\xi_1 \geqslant 0$, $\xi_2 \geqslant 0$ и $\xi_1 + \xi_2 \leqslant 1$.
Двойственная задача: минимизировать в E^1 функцию $G = \lambda_1$ при условиях $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 2$, $\lambda_1 \geqslant 2$. □

Легко видеть, что прямая задача имеет решение: $\xi_1^* = t$, $\xi_2^* = 1 - t$, $t \in [0, 1]$, $F^* = 2$, оно неединственное, в то время как двойственная переопределена и имеет решение: $\lambda_1^* = 2$, $G^* = 2$.

Рассмотрим вначале схему, использующую вспомогательные функции (5) и (8). Они соответственно будут иметь вид

$$A_p(\tau, \xi_1, \xi_2) = 2\xi_1 + 2\xi_2 - \tau \exp\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 - 1}{\tau}\right),$$

$$A_d(\tau, \lambda_1) = \lambda_1 + 2\tau \exp\left(\frac{2 - \lambda_1}{\tau}\right),$$

а их условия стационарности (6) и (9) соответственно

$$\begin{cases} 2 - \exp\left(\dfrac{\tilde\xi_1 + \tilde\xi_2 - 1}{\tau}\right) = 0, \\ 2 - \exp\left(\dfrac{\tilde\xi_1 + \tilde\xi_2 - 1}{\tau}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{и } 1 - 2\exp\left(\frac{2 - \tilde\lambda_1}{\tau}\right) = 0.$$

Второе условие просто дает $\tilde\lambda_1 = 2 + \tau \ln 2$, в то время как первая система очевидно имеет неединственное решение и требует соответствующей регуляризации.

Наконец, система уравнений (11) будет иметь вид

$$\begin{cases} 1 - \bar\xi_1 - \bar\xi_2 + \tau \ln \bar\lambda_1 = 0, \\ 2 - \bar\lambda_1 - \tau \ln \bar\xi_1 = 0, \\ 2 - \bar\lambda_1 - \tau \ln \bar\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что при любом $\tau > 0$ она имеет решение $\bar\xi_1 = \bar\xi_2 = \exp\left(\frac{2 - \bar\lambda_1}{\tau}\right)$, где $\bar\lambda_1$ — корень уравнения

$$1 - 2\exp\left(\frac{2 - \bar\lambda_1}{\tau}\right) + \tau \ln \bar\lambda_1 = 0,$$

имеющего единственное решение. Наконец, отметим, что полученные в данном примере решения системы (11) удовлетворяют предельным соотношениям $\bar\lambda_1 \to 2$ и $\bar\xi_1 = \bar\xi_2 \to \frac{1}{2}$ при $\tau \to +0$. Результаты численных расчетов приведены в таблице 2.

Основное различие результатов использования условий (6) – (9) и системы (11) состоит в том, что в последнем случае решение оказывается единственным $\forall\, \tau > 0$ благодаря свойствам функции (15), в которой слагаемые, зависящие от $R(\tau, s)$, играют роль регуляризирующей компоненты.

Пример 3 (случай неограниченности целевой функции). Прямая задача: максимизировать в E^2 функцию $F = 2\xi_1$ при условиях $\xi_1 \geqslant 0$, $\xi_2 \geqslant 0$ и $\xi_1 - \xi_2 \leqslant 1$.
Двойственная задача: минимизировать в E^1 функцию $G = \lambda_1$ при условиях $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 2$, $-\lambda_1 \geqslant 0$. □

Первая из этих задач совместна, но значение ее целевой функции неограничено в допустимой области. Двойственная задача в этом примере несовместна.

Сначала рассмотрим схему, основанную на использовании вспомогательных функций (5) и (8). В данном примере они будут иметь вид

$$A_p(\tau, \xi_1, \xi_2) = 2\xi_1 - \tau \exp\left(\frac{\xi_1 - \xi_2 - 1}{\tau}\right),$$

$$A_d(\tau, \lambda_1) = \lambda_1 + \tau \exp\left(\frac{2 - \lambda_1}{\tau}\right) + \tau \exp\left(\frac{\lambda_1}{\tau}\right),$$

а их условия стационарности (6) и (9) соответственно

$$\begin{cases} 2 - \exp\left(\dfrac{\tilde\xi_1 - \tilde\xi_2 - 1}{\tau}\right) = 0, \\ \exp\left(\dfrac{\tilde\xi_1 - \tilde\xi_2 - 1}{\tau}\right) = 0 \end{cases}$$

и $$1 - \exp\left(\frac{2-\tilde{\lambda}_1}{\tau}\right) + \exp\left(\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tau}\right) = 0.$$

Второе условие имеет асимптотическое решение $\tilde{\lambda}_1 \to 1$ при $\tau \to +0$, в то время как первая система очевидно несовместна, что означает неприменимость схемы (5) – (8) для решения данной задачи.

Рассмотрим теперь систему уравнений (11), она будет иметь вид

$$\begin{cases} 1 - \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \tau \ln \bar{\lambda}_1 = 0, \\ 2 - \bar{\lambda}_1 - \tau \ln \bar{\xi}_1 = 0, \\ \bar{\lambda}_1 - \tau \ln \bar{\xi}_2 = 0. \end{cases}$$

Она имеет решения $\bar{\xi}_1 = \exp\left(\frac{2-\bar{\lambda}_1}{\tau}\right)$ и $\bar{\xi}_2 = \exp\left(\frac{\bar{\lambda}_1}{\tau}\right)$, где $\bar{\lambda}_1$ — корень уравнения

$$1 - \exp\left(\frac{2-\bar{\lambda}_1}{\tau}\right) + \exp\left(\frac{\bar{\lambda}_1}{\tau}\right) + \tau \ln \bar{\lambda}_1 = 0,$$

имеющего единственное решение при любом $\tau > 0$.

В заключение отметим, что полученные в данном примере решения системы (11) удовлетворяют предельным соотношениям $\bar{\lambda}_1 \to 1$ и $\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 \to 1$ при $\tau \to +0$, хотя пределы $\lim\limits_{\tau\to+0} \bar{\xi}_1$ и $\lim\limits_{\tau\to+0} \bar{\xi}_2$ не существуют. Результаты численных расчетов приведены в таблице 3.

Пример 4 (случай несовместности). Прямая задача: максимизировать в E^2 функцию $F = \xi_1 + 3\xi_2$ при условиях $\xi_1 \geqslant 0$, $\xi_2 \geqslant 0$ и

$$\xi_1 - \xi_2 \leqslant 3,$$
$$-\xi_1 + \xi_2 \leqslant -4.$$

Двойственная задача: минимизировать в E^2 функцию $G = 3\lambda_1 - 4\lambda_2$ при условиях $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$ и

$$\lambda_1 - \lambda_2 \geqslant 1,$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 3.$$ □

Легко видеть, что обе приведенные задачи несовместные, при этом условия стационарности (6) и (9) вспомогательных функций

$$A_p(\tau, \xi_1, \xi_2) = \xi_1 + 3\xi_2 - \tau \exp\left(\frac{\xi_1 - \xi_2 - 3}{\tau}\right) - \tau \exp\left(\frac{-\xi_1 + \xi_2 + 4}{\tau}\right),$$

$$A_d(\tau, \lambda_1, \lambda_2) = 3\lambda_1 - 4\lambda_2 + \tau \exp\left(\frac{1 - \lambda_1 + \lambda_2}{\tau}\right) + \tau \exp\left(\frac{3 + \lambda_1 - \lambda_2}{\tau}\right),$$

очевидно противоречивые:

$$\begin{cases} 1 - \exp\left(\frac{\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2 - 3}{\tau}\right) + \exp\left(\frac{-\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + 4}{\tau}\right) = 0, \\ 3 + \exp\left(\frac{\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2 - 3}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{-\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + 4}{\tau}\right) = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 3 - \exp\left(\frac{1 - \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}{\tau}\right) + \exp\left(\frac{3 + \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\tau}\right) = 0, \\ -4 + \exp\left(\frac{1 - \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}{\tau}\right) - \exp\left(\frac{3 + \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\tau}\right) = 0, \end{cases}$$

поэтому стандартный вариант метода штрафных функций в данном примере не может быть использован.

Как альтернативу рассмотрим систему уравнений (11), она будет иметь вид

$$\begin{cases} 3 - \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 + \tau \ln \bar{\lambda}_1 = 0, \\ -4 + \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 + \tau \ln \bar{\lambda}_2 = 0, \\ 1 - \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 - \tau \ln \bar{\xi}_1 = 0, \\ 3 + \bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \tau \ln \bar{\xi}_2 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что эта система имеет решения $\forall \tau \to +0$, удовлетворяющие легко проверяемому следствию $\ln \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 = 4 \ln \bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2$. Однако, как и в примере 3, пределы $\lim\limits_{\tau\to+0} \bar{\xi}_1$, $\lim\limits_{\tau\to+0} \bar{\xi}_2$, $\lim\limits_{\tau\to+0} \bar{\lambda}_1$ и $\lim\limits_{\tau\to+0} \bar{\lambda}_2$ не существуют. Результаты численных расчетов с допустимой погрешностью 10^{-7} приведены в таблице 4.

Таблица 3

τ	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$\bar{\xi}_1$	5.7996196	7.8969374	12.683928	28.535267	148.91394	22026.966
$\bar{\xi}_2$	4.8333558	6.9138386	11.695904	27.536873	147.91407	22025.966
$\bar{\lambda}_1$	0.9453246	0.9667625	0.9836955	0.9946578	0.9993263	0.9999977

Таблица 4

τ	1.0	0.75	0.5	0.25	0.15
$\bar{\xi}_1$	9.1243426	16.132626	56.328286	2982.7001	61743.938
$\bar{\xi}_2$	5.9837900	12.839029	52.921156	2979.2170	61743.588
$\bar{\lambda}_1$	1.1509095	1.4791425	2.2575066	6.9058856	27.536084
$\bar{\lambda}_2$	2.3618554	2.5647752	3.2731050	7.9060316	28.536084
$\ln \frac{\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2}{(\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2)^4}$	$1.5 \cdot 10^{-8}$	$-1.1 \cdot 10^{-7}$	$-2.0 \cdot 10^{-8}$	$5.5 \cdot 10^{-8}$	$7.9 \cdot 10^{-9}$

Приведенные примеры вполне наглядно демонстрируют практическую эффективность схемы, основанной на решении системы (11) как альтернативы метода (5) – (8). В заключение также отметим, что метод гладких штрафных функций является принципиально приближенным, что не является существенным недостатком, для значений вектора параметров u, значительно отличающихся от решения задачи верхнего уровня. Однако в ином случае следует предусмотреть использование процедур, позволяющих находить точные решения при ненулевых τ (например, описанных в [9]), или же применить экстраполяционные процедуры типа [10], основанные на тейлоровской аппроксимации вида

$$\begin{cases} x^* \approx \bar{x}(\tau) - \tau\Delta\bar{x}, \\ \Lambda^* \approx \bar{\Lambda}(\tau) - \tau\Delta\bar{\Lambda}, \end{cases}$$

где компоненты векторов $\Delta\bar{x}, \Delta\bar{\Lambda}$ находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2 U}{\partial\lambda_i\partial\lambda_p}\,\Delta\bar{\lambda}_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 U}{\partial\xi_j\partial\lambda_p}\,\Delta\bar{\xi}_j = -\,\dfrac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial\lambda_p}\,, \\ \hfill p = [1, m], \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2 U}{\partial\lambda_i\partial\xi_q}\,\Delta\bar{\lambda}_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 U}{\partial\xi_j\partial\xi_q}\,\Delta\bar{\xi}_j = -\,\dfrac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial\xi_q}\,, \\ \hfill q = [1, n]. \end{cases}$$

Результат использования экстраполирующей процедуры для примера 1 при $\tau = 0.01$, приведен в таблице 5.

Таблица 5

Переменная	ξ_1	ξ_2	λ_1	λ_2
Приближ. значение	1.9916772	2.005591	1.3309903	0.3310599
Вектор $\{\Delta\bar{x},\ \Delta\bar{\Lambda}\}$	−0.8146454	0.554041	−0.2375052	−0.2236908
Уточнен. значение	1.9998237	2.0000506	1.3333654	0.3332968

Литература

1. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982.

2. *Умнов Е.А.* Метод параметрической линеаризации в задачах дискретного оптимального управления // Тр. ИСА РАН. – М., 2005. – Т. 17(1). – С. 56–66.

3. *Умнов Е.А., Умнов А.Е., Чекарев Д.А.* Параметрический двухуровневый метод решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями // Моделирование процессов управления: сб. науч. тр. / Моск. физ.-техн. ин-т. – М.: МФТИ, 2004. – С. 132–140.

4. *Марковцев Д.А., Умнов А.Е., Умнов Е.А.* Об одной квазиклассической схеме решения задач математического программирования // Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики: сб. науч. тр. / Моск. физ.-техн. ин-т. – М.: МФТИ, 2008. – С. 99–112.

5. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. – М.: Наука, 1975.

6. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1981.

7. *Fiacco A.V., McCormick G.P.* Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques. – N.Y.: John Wiley and Sons, 1968.

8. *Умнов А.Е.* Метод штрафных функций в задачах большой размерности // ЖВМ и МФ. – 1975. – Т. 15, № 6. – С. 1399–1411.

9. *Еремин И.И.* Авторские результаты по проблематике математического программирования // Тр. ИММ Уо РАН. – Т. 14, № 2. – Екатеринбург, 2008. – С. 58–65.

10. *Умнов А.Е.* Многошаговая линейная экстраполяция в методе штрафных функций // ЖВМ и МФ. – 1974. – Т. 14, № 6.

Поступила в редакцию 20.01.2011